



MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN No : 446

ATATÜRK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN No : 3

# GENEL TOPOLOJİYE GİRİŞ

Prof. Dr. Z. Asuman ILGAZ

İSTANBUL — 1987





MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN No: 446

ATATÜRK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN No: 3

# GENEL TOPOLOJİYE GİRİŞ

Prof Dr. Z. Asuman İLGAZ

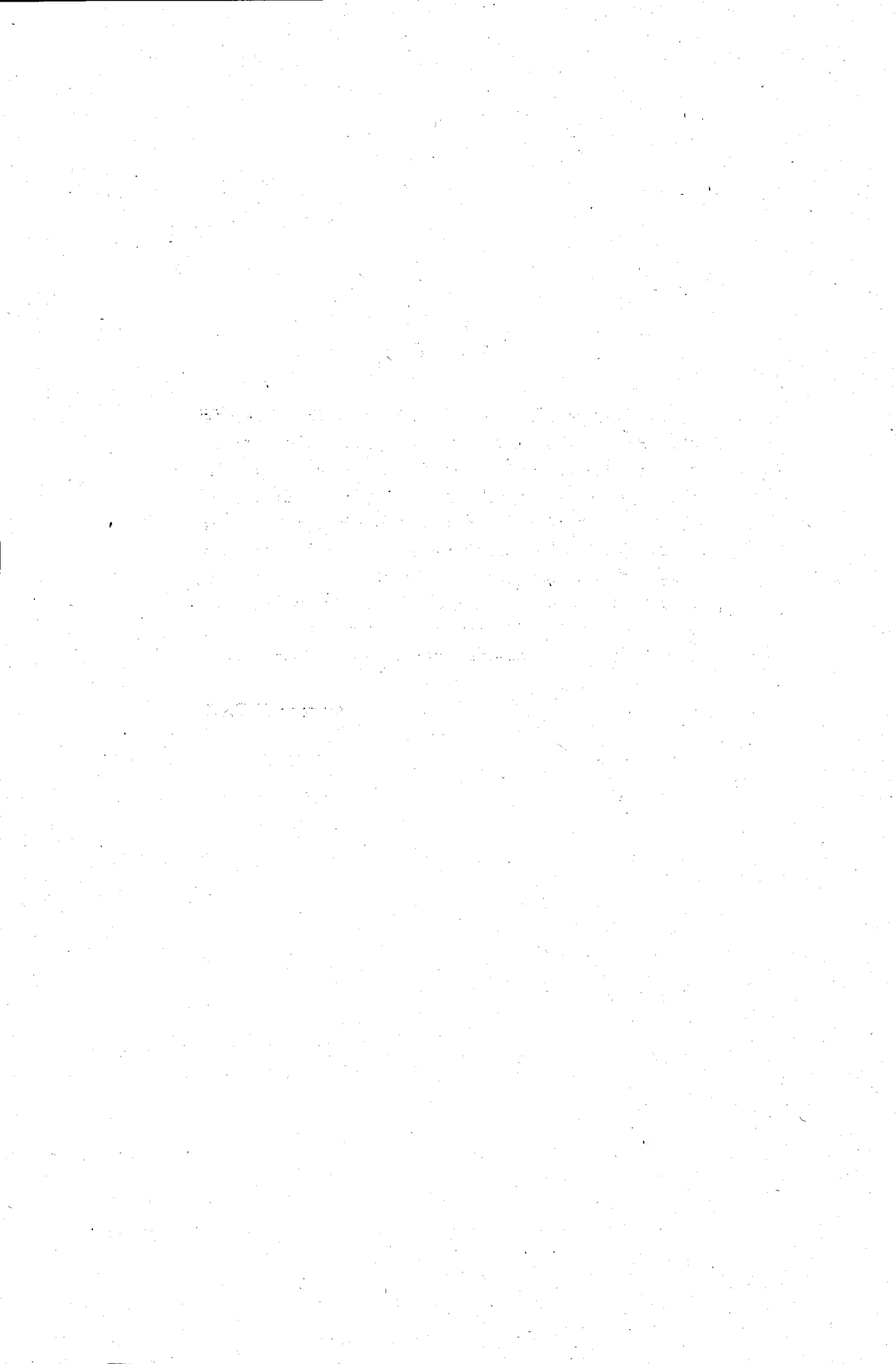
İSTANBUL — 1987

FATİH YAYINEVİ MATBAASI — Tel. : 527 23 72  
Alibaba Türbe Sokak No. 21/3 - Nuruosmaniye/İST.

## Ö N S Ö Z

*Bu kitapçık Üniversite de bir yarıyılık süre için planlanarak verilen ders notlarından derlenmiş bulunmaktadır. Adından da görüldüğü gibi kitap, Genel Topoloji'ye giriş için gerekli ön bilgilerden oluşmaktadır. Matematik eğitimi gören veya matematik öğretmenliğine aday öğrencilere dilimizde yazılmış bir el kitabı verebilme olanakını sağladıkları için Rektörümüz sayın Prof. Dr. ORHAN OĞUZ'a Üniversitemiz Yayın Komisyonu Üyelerine ve notasyon kullanımında gerekli özeni esirgemi-yen basım evi elemanlarına teşekkürü borç bilmekteyim.*

**Asuman ILGAZ**



## İÇİNDEKİLER

### 1. KÜMELER VE BAĞINTILAR

Kümeler, Elemanlar	1
Alt Kümeler, Üst Kümeler	2
Evensel ve Boş Kümeler	4
Sınıflar, Koleksiyonlar, Aileler ve Uzaylar	4
Kümeler İşlemleri	5
Çarpım Kümeleri	7
Bağıntılar	9
Özdeşlik Bağıntıları	10
Bağıntıların Birleşimi	12

### 2. FONKSİYONLAR

Fonksiyonlar	15
Bire-Bir, Üzerine, Ters ve Özdeş Fonksiyonlar	19
Sıralama Kümeleri, Kartezyen Çarpımlar	20
İşlemlerin Genelleştirilmesi	21
Küme Fonksiyonları ile İlgili Terimler	22
Reel Değerli Fonksiyonların Cebiri	26

### 3. SAYILABİLİRLİK VE SIRA

Özdeş Kümeler	30
Numaralandırılabilir ve Sayılabilir Kümeler	30
Yarı Sıralanmış Kümeler	33
Sıralanmış Kümelerin Alt Kümeleri	34
İlk ve Son Elemanlar	34
Maksimal ve Minimal Elemanlar	35
Maksimal ve Minimal Elemanlar	35
Üst ve Alt Sınırlar	35
Zorn Lemması	36

#### 4. REEL DOĞRUNUN VE DÜZLEMİN TOPOLOJİSİ

R deki Açık Kümeler	37
Yığılma Noktaları	39
Bolzano-Weierstrass Teoremi	40
Kapalı Kümeler	41
Heine-Borel Teoremi	43
Diziler	45
Yakınsak Diziler	46
Alt Diziler	47
Cauchy Dizileri	49
Tamlık	50
Düzlemin Topolojisi	51
Düzlemde Kapalı Kümeler	53

#### 5. TOPOLOJİK UZAYLAR

Yığılma Noktaları	57
Kapalı Kümeler	58
Bir Kümenin Kapanışı	59
İç Bölgeler Dış Bölgeler Sınır Bölgeler	63
Komşuluklar ve Komşuluk Sistemleri	65
Yakınsak Diziler	66
İnce ve Kaba Topolojiler	67
Alt Uzaylar, Relatif Topolojiler	67
Topolojilerin Özdeş Tanımları	68

#### 6. BAZLAR VE ALT BAZLAR

Bir Topoloji İçin Baz	71
Alt Bazlar	73
Bir Küme Sınıfıyla Meydana Getirilen Topolojiler	74
Lokal Bazlar	75

#### 7. SÜREKLİLİK VE TOPOLOJİK ÖZDEŞLİK

Sürekli Fonksiyonlar	79
Bir Nuktada Süreklilik	84
Bir Nuktada Dizisel Süreklilik	95
Açık Ve Kapalı Fonksiyonlar	86
Hameomorf Uzaylar	87



Topolojik Özellikler .....	88
Fonksiyonlar Yardımıyla Doğurulan Topolojiler .....	89

## 8. METRİK UZAYLAR

Metrikler .....	91
Kümeler Arasındaki Uzaklık, Çap .....	93
Açık Küreler .....	94
Metrik Topolojiler, Metrik Uzaylar .....	96
Metrik Topolojilerin Özellikleri .....	97
Özdeş Metrikler .....	99
Metrikleşme Problemi .....	100

## 9. SAYILABİLİRLİK

Birinci $A_1$ Sayılabilirlik Aksiyomunu Sağlayan Uzaylar .....	101
İkinci Sayılabilirlik Aksiyomunu Gerçekleyen Uzaylar .....	102
Lindelöf Teoremleri .....	103
Ayrılabilir Uzaylar .....	105

## 10. AYIRIM AKSİYOMLARI

$T_1$ Uzayları .....	107
Hausdorff Uzayları .....	110
Regüler Uzaylar .....	112
Normal Uzaylar .....	113
Urysohn Lemması Metrikleştirme Teoremi .....	117
Tamamiyle Regüler Uzaylar .....	117

## 11. KOMPAKT TOPOLOJİK UZAYLAR

Örtümler .....	119
Kompakt Kümeler .....	119
Kompakt Uzayların Alt Kümeleri .....	123
Sonlu Arakesit Özelliği .....	123
Kompaktlık Ve Hausdorff Uzayları .....	126
Dizisel Kompakt Kümeler .....	129
Sayılabılır Kompakt Kümeler .....	129
Lokal Kompakt Uzaylar .....	130
Kompaktlaştırma .....	131

## VIII

### 12. BİTİŞİK UZUYLAR

Ayrık Kümeler	137
Bitişik Kümeler	138
Bitişik Uzaylar	141
Reel Çizgi Üzerinde Bitişiklik	144
Komponentler	146
Lokal Bitişik Uzaylar	147
Yollar	148
Yol Bağıntılı Bitişik Kümeler	149
Total Bitişik Olmayan Uzaylar	152

### 13. ÇARPIM UZAYLARI

Çarpım Topolojisi	155
Sonlu Çarpım Topolojisi İçin Baz	157
Çarpım Topolojisi İçin Alt Bazın ve Bazın Tanımı	158
Alt Baz ve Baz Oluşturulması	158
Tychonoff's Çarpım Teoremi	163
Metrik Çarpım Uzayları	168
KAYNAKLAR	169

## B Ö L Ü M İ

### 1. KÜMELER VE BAĞINTILAR

#### Kümeler, Elemanlar

Küme kavramı Matematik bilim dalının her disiplininde kullanılır. Genel olarak küme objelerin bir koleksiyonu olarak tanımlanır ve A, B, X, Y gibi büyük harflerle isimlendirilir. Kümelerin objelerine **eleman** yada **kümenin üyesi** denir, ve a, b, x, y, ... diye küçük harflerle gösterilir. «p A nın bir elemanıdır»

$$p \in A$$

diye yazılır. «p ∈ A ya ait değil» ise  $p \notin A$  diye yazılır. Temelde bir kümeyi belirtmek için iki yol vardır. Birinci yol eğer mümkünse elemanların tümünü yazmaktır. Örnek :

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Diğer bir yol da kümenin elemanlarını karakterize eden özelliği yazmaktır. Örnek :

$$B = \{x : x > 0 \text{ ve tam}\}$$

Şöyle okunur : B sıfırdan büyük tam sayıların kümesidir.

Örnek 1.1. Yukarıdaki küme  $B = \{1, 2, 3, \dots\}$  olarak da yazılabilir.

$$-6 \notin B, \quad 3 \in B \quad \text{ve} \quad n \notin B.$$

Örnek1.2. Reel çizgi üzerinde aşağıda vereceğimiz kümeler matematikte çok sık kullanılır.  $a, b$  reel sayılar ve  $a < b$  olmak üzere

$$a,b \text{ açık aralığı} = (a,b) = \{x : a < x < b\}$$

$$a,b \text{ kapalı aralığı} = [a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

$$a,b \text{ yarı açık aralığı} = [a,b) = \{x : a \leq x < b\}$$

$$a,b \text{ açık kapalı aralığı} = (a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

İki  $A$  ve  $B$  kümesi eğer aynı elemanlara sahip iseler birbirlerine **eşittirler**. ve  $A = B$  yazılır. Yani  $A$  nın her elemanı  $B$  ye ve  $B$  nin de her elemanı  $A$  ya aittir.  $A = B$  nin tersi  $A \neq B$  diye yazılır.

### Örnek 1.3

$$E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

$$F = \{2, 1\}$$

$$G = \{1, 2, 2, 1\}$$

$$\Rightarrow E = F = G$$

Buradan da görüleceği gibi bir küme, elemanlarının gösteriliş yolunda, tamamıyla bağımsızdır. Bir kümenin elemanları ne kadar yer değiştirirse ve ne kadar tekrarlanırsa tekrarlanırsın Küme aynı kümedir.

Kümeler **sonlu** ve **sonsuz** olabilirler.  $n$  pozitif tam sayı olmak üzere  $n$  çeşitli elemandan meydana gelmiş bir küme **sonludur**. Özellikle yalnızca bir tek noktadan ibaret olan kümeye **tek elemanlı** küme denir.

### Alt Kümeler, Üst Kümeler

Bir  $A$  kümesi bir  $B$  kümesinin **alt kümesidir** ya da aynı şey demek olan  $B, A$  nın bir **üst kümesidir** denir ve şöyle yazılır.

$$A \subset B \text{ ya da } B \supset A$$

A'nın her elemanı aynı zaman da B'nin de bir elemanıdır. Yani eğer  $x \in A$  ise  $x \in B$  dir. «A, B'nin içindedir.» denir ya da «B, A'yı içine alır.»  $A \subset B$  nin tersi  $A \not\subset B$  ya da  $B \not\supset A$  diye yazılır ve  $x \in A$  :  $x \notin B$  demektir.

Örnek 1.4.

$$A = \{1,3,5,7, \dots\} \quad B = \{5,10,15,20, \dots\}$$

$$C = \{x : x \text{ tek sayılar ve } x > 2\} = \{3,5,7,11, \dots\}$$

$C \subset A$  dir.  $B \not\subset A$  dir. Çünkü  $10 \in B$  fakat  $10 \notin A$ .

Örnek 1.5.

N ile pozitif tam sayıları

Z ile tam sayıları

Q ile rasyonel sayıları

R ile de reel sayıları gösterelim. O zaman

$$N \subset Z \subset Q \subset R \text{ dir.}$$

**TANIM :** A ve B gibi iki küme ancak ve ancak  $A \subset B$  ve aynı zamanda  $B \subset A$  ise eşittirler.  $A \subset B$  ve  $A \neq B$  ise A, B'nin **has alt** kümesidir, ya da B, A'yı tam olarak içine alır.  $\subset$  bu sembol bir alt cümle için kullanılır.

$\subset$  ise has alt cümle için kullanılır.

**TEOREM 1.1.** A, B ve C herhangi üç küme olsunlar :

(i)  $A \subset A$  dir, (ii) Eğer  $A \subset B$  ve  $B \subset A$  ise o zaman  $A = B$  dir. (iii) Eğer  $A \subset B$  ve  $B \subset C$  ise, o zaman  $A \subset C$  dir.

**İspat :** (iii) nin ispatını yapalım. A ya ait her elemanın C ye ait olduğunu gösterelim.  $x \in A$  olsun.  $A \subset B$  olduğundan  $x \in B$  olur. Fakat  $B \subset C$  dir. O halde  $x \in C$ .  $x \in A \Rightarrow x \in C$  yada  $A \subset C$ .

### Evrensel ve Boş Kümeler

Kümeler teorisinin çoğu tatbikatlarında kümeler belli bir kümenin alt kümesi olarak verilirler. Bu kümeye **Evrensel** küme deriz ve  $U$  ile gösteririz. Hiç bir elemanı içermeyen kümeye de **boş** yada **sıfır** küme denir  $\emptyset$  ile gösterilir.

Sıfır kümesi sonlu bir kümedir ve diğer bütün kümelerin alt kümesidir. Böylece herhangi bir  $A$  kümesi için

$$\emptyset \subset A \subset U \text{ vardır.}$$

Örnek 1.6. Düzlem Geometride Evrensel küme düzlemin bütün noktalarını içine alır.

Örnek 1.6  $A = \{x : x^2 = 4, x \text{ tek sayı}\}$  O zaman  $A = \emptyset$

Örnek 1.8.  $B = \{\emptyset\}$ . O zaman  $B \neq \emptyset$  dir. Çünkü bir eleman içerir.

### Sınıflar, Koleksiyonlar, Aileler ve Uzaylar

Kümelerin kendi elemanları da kümelere oluşabilirler.

Örneğin her bir doğru çizgi, doğru çizgiler ailesinin içinde noktaların kümesidir. Bu durumu açıklığa kavuşturmak için «sınıf» «Koleksiyon» ve «Aile» isimlerini kullanırız. Özellikle kümelerin kümesi olarak sınıfı, sınıfların kümesi olarak da koleksiyon ya da aileyi kullanırız.

Örnek : 1.9  $\{\{2,3\}, \{2\}, \{5,6\}\}$  sınıfının elemanları  $\{2,3\}$ ,  $\{2\}$  ve  $\{5,6\}$  dırlar.

Örnek 1.10  $A$  herhangi bir küme olsun.  $\mathcal{P}(A)$  veya  $2^A$   $A$  nın bütün alt kümelerinin sınıfıdır. Yani örnek olarak  $A = \{a, b, c\}$  ise o zaman

$$\mathcal{P}(A) = \{A, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$$

Genellikle  $A$  sonlu ise, diyelim  $n$  elemanlı ise, o zaman  $P(A)$   $2^n$  elemanlıdır.

**Uzay** kelimesi bazı matematiksel yapıya sahip boş olmayan küme tipini belirler. **Vektör uzayı**, **Metrik Uzay**, **Topolojik Uzay** gibi. Bu durumda uzayın elemanlarına noktalar diyeceğiz.

### Kümelerle İşlemler

İki  $A, B$  kümesinin **bileşimi** öyle elemanlardır ki bunlar ya  $A$  ya, yada  $B$  ye aittirler ve  $A \cup B$  diye gösterilir.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ya da } x \in B\}$$

$A$  ve  $B$  nin **kesişimi** hem  $A$  ve hem de  $B$  ye ait olan elemanların kümesidir ve  $A \cap B$  ile gösterilir.

$A \cap B = \emptyset$  ise hiç ortak elemanı yok, **ayrık** yada **kesişmiyor**.

$A \setminus B = A$  ve  $B$  nin farkı.,  $A$  kümesine göre  $B$  nin farkı.

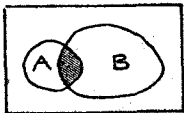
$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \text{ dir.}$$

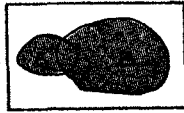
$A^c$  : Bir  $A$  kümesinin **mutlak komplementi** yada **Tamamlayıcısı**.

$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

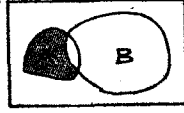
Örnek 1.11 Venn Diyagramı



$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



$A^c$

**TEOREM 1.2.** Kümeler için aşağıdaki tabloda vereceğimiz kanunlar geçerlidir.

Kümeler cebrinin kanunları	
1	1a. $A \cup A = A$ 1b. $A \cap A = A$
	2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Asosiyativlik kanunları
	3a. $A \cup B = B \cup A$ 3b. $A \cap B = B \cap A$ Komutativlik kanunları
	4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distribütivlik kanunları
	5a. $A \cup \emptyset = A$ 6a. $A \cap U = A$ 5b. $A \cup U = U$ 6b. $A \cap \emptyset = \emptyset$ İdantiklik kanunları
	7a. $A \cup A^c = U$ 8a. $(A^c)^c = A$ 7b. $A \cap A^c = \emptyset$ 8b. $U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$ Komplement kanunları
	9a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 9b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ De Morgan Kanunları



Bazılarının ispatını verelim.

Örnek. 9a:  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= \{x : x \notin A \cup B\} \\ &= \{x : x \notin A, x \notin B\} \\ &= \{x : x \in A^c, x \in B^c = x \in A^c \cap B^c\} \end{aligned}$$

4b:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x : x \in A \text{ ve } x \in B \cup C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ ve } x \in B \text{ ya da } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ ve } x \in B \text{ ya da } x \in A \text{ ve } x \in C\} \\ &= \{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\} \end{aligned}$$

Not: Yukarıdaki kanunların herbiri lojik kanunların bir analogudur. Örnek

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x : x \in B \text{ ve } x \in A\} = B \cap A$$

**TEOREM 1.3.**  $A \subset B$  olsun. Aşağıdaki ifadeler özdeştirler:

- (i)  $A \cap B = A$       (iii)  $B^c \subset A^c$       (v)  $B \cup A^c = U$   
(ii)  $A \cup B = B$       (iv)  $A \cap B^c = \emptyset$

İspat: (i)  $x \in A \Rightarrow x \in B$  demektir. Yani  $x \in A$  ve hemde  $x \in B$ . O halde  $x \in A \cap B$  olur.  $\forall x \in A$  için aynı şekilde  $A \subset A \cap B$  ve  $A \cap B \subset A$   $A \cap B = A$  dır. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

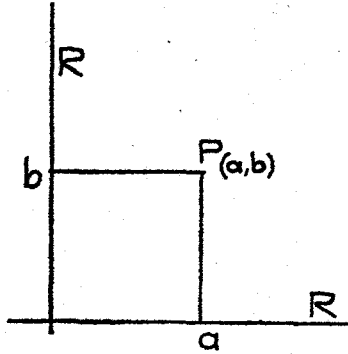
### Çarpım Kümeleri

A ve B iki küme olsun.  $A \times B$ : Çarpım kümesi A ile B nin  $a \in A$ ,  $b \in B$  olmak üzere  $\langle a, b \rangle$  ikili elemanlarının tümünden meydana gelir.

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle : a \in A, b \in B \}$$

$A \times A = A^2$  olarak gösterilir.

Örnek : Karteziyen düzlem :  $R^2 = R \times R$  Burada her  $P$  noktası  $\langle a, b \rangle$  ikili elemanlarından meydana gelmiştir.



Örnek 1.12  $A = \{1,2,3\}$  ve  $B = \{a, b\}$  olsun. O zaman

$$A \times B = \{ \{1, a\}, \{1, b\}, \{2, a\}, \{2, b\}, \{3, a\}, \{3, b\} \}$$

Not :  $\langle a, b \rangle$  «Sıralı ikili» tanımını tam olarak şöyle tanımlar :  $\langle a, b \rangle = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$ .

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \text{ dir } a = c \text{ ve } b = d \text{ ise}$$

Çarpım kümesi kavramı sonlu sayıda kümelerin tabii şekilde çarpımlarından yani  $A_1, A_2, \dots, A_n$  kümelerinin çarpımı, elemanları  $\forall_i$  için  $a_i \in A_i$  olacak şekilde  $n$  taneli sıralılardan oluşan  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  olan kümedir.  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  veya  $\prod_{i=1}^n A_i$  şeklinde gösterilir.

### Bağıntılar

Bir ikili bağıntı (ya da yalnızca bağıntı)  $R$ , bir  $A$  kümesinden bir  $B$  kümesine, şöyle tanımlanır :  $A \times B$  kümesi içinde her  $\langle a, b \rangle$  çifti için tam olarak aşağıdaki anlamı veren bir bağıntıdır.

(i) «a, b ile ilgilidir»  $a R b$  yazılır.

(ii) «a, b ile ilgili değildir»  $a R b$  yazılır.

Bir A kümesinden gene bir A kümesine olan bağıntı A içinde bir bağıntı olarak isimlendirilir.

Örnek 1.13 Bir kümeler sınıfı için kümelerin birbirinin içinde olması bir bağıntıdır. Her A ve B kümesi için ya  $A \subset B$  yada  $A \not\subset B$  dir.

Şunu işaretliyelim ki bir A kümesinden bir B kümesine olan bir R bağıntısı tek türlü olarak tanımlanmış bir  $A \times B$  kümesinin bir  $R^*$  alt kümesidir.

$$R^* = \{ \langle a, b \rangle : a R b \}$$

Diğer taraftan  $A \times B$  nin herhangi bir  $R^*$  alt kümesi A dan B ve aşağıdaki gibi bir R bağıntısını verir:

$$a R b \text{ ancak ve ancak } \langle a, b \rangle \in R^*$$

**TANIM:** A dan B ye olan bir R bağıntısı  $A \times B$  nin birinin bir alt kümesidir. A dan B ye olan bir R bağıntısının tanım bölgesi R deki ikililerin ilk koordinatıdır. değer bölgesi de R deki ikililerin ikinci koordinatıdır.

$$R \text{ in tanım bölgesi} = \{ a : \langle a, b \rangle \in R \}$$

$$R \text{ in değer bölgesi} = \{ b : \langle a, b \rangle \in R \}$$

R in **İnvers**i (tersi)  $R^{-1}$  ile gösterilir ve B den A ya tanımlanan bir bağıntıdır:

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle : \langle a, b \rangle \in R \}$$

$R^{-1}$  in ikilideki ikililerin yer değiştirmesi ile elde edildiğine işaret edelim.

Örnek. 1.4.  $R = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$  bağıntısı  $A = \{1,2,3\}$  kümesinde tanımlanmış olsun.

R in tanım bölgesi =  $\{1,2\}$

R in değer bölgesi =  $\{2,3\}$  ve

$$R^{-1} = \{ \{2,1\}, \{3,1\}, \{3,2\} \}$$

Herhangibir A kümesindeki **identik bağıntı** diye  $A \times A$  daki eşit koordinatlardan oluşan ikiliye denir ve  $\Delta$  yada  $\Delta_A$  diye gösterilir.

$$\Delta_A = \{ \langle a, a \rangle : a \in A \}$$

Identik bağıntıya  $A \times A$  nın **diyagonalı** ismi de verilir.

### Özdeşlik Bağıntıları

Bir A kümesindeki bir R bağıntısı yani bir R alt kümesi eğer aşağıdaki aksiyomları gerçeklerse **Özdeşlik Bağıntısı** olarak isimlendirilir :

$$[\text{Ö}_1] \quad \forall a \in A \quad \langle a, a \rangle \in R$$

$$[\text{Ö}_2] \quad \text{eğer } \langle a, b \rangle \in R \text{ ise o zaman } \langle b, a \rangle \in R \text{ dir.}$$

$$[\text{Ö}_3] \quad \text{eğer } \langle a, b \rangle \in R \text{ ve } \langle b, c \rangle \in R \text{ ise o zaman } \langle a, c \rangle \in R \text{ dir.}$$

**Örnek. 1.15.** « $\subset$ » iç içe olma bağıntısını ele alalım. Her A kümesi için  $A \subset A$  olduğundan  $\subset$  refleksiv ve transitivdir:  $A \subset B$  ve  $B \subset C$  o zaman  $A \subset C$ . Fakat diğer taraftan  $A \subset B$  ve  $A \neq B \Rightarrow B \not\subset A$  olur. Bu da bize  $\subset$  nin simetrik olmadığını gösterir. O halde bir özdeşlik bağıntısı değildir.

**Örnek 1.16.** Öklid geometrisinde üçgenlerin benzerliği bir özdeşlik bağıntısıdır. Eğer  $\alpha, \beta, \gamma$  üç üçgen ise (i)  $\alpha$  kendisine benzerdir. (ii)  $\alpha, \beta$  ya benzerse  $\beta$  da  $\alpha$  ya benzerdir. (iii)  $\alpha, \beta$  ya benzer  $\beta$  da  $\gamma$  ya benzerse,  $\alpha$  da  $\gamma$  ya benzerdir.

Eğer  $R$ ,  $A$  da bir özdeşlik bağıntısı ise herhangi bir  $a \in A$  elemanının özdeşlik sınıfı  $[a]$  ile gösterilir  $a$  ile bağıntılı olan bütün elemanların kümesidir.

$$[a] = \{x : \langle a, x \rangle \in R\}$$

$A$  nın özdeşlik sınıflarının koleksiyonu  $A/R$  diye gösterilir ve  $R$  tarafından  $A$  nın bölümü diye gösterilir.

$$A/R = \{ [a] : a \in A \}$$

**TEOREM 1.4.**  $R$ ,  $A$  kümesinde bir özdeşlik bağıntısı olsun, ve  $[a]$   $a \in A$  olmak üzere özdeşlik sınıfı olsun. O zaman

- (i)  $\forall a \in A$  için  $a \in [a]$
- (ii)  $[a] = [b]$  dir, ancak ve ancak  $\langle a, b \rangle \in R$
- (iii)  $[a] \neq [b]$  ise  $[a]$  ve  $[b]$  ayrıktyrlar.

**İspat:** (i)  $R$  refleksiv olduğundan  $\langle a, a \rangle \in R$  dir. Bu  $\forall a \in A$  için vardır. O halde  $a \in [a]$  dir.

(ii)  $[a] = [b]$  için  $[a] \subset [b]$  ve  $[b] \subset [a]$  göstermeliyim.

$\langle a, b \rangle \in R$  olsun. Ve diyelim ki  $x \in [b]$ . O zaman

$\langle b, x \rangle \in R$  transitivlik özelliğinden  $\langle a, b \rangle \in R$  ve

$\langle b, x \rangle \in R$  den  $\langle a, x \rangle \in R$  olur.

Böylece  $x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a]$  çıkar. Aynı işlem ispatın diğer kısmı için de tekrarlanır.

(iii)  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$  ise o zaman  $[a] = [b]$  olur. Diyelim ki öyle olsun. O zaman  $\exists x \in A$  için  $x \in [a] \cap [b]$  dir. O zaman  $\langle a, x \rangle \in R$ ,  $\langle b, x \rangle \in R$  simetri özelliğinden  $\langle x, b \rangle \in R \Rightarrow$  transitivikten  $\langle a, b \rangle \in R$  (ii) den  $[a] = [b]$  bulunur.

$A$  nın boş olmayan alt kümelerinden meydana gelen bir  $\mathcal{A}$  sınıfına  $A$  nın bir **parçalanışı** denir, ancak ve ancak aşağıda vereceğimiz iki şartı gerçeklerse. :

- (1)  $\forall a \in A$   $A$  nın herhangi bir elemanına ait ise.
- (2)  $A$  nın elemanları ikişer ikişer ayrık ise.

Bu tanımları, özdeşlik bağıntılarının temel teoremi olan şu Teoremle ifade edebiliriz.

**TEOREM 1.5**  $R, A$  da bir özdeşlik bağıntısı olsun. O zaman  $A/R$  bölüm kümesi  $A$  nın bir parçalanışdır.

### Bağıntıların Birleşimi

$U, A$  dan  $B$  ye bir bağıntı.,  $V$  de  $B$  den  $C$  ye bir bağıntı olsun.  $U \subset A \times B$  ve  $V \subset B \times C$  dir. O zaman  $A$  dan  $C$  ye bir bağıntı bulunabilir ki bu bütün  $\langle a, c \rangle \in A \times C$  şeklindeki ikili elemanları içerir., yani bazı  $b \in B$  için

$$\langle a, b \rangle \in U \text{ ve } \langle b, c \rangle \in V$$

olur.  $U$  ve  $V$  nin bileşimi olarak isimlendirilir ve  $V \circ U$  olarak gösterilir. O halde şunu yazabiliriz :

$$V \circ U = \{ \langle x, y \rangle : x \in A, y \in C, \exists b \in B : \langle x, b \rangle \in U, \langle b, y \rangle \in V \}$$

Örnek 1.17.  $R$  de  $U$  ve  $V$  şöyle tanımlanmış iki fonksiyon olsunlar :

$$U = \{ \langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1 \} \quad V = \{ \langle y, z \rangle : 2y + 3z = 4 \}$$

O zaman  $V \circ U$  bağıntısı bu iki eşitlikte  $y$  yi elemine edilerek bulunur:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ ve } 2y + 3z = 4$$

$$V \circ U = \{ \langle x, z \rangle : 4x^2 + 9z^2 - 24z + 12 = 0 \}$$

Örnek 1.18.  $N$  pozitif tam sayıları gösterebiliriz ve  $R$  de  $N$  deki  $<$  bağıntısını gösterebiliriz. Yani eğer  $a < b$  ise  $<a,b> \in R$  olsun ve eğer  $a > b$  ise  $<a,b> \in R^{-1}$  olsun.

$$\begin{aligned}
 R \circ R^{-1} &= \{ \langle x,y \rangle : x,y \in N., \exists b \in N : \\
 &\quad \langle x,b \rangle \in R^{-1}, \langle b,y \rangle \in R \} \\
 &= \{ \langle x,y \rangle : x,y \in N., \exists b \in N : b < x, b < y \} \\
 &= (N \setminus \{1\}) \times (N \setminus \{1\}) = \{ \langle x,y \rangle : x,y \in N., x,y \neq 1 \} \\
 R^{-1} \circ R &= \{ \langle x,y \rangle : x,y \in N., \exists b \in N : \langle x,b \rangle \in R, \\
 &\quad \langle b,y \rangle \in R^{-1} \} \\
 &= \{ \langle x,y \rangle : x,y \in N., \exists b \in N : b > x, b > y \} \\
 &= N \times N
 \end{aligned}$$

Şuna işaret edelim ki  $R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$  dir.





## 2. FONKSİYONLAR

### Fonksiyonlar

Bir  $A$  kümesinin her bir elemanına bir  $B$  kümesinin bir ve bir tek elemanını karşılık verdiğimiz düşünerek bu tip işaretlemelerin tümü olan  $f$  ye  $A$  dan  $B$  içine bir fonksiyon denir ve

$$f : A \rightarrow B \text{ veya } A \xrightarrow{f} B$$

yazılır.  $a \in A$  nın  $f$  yardımıyla tanımladığı  $B$  deki biricik elemanı  $f(a)$  ile gösterilir ve  $f$  nin  $a$  daki değeri ya da  $f$  ye göre  $a$  nın imajı denir.  $f$  nin tanım bölgesi  $A$  ve değer bölgesi  $B$  dir.

Her bir  $f : A \rightarrow B$  fonksiyonu için  $A \times B$  de şöyle bir bağıntı verilmiş demektir.

$$\{ \langle a, f(a) \rangle : a \in A \}$$

Bu kümeye  $f$  nin Grafiği deriz.  $f[A]$  ile gösterilen ifadeye  $f$  nin değer bölgesi denir.

$$f[A] = \{ f[a] : a \in A \}$$

$f : A \rightarrow B$  ve  $g : A \rightarrow B$  tanımlanmış olan iki fonksiyona ancak ve ancak  $a \in A$  için  $f(a) = g(a)$  ise eşittir denir ve  $f = g$  yazılır, yani her ikisi de aynı grafiğe sahip iseler birbirlerine eşittirler.

Buna göre fonksiyonla bunun grafiği arasında bir ayırma yapamayız.

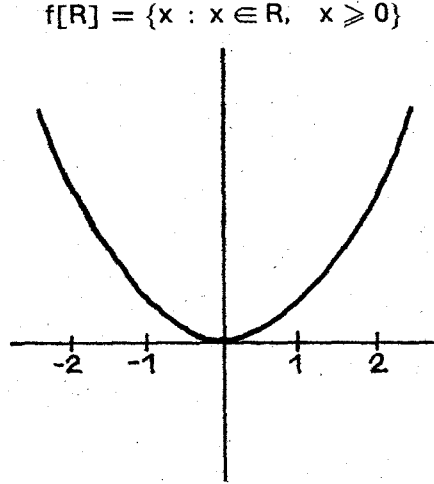
$A \times B$  nin bir  $f$  alt kümesi yani  $A$  dan  $B$  ye bir bağıntı aşağıda vereceğimiz özelliğe sahip ise fonksiyon olur.

[F]  $\forall a \in A$  noktası  $f$  içinde yalnız ve yalnızca bir tane  $\langle a, b \rangle$  ikilisinin ilk koordinatı olarak ortaya çıkar.

$f = g$  nin negatifi  $f \neq g$  dir:  $\exists a \in A$   $f(a) \neq g(a)$

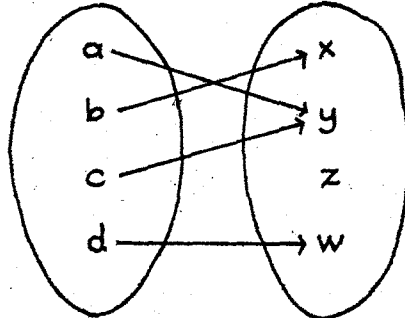
Örnek 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  her reel sayı onun karesini isabet ettiren bir fonksiyon olsun  $\forall x \in \mathbb{R}$   $f(x) = x^2$   $f$  burada reel-değerli fonksiyondur.

grafiği :  $\{ \langle x, x^2 \rangle : x \in \mathbb{R} \}$  Şekil 2.1.



$f$  nin değer bölgesi negatif olmayan reel sayılardır.

Örnek2.  $A = \{a, b, c, d\}$  ve  $B = \{x, y, z, w\}$  olsun. Şekil 2.2



Şekil 2.2

Şekil 2.2. A dan B ye bir f fonksiyonu tanımlar. Burada

$$f[A] = \{x, y, w\} \quad f \text{ nin grafiği şu bağıntıdır.}$$

$$\{ \langle a, y \rangle, \langle b, x \rangle, \langle c, y \rangle, \langle d, w \rangle \}$$

Örnek 3. Bir  $f: A \rightarrow B$  fonksiyonuna sabit fonksiyon denir. Eğer  $\forall a \in A$  için  $f(a) = b_0$  eşitliğini sağlayacak herhangi bir  $b_0 \in B$  elemanı bulunabiliyor ise. Böylece herhangi bir sabit f fonksiyonunun  $f[A]$  değer bölgesi bir tek noktadan ibaret olur.

$$f[A] = \{b_0\}$$

Şimdi  $f: A \rightarrow B$  ve  $g: B \rightarrow C$  fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

A dan C ye giden fonksiyon A daki bir  $a \in A$  elemanını C de  $g(f(a))$  ya götürür f ve g nin bileşimi yada kompozisyonu diye isimlendirilir. ve  $g \circ f$  olarak yazılır. Tanımdan

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \text{ dir.}$$

Şunuda işaret edelim ki eğer biz  $f \subset A \times B$  ve  $g \subset B \times C$  yi birer bağıntı olarak bakarsak o zaman  $g \cdot f$  çarpımını tanımlayabiliriz. Hakikaten  $g \cdot f = g \circ f$  dir.

Eer  $f: X \rightarrow Y$  ve  $A \subset X$  ise, f nin A ile kısıtlanması  $f/A$  ile gösterilen ve A dan Y ye şöyle tanımlanan bir fonksiyondur:

$\forall a \in A$  için  $f/A(a) = f \cap (A \times Y)$  dir. Diğer taraftan, eğer  $f: X \rightarrow Y$ ,  $X \subset X^*$  bölgesinde  $g: X^* \rightarrow Y$  gibi bir fonksiyonun kısıtlanması ise o zaman g ye f nin bir genişletilmiş denir.

**BİRE - BİR, ÜZERİNE, TERS VE ÖZDEŞ FONKSİYONLAR**

Bir  $f : A \rightarrow B$  fonksiyonuna **bire-bir (1-1)** dir denir, eğer ayrı değer bölgesi elemanlarına A nın ayrı elemanları karşılık geliyorsa yani eğer

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a' \text{ ise}$$

Bir  $f : A \rightarrow B$  fonksiyonuna **üzerine** (ya da  $f, A$  dan  $B$  üzerine bir fonksiyon; ya da  $f, A$  dan  $B$  üzerine) bir tasvirdir denir, eğer  $\forall b \in B$  bir  $a \in A$  nın tasviri ise yani

$$b \in B \Rightarrow \exists a \in A : f(a) = b$$

$f$  üzerine bir fonksiyon ise  $f[A] = B$  dir.

Genelde bir  $f \subset A \times B$  fonksiyonunu  $f^{-1}$  **TERSİ** gene bir fonksiyon olma zorunda değildir. Fakat  $f$  fonksiyonu 1-1 ve üzerine bir fonksiyon ise o zaman  $f^{-1}$  de  $B \rightarrow A$  ya bir fonksiyondur ve **Ters** fonksiyon diye isimlendirilir.

$\Delta_A \subset A \times A$   $A$  üzerinde **Özdeş** fonksiyon denen bir fonksiyondur.  $1_A$  ya da  $1$  olarak da gösterilir.  $\forall a \in A$  için  $1_A(a) = a$  dir. Açık olarak şöyle diyebiliriz: Eğer  $f : A \rightarrow B$  o zaman

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

Bundan başka  $f$  fonksiyonu 1-1 ve üzerine ise o zaman  $f^{-1}$  ters fonksiyonuna da sahiptir ve

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ ve } f \circ f^{-1} = 1_B$$

Bunun sonucu olarak şu önermeyi yapabiliriz.

$f : A \rightarrow B$  ve  $g : B \rightarrow A$  olan fonksiyonlar

$$g \circ f = 1_A \text{ } f \circ g = 1_B$$

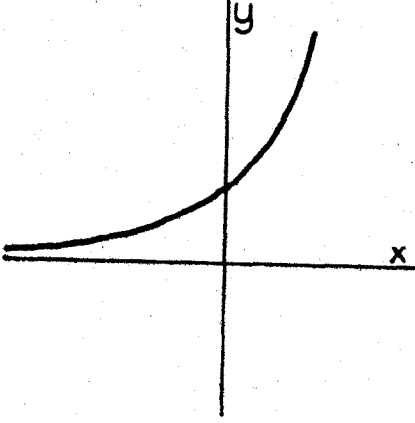
sağlıyorsa

$f^{-1} : B \rightarrow A$  vardır ve  $g = f^{-1}$  dir.

Örnek :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

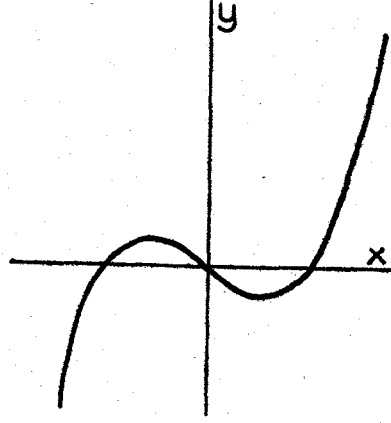
$$f(x) = e^x \quad g(x) = x^3 - x \quad h(x) = x^2$$

olarak tanımlanmış olsun.



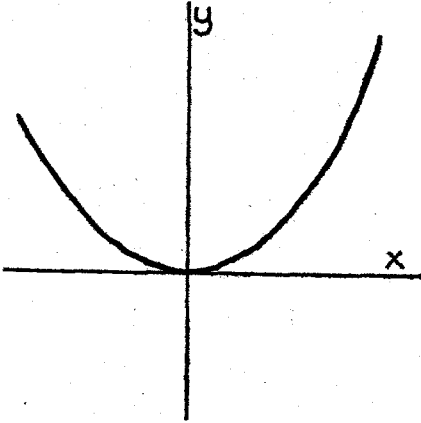
$$f(x) = e^x$$

1-1 dir. Geometrik olarak her yatay çizgi  $f$  nin bir noktadan daha fazla noktasıyla çıkamaz.



$$g(x) = x^3 - x$$

Üzerindedir geometrik olarak her yatay çizgi en azından  $g$  nin bir noktasını içine alır.



$$h(x) = x^2$$

Ne bire birdir ne de üzerindedir.

$$h(2) = h(-2) = 4$$

$h[\mathbb{R}]$   $\mathbb{R}$  in mutlak alt kümesidir:

$$-16 \notin h[\mathbb{R}]$$

## SIRALAMA KÜMELERİ, KARTEZYEN ÇARPIMLAR

Kümelerin sıralama sınıfı

$$\{A_i : i \in I\} \quad \{A_i\}_{i \in I} \quad \text{ya da basitçe} \quad \{A_i\} \quad \text{diye}$$

gösterilen ifade bir  $I$  kümesinden kümeler sınıfına olan bir tasvir fonksiyonudur.  $i \in I$  sıralama kümesi denir  $A_i$  lere sıralanmış kümeler denir.  $\forall i \in I$  ya da bir sıra denir. Eğer  $I$  sıra kümesi pozitif tam sayılardan oluşmuşsa sıralanmış  $\{A_1, A_2, \dots\}$  sınıfına da bir kümeler dizisi denir.

Örnek  $\forall n \in \mathbb{N}$  pozitif tamsayısı için

$$D_n = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ n'nin katları olsun.}\} \quad \text{O zaman}$$

$D_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$   $D_2 = \{2, 4, 6, \dots\}$   $D_3 = \{3, 6, 9, \dots\}$  İndislenmiş bir kümeler sınıfının  $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$  kartezyen çarpımı

$$\prod \{A_i : i \in I\} \quad \text{veya} \quad \prod_{i \in I} A_i \quad \text{veya yalnızca} \quad \prod_i A_i$$

ile gösterilen bütün  $p: I \rightarrow \bigcup_i A_i$  fonksiyonlarıdır; Öyle ki  $p(i) = a_i \in A_i$  dir. Kartezyen çarpımının böyle bir elemanına  $p = \langle a_i : i \in I \rangle$  deriz. Her  $i_0 \in I$  için bir  $\Pi_{i_0}$  fonksiyonu vardır. ki bu  $i_0$  rıncı iz düşüm fonksiyonu olarak isimlendirilir.  $\prod_i A_i$  çarpım kümesinden  $A_{i_0}$  koordinat kümesine tanımlanmış olan

$$\Pi_{i_0} (\langle a_i : i \in I \rangle) = a_{i_0}$$

fonksiyonudur.

Örnek :  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   $p = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  reel sayılardan meydana gelmiştir.  $R_1, R_2, R_3$ ;  $\mathbb{R}$  in kopyaları olsun. O zaman  $p$  ye fonksiyon gözüyle bırakılabilir.  $I = (1, 2, 3)$   $p(1) = a_1 \in R_1$  ;  $p(2) = a_2 \in R_2$   $p(3) = a_3 \in R_3$  diğer bir deyimle

$$\mathbb{R}^3 = \prod \{R_i : i \in I, R_i = \mathbb{R}\}$$

### İşlemlerin Genelleştirilmesi

Bileşim ve kesişim kavramları orijinalde iki küme için tanımlanmıştır. Fakat  $U$  evrensel kümesinin  $\mathcal{A}$  alt kümeler sınıfı için genelleştirilebilirler.

$$\bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\} = \{x : x \in U, \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

$$\bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\} = \{x : x \in U, \forall A \in \mathcal{A} \text{ için, } x \in A\} \text{ dir.}$$

$U$  nun alt kümelerinden ibaret  $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$  sıralanmış kümeyi

$$\bigcup \{A_i : i \in I\} \text{ ya da } \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ya da } \bigcup_i A_i$$

şeklinde de toplamlarını ve kesişimlerini

$$\bigcap \{A_i : i \in I\} \text{ ya da } \bigcap_{i \in I} A_i \text{ ya da } \bigcap_i A_i$$

de gösterebiliriz. Tabii şöyle de yazabiliriz.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots; \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

zaman

Örnek 1 :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad D_n = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ } x, n \text{ nin katları olsun.}\}$  O zaman

$$\bigcup \{D_i : i \geq 10\} = \{10, 11, 12, \dots\} \text{ ve } \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = \emptyset$$

Örnek 2 :  $I = [0,1]$  ve  $\forall i \in I \quad A_i = [0,i]$  olsun. O zaman

$$\bigcup_i A_i = [0,1] \text{ ve } \bigcap_i A_i = \{0\}$$

TEOREM : 2.1  $\mathcal{A} = \{A_i\}$  ve  $B$  herhangi bir küme ise

$$(i) \quad B \cup (\bigcap_i A_i) = \bigcap_i (B \cup A_i)$$

$$(ii) \quad B \cap (\bigcup_i A_i) = \bigcup_i (B \cap A_i)$$

dir.

TEOREM 2.2:  $\mathcal{A} = \{A_i\}$   $U$  nun alt kümeler sınıfı olsun. O zaman

$$(i) \quad (U_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$$

$$(ii) \quad (\cap_i A_i)^c = U_i A_i^c$$

TEOREM 2.3: A herhangi bir küme,  $\forall p \in A \quad G_p \subset A : p \in G_p \subset A$  o zaman

$$A = U \{G_p : p \in A\}$$

**İspat :**  $x \in U \{G_p : p \in A\}$  olsun. O zaman  $\exists p_0 \in A : x \in G_{p_0} \subset A$  o halde  $x \in A$  dir. Böylece  $U \{G_p : p \in A\} \subset A$  dir.  $y \in A$  olsun. O zaman  $y \in G_p$  olur. Böylece  $y \in U \{G_p : p \in A\}$  böylece  $A \subset U \{G_p : p \in A\}$  öyleyse bu iki küme birbirine eşittir.

### Küme Fonksiyonları ile ilgili Teoremler :

$f : X \rightarrow Y$  olsun. X in bir A alt kümesinin tasviri  $f[A]$  A nin noktalarının tasviridir. Yani  $B \subset Y$  olsun.

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}$$

$$f^{-1}[B] = \{x : x \in X, f(x) \in B\}$$

Örnek :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$  olarak tanımlanmış olsun. O zaman

$$f[\{1, 3, 4, 7\}] = \{1, 9, 16, 49\}, \quad f[(1,2)] = (1,4)$$

$$f^{-1}[\{4,9\}] = \{-3, -2, 2, 3\}, \quad f^{-1}[(1,4)] = (1,2) \cup (-2, -1)$$

$f : X \rightarrow Y \quad \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  ile gösterilen fonksiyon ve  $f^{-1}$

$\mathcal{P}^{-1}(Y) \rightarrow \mathcal{P}^{-1}(X)$  ile gösterilen fonksiyon ise, f ve  $f^{-1}$  e

Küme fonksiyonları denir.  $f^{-1}$  genellikle ilgili küme fonksiyonunun tersi olamaz.

$$f^{-1} \circ f[(1,2)] = f^{-1}[(1,4)] = (1,2) \cup (-2, -1).$$



TEOREM 2.4:  $f: X \rightarrow Y$  olsun. O zaman  $A, B \subset X$  herhangi iki alt küme ise

$$(i) \quad f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$$

$$(ii) \quad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$$

$$(iii) \quad f[A \setminus B] \supset f[A] \setminus f[B]$$

$$(iv) \quad A \subset B \Rightarrow f[A] \subset f[B]$$

ve daha genel olarak  $\{A_i\} \subset X$  indekslenmiş kümeleri için

$$(i)' \quad f[\cup_i A_i] = \cup_i f[A_i] \quad (ii)' \quad f[\cap_i A_i] \subset \cap_i f[A_i]$$

İspat (i) yapalım :

Önce  $f[A \cup B] \subset f[A] \cup f[B]$  gösterelim.

$y \in f[A \cup B]$  olsun. O halde  $\exists x \in A \cup B$  vardır ki:

$f(x) = y$  dir.  $x \in A$  ya da  $x \in B$  dir.

$x \in A$  ise  $f(x) = y \in f[A]$

$x \in B$  ise  $f(x) = y \in f[B]$

her iki durumda da  $y \in f[A] \cup f[B]$  dir.

$$\Rightarrow f[A \cup B] \subset f[A] \cup f[B]$$

tersini gösterelim:  $y \in f[A] \cup f[B]$  olsun. Yani  $y \in f[A]$  yada  $y \in f[B]$

$y \in f[A] \rightarrow \exists x \in A : f[x] = y$

$y \in f[B] \rightarrow \exists x \in B : f[x] = y$  her iki halde de

$y = f(x) \quad x \in A \cup B$  yani  $y \in f[A \cup B]$

$$f[A] \cup f[B] \subset f[A \cup B]$$

$$\Rightarrow f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$$

$$(iii) \text{ nin ispatı : } f[A] \setminus f[B] \subset f[A \setminus B]$$

$y \in f[A] \setminus f[B]$  olsun.  $\exists x \in A : f(x) = y$  fakat

$$y \notin \{f(x) : x \in B\} \Rightarrow x \notin B \text{ veya } x \in A \setminus B \Rightarrow y \in f[A \setminus B]$$

Örnek :  $A = [1, 2] \times [1, 2]$  ve  $B = [1, 2] \times [3, 4]$

$\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  birinci koordinat kümesi olsun.

$$\Pi[A] = [1, 2], \quad \Pi[B] = [1, 2] \quad A \cap B = \emptyset$$

$$\Pi[A \cap B] = \emptyset \quad \text{Buradan}$$

$$\Pi[A] \cap \Pi[B] = [1, 2] \neq \Pi[A \cap B] = \emptyset$$

Bundan başka  $A \setminus B = A$

$$\Pi[A \setminus B] = [1, 2] = \emptyset = \Pi[A] \setminus \Pi[B]$$

TEOREM 2.5.  $f: X \rightarrow Y$  olsun.  $A, B \subset Y$  olsun.

$$(i) \quad f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$

$$(ii) \quad f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

$$(iii) \quad f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$$

$$(iv) \quad A \subset B \Rightarrow f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B]$$

$$(ii) \quad f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \quad \text{yi ispatlıyalım}$$

$$(ii) \quad a) \quad x \in f^{-1}[A \cap B] \text{ olsun.}$$

$$f(x) \in A \cap B$$

$f(x) \in A$  ve aynı anda  $f(x) \in B$

$x \in f^{-1}[A]$  ve aynı anda  $x \in f^{-1}[B]$

$x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$  çıkar.

b)  $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$  olsun.

$x \in f^{-1}[A]$  ve aynı anda  $x \in f^{-1}[B]$

$f(x) \in A$  ve aynı anda  $f(x) \in B$

$f(x) \in A \cap B$

$x \in f^{-1}[A \cap B]$  çıkar.

(iii)  $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$  yi ispatlıyalım

a)  $x \in f^{-1}[A \setminus B] \Rightarrow f(x) \in A \setminus B \Rightarrow f(x) \in A$  ve aynı anda

$f(x) \notin B \Rightarrow x \in f^{-1}[A]$  ve aynı anda  $x \notin f^{-1}[B]$

$x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$  olur.

b)  $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B] \Rightarrow x \in f^{-1}[A]; \quad x \notin f^{-1}[B]$

$f(x) \in A, f(x) \notin B \Rightarrow f(x) \in [A \setminus B]$

$x \in f^{-1}[A \setminus B]$

ve daha genel olarak

$$(ii)' \quad f^{-1}[\cup_i A_i] = \cup_i f^{-1}[A_i]$$

$$(iii)' \quad f^{-1}[\cap_i A_i] = \cap_i f^{-1}[A_i]$$

$$f : X \rightarrow Y \quad A \subset Y \text{ ise } f^{-1}[A^c] = (f^{-1}(A))^c$$

### Reel Değerli Fonksiyonların Cebri

$(X, R)$  Herhangi bir  $X$  kümesinden  $R$  üzerine tanımlanmış reel değerli fonksiyonlar olsun.

$f : X \rightarrow R$   $g : X \rightarrow R$   $k \in R$  reel sayı olmak üzere aşağıdaki tanımları verebiliriz.

$$(f + g) : X \rightarrow R, (f + g)(x) \equiv f(x) + g(x)$$

$$(k \cdot f) : X \rightarrow R \quad (k \cdot f)(x) \equiv k(f(x))$$

$$(|f|) : X \rightarrow R \quad (f + k)(x) \equiv f(x) + k \text{ olur.}$$

$$(f \cdot g) : X \rightarrow R \quad (f \cdot g)(x) \equiv f(x) \cdot g(x)$$

$k \in R$  reel sayısının  $f(x) = k$  sabit fonksiyonuna idantik olarak düşünmek çoğu zaman uygun olur. O zaman

$$(f + k)(x) \equiv f(x) + k \text{ olur.}$$

$(fg) : X \rightarrow R$  daha önce söylediğimiz gibi fonksiyonların bileşimleri değildir.

$$\text{Örnek: } f = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle \} \quad g = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, -1 \rangle \}$$

tanım bölgesi  $X = \{a, b\}$

$$(3f - 2g)(a) \equiv 3f(a) - 2g(a) \equiv 3(1) - 2(2) = -1$$

$$(3f - 2g)(b) \equiv 3f(b) - 2g(b) \equiv 3(3) - 2(-1) = 11$$

yani  $3f - 2g = \{ \langle a, -1 \rangle, \langle b, 11 \rangle \}$  dir.

**TEOREM 2.7.**  $F(X, R)$  ile boş olmayan bir  $X$  kümesinden  $R$  ye tanımlanmış bütün reel değerli fonksiyonları gözönüne alalım. Aşağıda vereceğimiz aksiyomlar gerçekleştiği takdirde bu fonksiyonların koleksiyonu bir reel Lineer Vektör Uzayı meydana getirirler.

[V<sub>1</sub>]  $f$  ve  $g$  ve  $h$  fonksiyonlar olmak üzere

1.  $(f + g) + h = f + (g + h)$

2.  $f + g = g + f$

3.  $\exists 0 \in \mathcal{F}(X, R)$  yani  $0: X \rightarrow R$  tasvir fonksiyonu vardır.

Öyleki  $f + 0 = f$

4.  $\forall f \in \mathcal{F}(X, R), \exists -f \in \mathcal{F}(X, R)$  yani  $-f: X \rightarrow R$ :

$$f + (-f) = 0$$

[V<sub>2</sub>]  $k, k'$  reel sayılar olmak üzere

1.  $k \cdot (k' \cdot f) = (kk') \cdot f$

2.  $1 \cdot f = f$

[V<sub>3</sub>] 1.  $k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$

2.  $(k + k') \cdot f = k \cdot f + k' \cdot f$



### 3. SAYILABİLİRLİK ve SIRA

#### Özdeş Kümeler

A ve B iki küme olsunlar. 1-1 ve üzerine olacak biçimde bir f fonksiyonu  $f: A \rightarrow B$  bulunabiliyorsa A kümesi B kümesine özdeşir denir ve  $A \sim B$  yazılır. f fonksiyonuna da A ve B kümeleri arasında 1-1 bir uyum sağlıyor denir.

Bir küme boş ise ya da  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesine özdeş ise bu kümeye **sonlu** dur denir. Aksi halde kümeye **sonsuzdur** denir. Sonlu kümeler eş sayılı elemanlara sahip iseler **özdeşirler**.

Örnek 3.1.  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$   $E = \{2, 4, 6, \dots\}$   $f: N \rightarrow E$

$f(x) = 2x$  fonksiyonu 1-1 ve üzerinedir. O halde  $N \sim E$  dir.

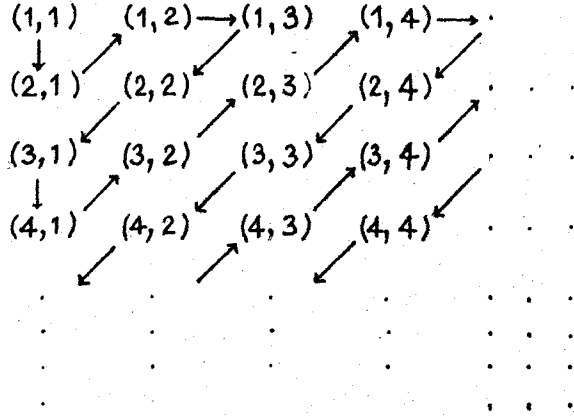
Örnek 3.2.  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \frac{x}{(1 - |x|)}$  1-1 ve üzerine

Bu fonksiyonla  $(-1, 1)$  aralığı  $\mathbb{R}$  reel sayılar cümlesine özdeşir. Burada şunu da işaretliyelim ki bir sonsuz küme kendi has alt kümesine özdeş olabilir.

#### Numarandırılabilir ve Sayılabilir Kümeler

N pozitif tam sayıları gösteren küme olsun:  $\{1, 2, 3, \dots\}$  Bir X kümesi N'e özdeş ise bu X kümesine numarandırılabilir denir ve  $\sim$  (aleph-null) kardinal sayısına sahiptir denir. Bir A kümesi sonlu ya da numarandırılabilir ise, bu A kümesine sayılabilir denir.

## Örnek 3.3.



Bu çarpım kümesinin  $(1,1), (2,1), (1,2), (1,3), (2,2), \dots$  diye oklarla gösterdiğimiz şekilde dizsek  $N \times N$  kümesinin numaralanabilir olduğunu görürüz.

Örnek 3.4  $M = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$  şimdi her pozitif  $a \in \mathbb{N}$  için sayısı tektürlü olarak  $a = 2^r (2s + 1)$   $r, s \in \mathbb{N}$  olmak üzere yazılabilir.  $f: \mathbb{N} \rightarrow M \times M$  fonksiyonunu  $f(a) = \langle r, s \rangle$  tanımlamış olur.  $f$  1-1 ve üzerinedir. O halde  $M \times M$  numaralanabilir ve  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset M \times M$  dir.

**TEOREM 3.1** Her sonsuz kümenin sayılabilir bir alt kümesi vardır.

**İspat:**  $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X$  bir seçim fonksiyonu olsun.  $X$  in her boş olmayan  $A$  alt kümesi için  $f(A) \in A$  dir. (Seçim aksiyomundan dolayı böyle bir fonksiyon vardır. Şöyle bir diziyi göz önüne alalım.

$$a_1 = f(X)$$

$$a_2 = f(X \setminus \{a_1\})$$

$$a_3 = f(X \setminus \{a_1, a_2\}) -$$

.....



$$a_n = f(X \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\})$$

$X$  sonsuz olduğundan herhangi bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $X \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  boş değildir. Bundan başka  $f$  bir seçim fonksiyonu olduğundan

$$a_i \neq a_j \quad \text{dir} \quad i < j \text{ kaldıkça}$$

ve  $D = \{a_1, a_2, \dots\}$  gibi  $X$  in numaralandırılabilir bir alt kümesi vardır.

Bunun sonucu olarak şu teoremi söyleyebiliriz.

**TEOREM 3.2.** Sayılabilir bir kümenin her alt kümesi sayılabilirdir.

**İspat :**  $X$  sayılabilir ise ya sonludur ya da numaralandırılabilir. Her iki halde de alt kümeleri sayılabilirdir.

**Lemma 3.1**  $\{A_1, A_2, \dots\}$  birbirinden ayrıklı numaralanabilir kümelerin sınıfı olsun. O zaman  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  de numaralanabilir.

$$\text{İspat : } A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$$

.....

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$$

olsun.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\} \quad f : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

fonsiyonu 1-1 ve üzerinedir.  $f(a_{ij}) = (i, j)$

O halde  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  numaralandırılabilir olduğu için  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  de numaralandırılabilir.

Benzer şekilde şu teorem de ispatlanır.

**TEOREM 3.3:**  $\{A_i : i \in I\}$  sayılabilir kümelerin sayılabilir sınıfı olsun yani  $I$  sayılabilir ve her  $A_i$   $i \in I$  için sayılabilir olsun. O zaman  $\bigcup \{A_i : i \in I\}$  sayılabilirdir.

Bir cümle **sonlu** değilse ve **sayılamıyorsa sayılamıyor** veya **sıralanamıyor** denir.

### Sonsuzluk

Her sonsuz küme numaralandırılmaz. En iyi örneği şu teoremlerle verilir.

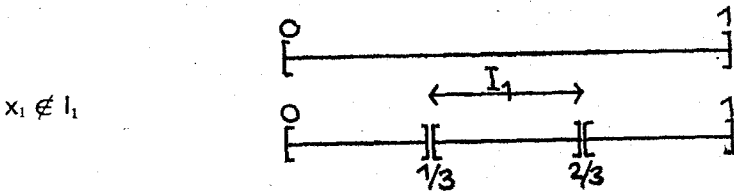
**TEOREM 3.4.**  $[0,1]$  kapalı aralığı numaralandırılmaz.

**İspat:** İki yolla çözülebilir burada sonraki derslerimizde faydalı olacağına inandığımız çözümü göstereceğiz:

$A = [0,1]$  kapalı aralığını aşağıdaki şekilde 3 kapalı aralığa bölelim. Diyelim ki  $A$  yı numaralandırdık.

$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  noktalardan meydana gelmiş olsun. Örneğin bir  $x_1$  noktası üç aralıktan üçünün birden içine giremez.

$I_1 = \{a_1, b_1\}$  bu üç aralıktan  $x_1$  ri içine almayan bir tanesi olsun.



Şimdi  $I_2$  aralığının 3 tane  $\frac{1}{9}$  uzunluğa sahip aralığa bölelim.

$$\left[ a_1, a_1 + \frac{1}{9} \right] \quad \left[ a_1 + \frac{1}{9}, a_1 + \frac{2}{9} \right] \quad \left[ a_1 + \frac{2}{9}, b_1 \right]$$

$x_2 \notin I_2$  olsun.

Buna devam ederek  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$  iç içe geçmiş aralıkları elde ediniz ki burada  $x_n \notin I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  için geçerlidir.

Şimdi iç-içe geçmiş aralıklar prensibinden dolayı hiç değilse bir  $y \in A$  reel sayısı vardır ki bu aralıkların hepsinin içinde bulunur. Diyelim ki  $m_0 \in \mathbb{N}$  için  $y = X_{m_0}$  olsun

$y \in A = \{x_1, x_2, \dots\}$ , Oysa  $y = x_{m_0} \notin I_{m_0}$  bulunuyordu.

Oysa  $y$  yi biz bütün aralıkların içinde aldık.

Çelişki! Demek ki varsayımızın tersine  $A$  numaralandırılmaz. Bir  $X$  kümesi eğer  $[0, 1]$  kapalı aralığına özdeş ise bu  $X$  kümesinin kuvveti sonsuzdur denir ya da kardinal sayısı  $C$  dir denir.

$\mathbb{R}$  reel sayılar kümesinin kardinal sayısı  $C$  dir.

### Yarı Sıralanmış Kümeler

Bir  $A$  kümesinde bir  $\leq$  bağıntısına yarı sıralama ya da (sıralama) denir, eğer her  $a, b, c \in A$ :

(i)  $a \leq a$

(ii)  $a \leq b$  ve  $b \leq a \Rightarrow a = b$  ve

(iii)  $a \leq b$ ,  $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

ise yarı sıralama ile birlikte  $A$  kümesine yarı sıralanmış küme denir.  $(A, \leq)$  refleksiv anti-simetrik ve transitiv bir bağıntıdır.

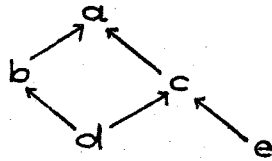
**Örnek 3.5.** (i)  $A \subset A$  (ii)  $A \subset B$  ve  $B \subset A \Rightarrow A = B$

(iii)  $A \subset B$ ,  $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

**Örnek 3.6**  $A$  her hangibir reel sayı kümesi  $x \leq y$  «tabii sıralama» dir.

**Örnek 3.7**  $X = \{a, b, c, d, e\}$

Bu şekil bir yarı sıralamayı canlandırıyor.



Bir  $A$  yarı sıralanmış kümeye, eğer  $\forall a, b \in A$  için ya  $a \leq b$  ya da  $b \leq a$  bağıntısı varsa tam sıralanmıştır denir.

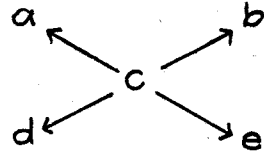
Bir  $R$  bağıntısı bir  $A$  kümesinde bir yarı sıralamayı veriyorsa  $R^{-1}$  ters bağıntısı da bir yarı sıralamadır.

### Sıralanmış Kümelerin Alt Kümeleri

$X$  yarı sıralanmış bir küme olsun.  $A \subset X$  olsun.  $A$  alt kümesinde sıralama  $X$  in sıralanmasından tabii yolla şöyle elde edilir.

$\forall a, b \in A$  elemanları  $X$  içinde ancak ve ancak  $a < b$  şeklinde yarı sıralanmış elemanlar iseler, o zaman  $A$  içinde de  $a \leq b$  yani yarı sıralanmış elemanlardır. O halde  $R$ ,  $X$  de yarı sıralama ise  $R_A = R \cap (A \times A)$   $R$  in  $A$  ya kısıtlanması denir ve  $A$  da yarı sıralamadır.  $(A, R_A)$   $(X, R)$  in yarı sıralanmış alt kümesidir. Bazı yarı sıralanmış kümelerin alt kümeleri de tam sıralanmış olabilirler. Açıkta ki tam sıralanmış kümelerin alt kümeleri tam sıralanmış olurlar.

- 1)  $\{a, c, d\}$  kümesi tam sıralanmış
- 2)  $\{b, e\}$  kümesi tam sıralanmış
- 3-  $\{a, b, c\}$  tam sıralanmış değil
- 4)  $\{d, e\}$  tam sıralanmış değil.



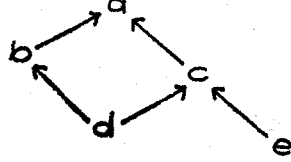
### İlk ve Son Elemanlar

$X$  sıralanmış bir küme olsun.  $a_0 \in X$ 'a ilk eleman ya da en küçük elemandır denir, ancak ve ancak  $\forall x \in X$  için  $a_0 \leq x$  var ise

Aynı şekilde bir  $b_0 \in X$ 'a  $X$  içinde en son ya da en büyük elemandır denir.  $\forall x \in X$  için ancak ve ancak  $x \leq b_0$  ise,

Örnek  $X = \{a, b, c, d, e\}$

a en büyük elemandır. Çünkü her eleman kendisinden daha öncedir. en küçük eleman yoktur. d en küçük olamaz çünkü ondan daha küçük mü büyük mü olduğunu bilmediğimiz e elemanı vardır.



**Örnek :** N pozitif tam sayılar 1 sayısının ilk elemanı olarak kabul ederler.

Z tam sayılar kümesinin ne ilk ne de son elemanı belirlidir.

### Maksimal ve Minimal Elemanlar

X sıralanmış bir küme olsun. Bir  $a_0 \in X$  elemanına **maksimal** dir denir. Ancak ve ancak  $a_0 \leq x \implies x = a_0$  ise, yani  $a_0$  kendisinden başka hiç bir eleman takip etmiyorsa Benzer şekilde bir  $b_0 \in X$  elemana **minimal** dir denir eğer  $x \leq b_0 \implies b_0 = x$  yani  $b_0$  kendisinden başka hiç bir elemanın önünde değilse.

**Örnek :** Yukarıdaki 6.1 örnek : a maximal elemandır

d ve e minimal elemandır.

**Örnek :** IR reel sayılar kümesi tabii sınırlanmasıyla tam sıralanmış bir kümedir. Fakat ne maksimal ne de minimal elemana sahiptir.)

**Örnek :**  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  sonlu tam sıralanmış bir küme olsun. O zaman A tam olarak bir max ve bir min elemana sahiptir ve

$$\min \{a_1, a_2, \dots, a_m\}; \quad \max \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

olarak isimlendirilir.

### Üst ve Alt Sınırlar

Bir A kümesi yarı sıralanmış bir X kümesinin alt kümesi olsun. Bir  $m \in X$  elemanı A'nın **alt sınırıdır** eğer  $\forall x \in A$  için  $m \leq x$  ise. Yani m A da ki her elemandan daha önce geliyorsa. Eğer A'nın bir alt sınırı A'nın diğer bütün alt sınırlarından sonra geliyor-

sa  $A$  nın en büyük alt sınırı ya da  $A$  nın infimum denir ve  $\inf(A)$  ile gösterilir.

Benzer şekilde bir  $M \in X$  elemanı  $A$  nın üst sınırıdır eğer  $\forall x \in A \quad x \leq M$  ise. Yani  $M$ ,  $A$  nın bütün elemanlarını takip eder.

Eğer  $A$  nın bir üst sınırı diğer bütün üst sınırlarından önce geliyorsa buna  $A$  nın en küçük üst sınırı ya da  $A$  nın supremum'u denir ve  $\sup(A)$  ile gösterilir.

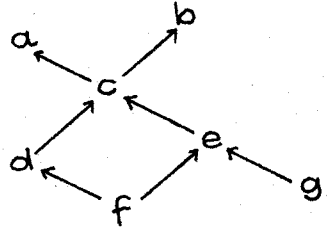
$A$  kümesine yukarıdan sınırlıdır denir eğer bir üst sınırı varsa, ve aşağıdan sınırlıdır denir eğer bir alt sınırı varsa, hem üst hem de alt sınırı varsa  $A$  ya sınırlıdır denir.

Örnek :  $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$B = \{c, d, e\}$  olsun.

$a, b$  ve  $c$   $B$  nin üst sınırıdır.

Yalnız  $f$  bir alt sınırdır.  $g$  alt sınır olamaz.



Çünkü  $d$  den  $c = \sup(B) \in B$  ve  $f = \inf(B) \notin B$  in önce gelmiyor.

Örnek :  $A$  reel sayıların sınırlı bir kümesi olsun. Reel sayıların temel teoremine göre  $\inf(A)$  ve  $\sup(A)$  vardır.

Örnek 3 :  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar cümlesinde

$$B = \{x : x \in \mathbb{Q}, x > 0, 2 < x^2 < 3\}$$

olsun.  $B$   $\sqrt{2}$  ile  $\sqrt{3}$  arasındaki bütün rasyonel sayıları içine alsın. Bu  $B$  kümesinin sonsuz sayıda alt ve üst sınır elemanları vardır. Ama bir tane  $\inf(B)$  ve  $\sup(B)$  yoktur. Çünkü  $\sqrt{2}$  ve  $\sqrt{3}$   $\mathbb{Q}$  ya dahil değildir.

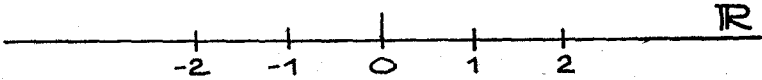
### Zorn Lemması :

$X$  boş olmayan yarı sıralanmış bir küme olsun. Öyle ki her tam sıralanmış alt kümesi bir üst sınıra sahip olsun. O zaman  $X$  in en azından bir maximal elemanı vardır.

#### 4. REEL DOĞRUNUN VE DÜZLEMİN TOPOLOJİSİ

$\mathbb{R}$  ile gösterdiğimiz reel sayılar kümesi matematikte, bilhassa Analizde büyük bir rol oynar. Hakikatte Topolojide de bir çok kavramlar reel sayılar kümesindeki kavramların soyut genelleştirilmesinden başka bir şey değildir. Burada reel sayılar kümesini tam ve Arşimediyen düzenlenmiş bir alan olarak ele alıyoruz.  $\mathbb{R}$  üzerinde «tabii topoloji» yi tanımlamak için  $\mathbb{R}$  deki sıralanma bağıntılarından faydalanacağız.

$\mathbb{R}$  in geometrik gösterilmesini hepimiz biliriz:  $\mathbb{R}$  bir doğru çizgi ve başlangıç olarak gösterdiğiniz bir sıfır noktası ve bir birim noktası 1 ile tanımlanır. Her nokta



ancak 1 ve 1 tane reel sayıya, her reel sayıya bir ve bir tane noktaya karşılık gelir. Bu nedenle Doğruya **reel çizgi** ya da **reel doğru** diyeceğiz.

#### $\mathbb{R}$ deki Açık Kümeler

$A$  bir reel sayılar kümesi olsun. Bir  $p \in A$  noktası  $A$  nın bir iç noktasıdır deriz, eğer  $p$  noktası  $A$  nın içinde kalan  $S_p$  gibi açık aralığın içinde ise:

$$p \in S_p \subset A.$$

$A$  kümesinin kendisine **açıktır** deriz eğer kümenin içindeki her nokta bir iç nokta ise