MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN No : 446

ATATÜRK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN No : 3

GENEL TOPOLOJİYE GİRİŞ

Prof. Dr. Z. Asuman ILGAZ

İSTANBUL — 1987

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN No: 446

ATATÜRK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN No: 3

GENEL TOPOLOJİYE GİRİŞ

Prof Dr. Z. Asuman İLGAZ

İSTANBUL — 1987

FATİH YAYINEVİ MATBAASI — Tel. : 527 23 72
Alibaba Türbe Sokak No. 21/3 - Nuruosmaniye/İST.

ÖNSÖZ

Bu kitapçık Üniversite de bir yarıyıllık süre için planlanarak verilen ders notlarından derlenmiş bulunmaktadır. Adından da görüldüğü gibi kitap, Genel Topoloji'ye giriş için gerekli ön bilgilerden oluşmaktadır. Matematik eğitimi gören veya matematik öğretmenliğine aday öğrencilere dilimizde yazılmış bir el kitabı verebilme olanağını sağladıkları için Rektörümüz sayın Prof. Dr. ORHAN OĞUZ'a Üniversitemiz Yayın Komisyonu Üyelerine ve notasyon kullanımında gerekli özeni esirgemiyen basım evi elemanlarına teşekkürü borç bilmekteyim.

Asuman ILGAZ

İÇİNDEKİLER

1. KÜMELER VE BAĞINTILAR

2. FONKSİYONLAR

3. SAYILABİLİRLİK VE SIRA

4. REEL DOĞRUNUN VE DÜZLEMİN TOPOLOJİSİ

5. TOPOLOJİK UZAYLAR

6. BAZLAR VE ALT BAZLAR

7. SÜREKLİLİK VE TOPOLOJİK ÖZDEŞLİK

12. BİTİŞİK UZUYLAR

13. ÇARPIM UZAYLARI

BÖLÜM I

1. KÜMELER VE BAĞINTILAR

Kümeler, Elemanlar

Küme kavramı Matematik bilim dalının her disiplininde kullanılır. Genel olarak küme objelerin bir koleksiyonu olarak tanımlanır ve A, B, X, Y gibi büyük harflerle isimlendirilir. Kümelerin objelerine **eleman** yada **kümenin üyesi** denir, ve a,b,x,y, ... diye küçük harflerle gösterilir. «p A nın bir elemanıdır»

$$p \in A$$

diye yazılır. «p ∈ A ya ait değil» ise $p \notin A$ diye yazılır. Temelde bir kümeyi belirtmek için iki yol vardır. Birinci yol eğer mümkünse elemanların tümünü yazmaktır. Örnek :

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Diğer bir yol da kümenin elemanlarını karakterize eden özelliği yazmaktır. Örnek :

$$B = \{x : x > 0 \quad \text{ve tam}\}$$

Şöyle okunur : B sıfırdan büyük tam sayıların kümesidir.

Örnek 1.1. Yukarıdaki küme $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ olarak da yazılabilir.

$$-6 \notin B, \qquad 3 \in B \qquad \text{ve} \qquad \pi \notin B.$$

Örnek1.2. Reel çizgi üzerinde aşağıda vereceğimiz kümeler matematikte çok sık kullanılır. a, b reel sayılar ve $a < b$ olmak üzere

a,b açık aralığı $= (a,b) = \{x : a < x < b\}$

a,b kapalı araılğı $= [a,b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$

a,b yarı açık aralığı $= [a,b) = \{x : a \leqslant x < b\}$

a,b açık kapalı aralığı $= (a,b] = \{x : a < x \leqslant b\}$

İki A ve B kümesi eğer aynı elemanlara sahip iseler birbirlerine **eşittirler.** ve $A = B$ yazılır. Yani A nın her elemanı B ye ve B nin de her elemanı A ya aittir. $A = B$ nin tersi $A \neq B$ diye yazılır.

Örnek 1.3

$$E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

$$F = \{2, 1\}$$

$$G = \{1, 2, 2, 1\}$$

$$\Longrightarrow E = F = G$$

Buradan da görüleceği gibi bir küme, elemanlarının gösteriliş yolundan tamamiyle bağımsızdır. Bir kümenin elemanları ne kadar yer değiştirirse ve ne kadar tekrarlanırsa tekrarlansın Küme aynı kümedi.

Kümeler **sonlu** ve **sonsuz** olabilirler. n pozitiv tam sayı olmak üzere n çeşitli elemandan meydana gelmiş bir küme **sonludur.** Özellikle yalnızca bir tek noktadan ibaret olan kümeye **tek elemanlı** küme denir.

Alt Kümeler, Üst Kümeler

Bir A kümesi bir B kümesinin **alt kümesidir** ya da aynı şey demek olan B, A nın bir **üst kümesidir** denir ve şöyle yazılır.

$$A \subset B \quad \text{ya da} \quad B \supset A$$

A nın her elemanı aynı zaman da B nin de bir elemanıdır. Yani eğer $x \in A$ ise $x \in B$ dir. «A, B nin içindedir.» denir ya da «B, A yı içine alır.» $A \subset B$ nin tersi $A \not\subset B$ ya da $B \not\supset A$ diye yazılır ve $x \in A$: $x \notin B$ demektir.

Örnek 1.4.

$$A = \{1,3,5,7, \ldots\} \qquad B = \{5,10,15,20, \ldots\}$$

$$C = \{x : x \text{ tek sayılar ve } x > 2\} = \{3,5,7,11, \ldots\}$$

$C \subset A$ dır. $B \not\subset A$ dır. Çünkü $10 \in B$ fakat $10 \notin A$.

Örnek 1.5.

N ile pozitiv tam sayıları

Z ile tam sayıları

Q ile rasyonel sayıları

R ile de reel sayıları gösterelim. O zaman

$$N \subset Z \subset Q \subset R \text{ dir.}$$

TANIM : A ve B gibi iki küme ancak ve ancak $A \subset B$ ve aynı zamanda $B \subset A$ ise eşittirler. $A \subset B$ ve $A \neq B$ ise A, B nin **has alt** kümesidir, ya da B, A yı tam olarak içine alır. $\subseteq$ bu sembol bir alt cümle için kullanılır.

$\subset$ ise has alt cümle için kullanılır.

TEOREM 1.1. A, B ve C herhangi üç küme olsunlar:

(i) $A \subset A$ dır, (i) Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise o zaman $A = B$ dir. (iii) Eğer $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise, o zaman $A \subseteq C$ dir.

İspat: (iii) nin ispatını yapalım. A ya ait her elemanın C ye ait olduğunu gösterelim. $x \in A$ olsun. $A \subset B$ Olduğundan $x \in B$ olur. Fakat $B \subset C$ dir. O halde $x \in C$. $x \in A \Longrightarrow x \in C$ yada $A \subset C$.

Evrensel ve Boş Kümeler

Kümeler teorisinin çoğu tatbikatlarında kümeler belli bir kümenin alt kümesi olarak verilirler. Bu kümeye **Evrensel** küme deriz ve U ile gösteririz. Hiç bir elemanı içermeyen kümeye de **boş** yada **sıfır** küme denir $\emptyset$ ile gösterilir.

Sıfır kümesi sonlu bir kümedir ve diğer bütün kümelerin alt kümesidir. Böylece herhangibir A kümesi için

$$\emptyset \subset A \subset U \quad \text{vardır.}$$

Örnek 1.6. Düzlem Geometride Evrensel küme düzlemin bütün noktalarını içine alır.

Örnek 1.6 $A = \{x : x^2 = 4, \ x \text{ tek sayı}\}$ O zaman $A = \emptyset$

Örnek 1.8. $B = \{\emptyset\}$. O zaman $B \neq \emptyset$ dır. Çünkü bir eleman içerir.

Sınıflar, Koleksiyonlar, Aileler ve Uzaylar

Kümelerin kendi elemanları da kümelerden oluşabilirler.

Örneğin her bir doğru çizgi, doğru çizgiler ailesinin içinde noktaların kümesidir. Bu durumu açıklığa kavuşturmak için «sınıf» «Koleksiyon» ve «Aile» isimlerini kullanırız. Özellikle kümelerin kümesi olarak sınıfı, sınıfların kümesi olarak da koleksiyon ya da aileyi kullanırız.

Örnek : 1.9 $\{\{2,3\}, \{2\}, \{5,6\}\}$ sınıfının elemanları $\{2,3\}$, $\{2\}$ ve $\{5,6\}$ dırlar.

Örnek 1.10 A herhangibir küme olsun. $\mathcal{P}(A)$ veya 2^A A nın bütün alt kümelerinin sınıfıdır. Yani örnek olarak $A = \{a, b, c\}$ ise o zaman

$$\mathcal{P}(A) = \{A, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$$

Genellikle A sonlu ise, diyelim n elemanlı ise, o zaman $\mathcal{P}(A)$ 2^n elemanlıdır.

Uzay kelimesi bazı matematiksel yapıya sahip boş olmayan küme tipini belirler. **Vektör uzayı, Metrik Uzay, Topolojik Uzay** gibi. Bu durumda uzayın elemanlarına noktalar diyeceğiz.

Kümelerle İşlemler

İki A, B kümesinin **bileşimi** öyle elemanlardır ki bunlar ya A ya, yada B ye aittirler ve $A \cup B$ diye gösterilir.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ya da } x \in B\}$$

A ve B nin **kesişimi** hem A ve hem de B ye ait olan elemanların kümesidir ve $A \cap B$ ile gösterilir.

$A \cap B = \varnothing$ ise hiç ortak elemanı yok, **ayrık** yada **kesişmiyor.**

$A \setminus B$ = A ve B nin farkı., A kümesine göre B nin farkı.

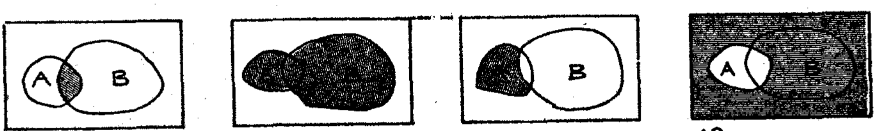
$A \setminus B = \{x : x \in A,\ x \notin B\}$

$(A \setminus B) \cap B = \varnothing$ dır.

A^c : Bir A kümesinin **mutlak komplementi** yada **Tamamlayıcısı.**

$A^c : \{x : x \in U,\ x \notin A\}$

Örnek 1.11 Venn Diyagramı



$A \cap B$ $A \cup B$ $A \setminus B$ A^c

T E O R E M 1.2. Kümeler için aşaıdaki tabloda vereceğim'z kanunlar geçerlidir.

Kümeler cebrinin kanunları	
1 1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Asosiyativlik kanunları	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Komutativlik kanunları	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Distribütivlik kanunları	
5a. $A \cup \varnothing = A$	6a. $A \cap U = A$
5b. $A \cup U = U$	6b. $A \cap \varnothing = \varnothing$
İdantiklik kanunları	
7a. $A \cup A^c = U$	8a. $(A^c)^c = A$
7b. $A \cap A^c = \varnothing$	8b. $U^c = \varnothing$., $\varnothing^c = U$
Komplement kanunları	
9a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	9b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
De Morgan Kanunları	

Bazılarının ispatını verelim.

Örnek. 9a : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$$(A \cup B)^c = \{x : x \notin A \cup B\}$$
$$= \{x : x \notin A,\ x \notin B\}$$
$$= \{x : x \in A^c,\ x \in B^c = x \in A^c \cap B^c\}$$

4b : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B \cup C\}$$
$$= \{x : x \in A \text{ ve } x \in B \text{ ya da } x \in C\}$$
$$= \{x : x \in A \text{ ve } x \in B \text{ ya da } x \in A \text{ ve } x \in C\}$$
$$= \{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Not : Yukarıdaki kanunların herbiri lojik kanunların bir analoğudur. Örnek

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x : x \in B \text{ ve } x \in A\} = B \cap A$$

TEOREM 1.3. $A \subset B$ olsun. Aşağıdaki ifadeler özdeştirler :

(i) $A \cap B = A$ (iii) $B^c \subset A^c$ (v) $B \cup A^c = U$

(ii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B^c = \varnothing$

İspat : (i) $x \in A \Longrightarrow x \in B$ demektir. Yani $x \in A$ ve hemde $x \in B$. O halde $x \in A \cap B$ olur. $\forall x \in A$ için aynı şekilde $A \subset A \cap B$ ve $A \cap B \subset A$ $A \cap B = A$ dır. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

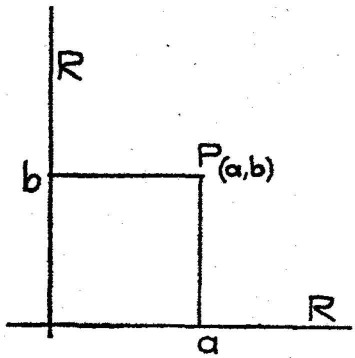
Çarpım Kümeleri

A ve B iki küme olsun. $A X B$: Çarpım kümesi A ile B nin $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere $< a, b >$ ikili elemanlarının tümünden meydana gelir.

$$A \times B = \{< a, b > \; : \; a \in A, \quad b \in B\}$$

$A \times A = A^2$ olarak gösterilir.

Örnek : Karteziyen düzlem : $R^2 = R \times R$ Burada her P noktası $< a, b >$ ikili elemanlarından meydana gelmiştir.



Örnek 1.12 $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{a, b\}$ olsun. O zaman

$$A \times B = \{ \{1, a\}, \{1, b\}, \{2, a\}, \{2, b\}, \{3, a\}, \{3, b\} \}$$

Not : $< a, b >$ «Sıralı ikili» tanımı tam olarak şöyle tanımlanır : $< a, b > = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$.

$$< a, b > = < c, d > \text{ dır } \quad a = c \text{ ve } b = d \text{ ise}$$

Çarpım kümesi kavramı sonlu sayıda kümelerin tabii şekilde çarpımlarından yani $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ kümelerinin çarpımı, elemanları $\forall_i$ için $a_i \in A_i$ olacak şekilde n taneli sıralılardan oluşan $< a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n >$ olan kümedir. $A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n$ veya $\Pi_{i=1}^{n} A_i$ şeklinde gösterilir.

Bağıntılar

Bir ***ikili bağıntı*** *(ya da yalnızca bağıntı)* **R,** *bir A kümesinden* bir B kümesine, şöyle tanımlanır : $A \times B$ kümesi içinde her $< a,b >$ çifti için tam olarak aşağıdaki anlamı veren bir bağıntıdır.

(i) «a, b ile ilgilidir» $a\,R\,b$ yazılır.

(ii) «a, b ile ilgili değildir» $a\,R\,b$ yazılır.

Bir A kümesinden gene bir A kümesine olan bağıntı **A içinde bir bağıntı** olarak isimlendirilir.

Örnek 1.13 Bir kümeler sınıfı için kümelerin birbirinin içinde olması bir bağıntıdır. Her A ve B kümesi için ya $A \subset B$ yada $A \not\subset B$ dir.

Şunu işaretliyelim ki bir A kümesinden bir B kümesine olan bir R bağıntısı tek türlü olarak tanımlanmış bir $A \times B$ kümesinin bir R^* alt kümesidir.

$$R^* = \{ < a, b > \; : \; a\,R\,b \}$$

Diğer taraftan $A \times B$ nin herhangibir R^* alt kümesi A dan B ye aşağıdaki gibi bir R bağıntısını verir:

$$a\,R\,b \quad \text{ancak ve ancak} \quad < a, b > \in R^*$$

TANIM: A dan B ye olan bir R bağıntısı $A \times B$ nin birinin bir alt kümesidir. A dan B ye olan bir R bağıntısının tanım bölgesi R deki ikililerin ilk koordinatıdır. değer bölgesi de R deki ikililerin ikinci koordinatıdır.

$$R \text{ in tanım bölgesi} = \{a \; : \; < a, b > \in R\}$$

$$R \text{ in değer bölgesi} = \{b \; : \; < a, b > \in R\}$$

R in **İnversi** (tersi) R^{-1} ile gösterilir ve B den A ya tanımlanan bir bağıntıdır:

$$R^{-1} = \{ < b, a > \; : \; < a, b > \in R\}$$

R^{-1} in ikilideki ikililerin yer değiştirmesi ile elde edildiğine işaret edelim.

Örnek. 1.4. $R = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$ bağıntısı $A = \{1,2,3\}$ kümesinde tanımlanmış olsun.

R in tanım bölgesi = $\{1,2\}$

R in değer bölgesi = $\{2,3\}$ ve

$$R^{-1} = \{ \{2,1\}, \{3,1\}, \{3,2\} \}$$

Herhangibir A kümesindeki **idantik bağıntı** diye A X A daki eşit koordinatlardan oluşan ikiliye denir ve $\triangle$ yada $\triangle_A$ diye gösterilir.

$$\triangle_A = \{ <a, a> : a \in A\}$$

İdantik bağıntıya A X A nın **diyagonali** ismi de verilir.

Özdeşlik Bağıntıları

Bir A kümesindeki bir R bağıntısı yani bir R alt kümesi eğer aşağıdaki aksiyomları gerçeklerse **Özdeşlik Bağıntısı** olarak isimlendirilir :

[$Ö_1$] $\forall a \in A \quad < a,a > \in R$

[$Ö_2$] eğer $< a,b > \in R$ ise o zaman $< b,a > \in R$ dir.

[$Ö_3$] eğer $< a,b > \in R$ ve $< b,c > \in R$ ise o zaman $< a,c > \in R$ dir.

Örnek. 1.15. «$\subset$» iç içe olma bağıntısını ele alalım. Her A kümesi için $A \subset A$ olduğundan $\subset$ refleksiv ve transitivdir: $A \subset B$ ve $B \subset C$ o zaman $A \subset C$. Fakat diğer taraftan $A \subset B$ ve $A \neq B \Longrightarrow B \not\subset A$ olur. Bu da bize $\subset$ nin simetrik olmadığını gösterir. O halde bir özdeşlik bağıntısı değildir.

Örnek 1.16. Öklid geometrisinde üçgenlerin benzerliği bir özdeşlik bağıntısıdır. Eğer α, β, γ üç üçgen ise (i) α kendisine benzerdir. (ii) α, β ya benzerse β da α ya benzerdir. (iii) α, β ya benzer β da γ ya benzerse, α da γ ya benzerdir.

Eğer R, A da bir özdeşlik bağıntısı ise herhangibir $a \in A$ elemanının özdeşlik sınıfı $[a]$ ile gösterilir a ile bağıntılı olan bütün elemanların kümesidir.

$$[a] = \{x : \langle a,x \rangle \in R\}$$

A nın özdeşlik sınıflarının koleksiyonu A/R diye gösterilir ve R tarafından A nın bölümü diye gösterilir.

$$A/R = \{ [a] : a \in A\}$$

TEOREM 1.4. R, A kümesinde bir özdeşlik bağıntısı olsun, ve $[a]$ $a \in A$ olmak üzere özdeşlik sınıfı olsun. O zaman

(i) $\forall a \in A$ için $a \in [a]$

(ii) $[a] = [b]$ dır, ancak ve ancak $\langle a,b \rangle \in R$

(iii) $[a] \neq [b]$ ise $[a]$ ve $[b]$ ayrıktırlar.

İspat : (i) R refleksiv olduğundan $\langle a,a \rangle \in R$ dir. Bu $\forall a \in A$ için vardır. O halde $a \in [a]$ dır.

(ii) $[a] = [b]$ için $[a] \subset [b]$ ve $[b] \subset [a]$ göstermeliyim.

$\langle a,b \rangle \in R$ olsun. Ve diyelim ki $x \in [b]$. O zaman

$\langle b,x \rangle \in R$ transitivlik özelliğinden $\langle a,b \rangle \in R$ ve

$\langle b,x \rangle \in R$ den $\langle a,x \rangle \in R$ olur.

Böylece $x \in [a] \Longrightarrow [b] \subset [a]$ çıkar. Aynı işlem ispatın diğer kısmı için de tekrarlanır.

(iii) $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ ise o zaman $[a] = [b]$ olur. Diyelim ki öyle olsun. O zaman $\exists x \in A$ için $x \in [a] \cap [b]$ dir. O zaman $\langle a,x \rangle \in R$, $\langle b,x \rangle \in R$ simetri özelliğinden $\langle x,b \rangle \in R \Longrightarrow$ transitivikten $\langle a,b \rangle \in R$ (ii) den $[a] = [b]$ buulnur.

A nın boş olmayan alt kümelerinden meydana gelen bir $\mathcal{A}$ sınıfına A nın bir **parçalanışı** denir, ancak ve ancak aşağıda vereceğimiz iki şartı gerçeklerse. :

(1) $\forall a \in A$ $\mathcal{A}$ nın herhangibir elemanına ait ise.

(2) $\mathcal{A}$ nın elemanları ikişer ikişer ayrık ise.

Bu tanımı, özdeşlik bağıntılarının temel teoremi olan şu Teoremle ifade edebiliriz.

T E O R E M 1.5 R, A da bir özdeşlik bağıntısı olsun. O zaman A / R bölüm kümesi A nın bir parçalanışıdır.

Bağıntıların Birleşimi

U, A dan B ye bir bağıntı., V de B den C ye bir bağıntı olsun. $U \subset A \times B$ ve $V \subset B \times C$ dir. O zaman A dan C ye bir bağıntı bulunabilir ki bu bütün $<a,c> \in A \times C$ şeklindeki ikili elemanları içerir., yani bazı $b \in B$ için

$$<a,b> \in U \quad \text{ve} \quad <b,c> \subset V$$

olur. U ve V nin bileşimi olarak isimlendrilir ve $V \circ U$ olarak gösterilir. O halde şunu yazabiliriz :

$$V \bullet U = \{ <x,y> : x \in A,\ y \in C.,\quad \exists b \in B : <x,b> \in U,$$
$$<b,y> \in V\}$$

Örnek 1.17. R de U ve V şöyle tanımlanmış iki fonksiyon olsunlar :

$U = \{ <x,y> : x^2 + y^2 = 1\}$ $V = \{ <y,z> : 2y + 3z = 4\}$
O zaman $V \bullet U$ bağıntısı bu iki eşitlikte y yi elemine edilerek bulunur:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ve} \quad 2y + 3z = 4$$

$$V \bullet U = \{ <x,z> : 4x^2 + 9z^2 - 24z + 12 = 0\}$$

Örnek 1.18. N poztiiv tam sayıları göstersin ve R de N deki $<$ bağıntısını göstersin. Yani eğer $a < b$ ise $< a,b > \in R$ olsun ve eğer $a > b$ ise $< a,b > \in R^{-1}$ olsun.

$$R \circ R^{-1} = \{ < x,y > \; : \; x,y \in N., \; \exists\, b \in N : < x,b > \in R^{-1}, \; < b,y > \in R\}$$

$$= \{ < x,y > \; : \; x,y \in N., \; \exists\, b \in N : b < x, \quad b < y\}$$

$$= (N \setminus \{1\} \; X \,(N \setminus \{1\}\,) = \{ < x,y > \; : \; x,y \in N., \quad x,y \neq 1\}$$

$$R^{-1} \circ R = \{ < x,y > \; : \; x,y \in N., \; \exists\, b \in N : < x,b > \in R, \; < b,y > \in R^{-1}\}$$

$$= \{ < x,y > \; : \; x,y \in N., \; \exists\, b \in N : b > x, \; b > y\}$$

$$= N X N$$

Şuna işaret edelim ki $R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$ dir.

2. FONKSİYONLAR

F o n k s i y o n l a r

Bir A kümesinin herbir elemanına bir B kümesinin bir ve bir tek elamanını karşılık verdiğimizi düşünerek bu tip işaretlemelerin tümü olan f ye A dan B içine bir fonksiyon denir ve

$$f : A \mapsto B \quad \text{veya} \quad A \xrightarrow{f} B$$

yazılır. $a \in A$ nın f yardımıyla tanımladığı B deki biricik elemanı f(a) ile gösterilir ve f nin **a** daki **değeri** ya da f ye göre a nın imajı denir. f nin tanım bölgesi A ve değer bölgesi B dir.

Her bir $f : A \to B$ fonksiyonu için A X B de şöyle bir bağıntı verilmiş demektir.

$$\{ < a, \ f(a) > \ : a \in A \}$$

Bu kümeye f nin G r a f i ğ i deriz. f[A] ile gösterilen ifadeye f nin değer bölgesi denir.

$$f[A] = \{ f[a] : a \in A \}$$

$f : A \to B$ ve $g : A \to B$ tanımlanmış olan iki fonksiyona ancak ve ancak $a \in A$ için $f(a) = g(a)$ ise eşittir denir ve $f = g$ yazılır, yani her ikisi de aynı grafiğe sahip iseler birbirlerine eşittirler.

Buna göre fonksiyonla bunun grafiği arasında bir ayırma yapamayız.

$A \times B$ nin bir f alt kümesi yani A dan B ye bir bağıntı aşağıda vereceğimiz özelliğe sahip ise f o n k s i y o n olur.

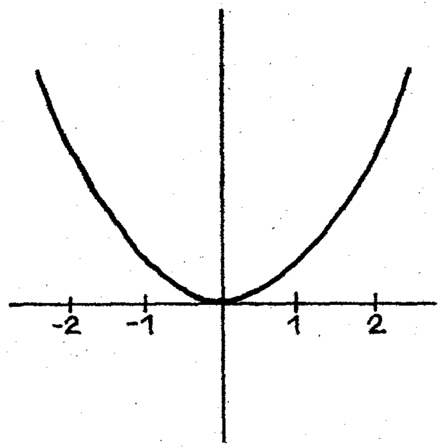
[F] $\forall a \in A$ noktası f içinde yalnız ve yalnızca bir tane $<a,b>$ ikilisinin ilk koordinatı olarak ortaya çıkar.

$f = g$ nin negatifi $f \neq g$ dir: $\exists a \in A \quad f(a) \neq g(a)$

Örnek 1. $f : R \to R$ her reel sayı onun karesini isabet ettiren bir fonksiyon olsun $\forall x \in R \quad f(x) = x^2$ f burada r e e l - d e ğ e r - l i fonksiyondur.

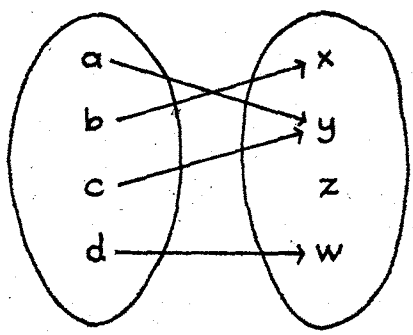
grafiği : $\{ <x, x^2> : x \in R\}$ Şekil 2.1.

$$f[R] = \{x : x \in R, \quad x \geqslant 0\}$$



f nin değer bölgesi negatif olmayan reel sayılardır.

Örnek2. $A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{x, y, z, w\}$ olsun. Şekil 2.2



Şekil 2.2

Şekil 2.2. A dan B ye bir f fonksiyonu tanımlar. Burada

$f[A] = \{x, y, w\}$ f nin grafiği şu bağıntıdır.

$\{ <a,y>, <b,x>, <c,y>, <d,w> \}$

Örnek 3. Bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonuna sabit fonksiyon denir. Eğer $\forall a \in A$ için $f(a) = b_0$ eşitliğini sağlayacak herhangibir $b_0 \in B$ elemanı bulunabiliyor ise. Böylece herhangibir sabit f fonksiyonunun $f[A]$ değer bölgesi bir tek noktadan ibaret olur.

$$f[A] = \{b_0\}$$

Şimdi $f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

A dan C ye giden fonksiyon A daki bir $a \in A$ elemanını C de $g(f(a))$ ya götürür f ve g nin bileşimi yada kompozisyonu diye isimlendirilir. ve $g \circ f$ olarak yazılır. Tanımdan

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \text{ dır.}$$

Şunuda işaret edelim ki eğer biz $f \subset A X B$ ve $g \subset B X C$ yi birer bağıntı olarak bakarsak o zaman $g \cdot f$ çarpımını tanımlayabiliriz. Hakikaten $g \cdot f = g \circ f$ dır.

Eer $f: X \rightarrow Y$ ve $A \subset X$ ise, f nin A ile kısıtlanışı f/A ile gösterilen ve A dan Y ye şöyle tanımlanan bir fonksiyondur:

$\forall a \in A$ için $f/A(a) = f \cap (A X Y)$ dır. Diğer taraftan, eğer $f: X \rightarrow Y$, $X \subset X^*$ bölgesinde $g: X^* \rightarrow Y$ gibi bir fonksiyonun kısıtlanışı ise o zaman g ye f nin bir genişletilmişi denir.

BİRE - BİR, ÜZERİNE, TERS VE ÖZDEŞ FONKSİYONLAR

Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonuna bire-bir (1-1) dir denir, eğer ayrı değer bölgesi elemanlarına A nın ayrı elemanları karşılık geliyorsa yani eğer

$$f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a' \quad \text{ise}$$

Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonuna üzerine (ya da f, A dan B üzerine bir fonksiyon; ya da f, A dan B üzerine) bir tasvirdir denir, eğer $\forall\, b \in B$ bir $a \in A$ nın tasviri ise yani

$$b \in B \Longrightarrow \exists\, a \in A : f(a) = b$$

f üzerine bir fonksiyon ise $f[A] = B$ dir.

Genelde bir $f \subset A X B$ fonksiyonunu f^{-1} TERSİ gene bir fonksiyon olma zorunda değildir. Fakat f fonksiyonu 1-1 ve üzerine bir fonksiyon ise o zaman f^{-1} de $B \rightarrow A$ ya bir fonksiyondur ve Ters fonksiyon diye isimlendirilir.

$\triangle_A \subset A X A$ A üzerinde Özdeş fonksiyon denen bir fonksiyondur. 1_A ya da 1 olarak da gösterilir. $\forall\, a \in A$ için $1_A(a) = a$ dır. Açık olarak şöyle diyebiliriz: Eğer $f : A \rightarrow B$ o zaman

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

Bundan başka f fonksiyonu 1-1 ve üzerine ise o zaman f^{-1} ters fonksiyonuna da sahiptir ve

$$f^{-1} \circ f = 1_A \quad \text{ve} \quad f \circ f^{-1} = 1_B$$

Bunun sonucu olarak şu önermeyi yapabiliriz.

$$f : A \rightarrow B \quad \text{ve} \quad g : B \rightarrow A \quad \text{olan fonksiyonlar}$$

$$g \circ f = 1_A \quad f \circ g = 1_B$$

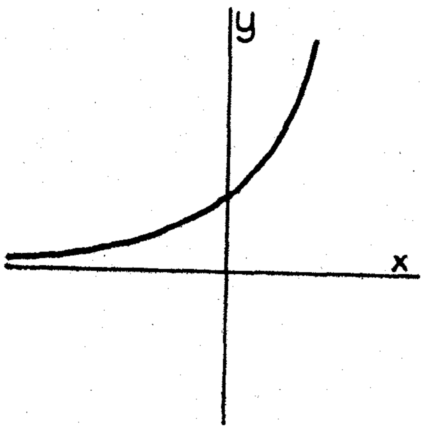
sağlıyorsa

$$f^{-1} : B \rightarrow A \quad \text{vardır ve} \quad g = f^{-1} \quad \text{dir.}$$

Örnek : $f : R \to R$, $g : R \to R$ ve $h : R \to R$

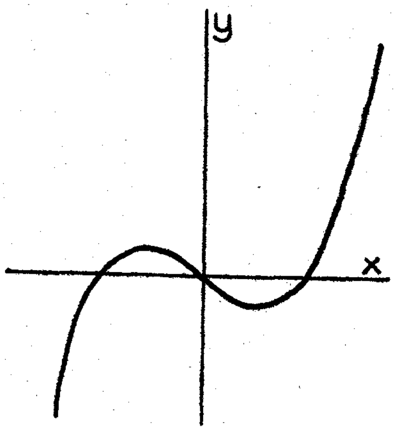
$$f(x) = e^x \quad g(x) = x^3 - x \quad h(x) = x^2$$

olarak tanımlanmış olsun.



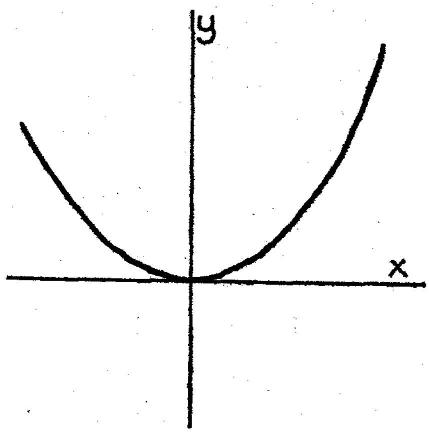
$f(x) = e^x$

1-1 dir. Geometrik olarak her yatay çizgi f nin bir noktadan daha fazla noktasıyla çakışamaz.



$g(x) = x^3 - x$

Üzerinedir geometrik olarak her yatay çizgi en azından g nin bir noktasını içine alır.



$h(x) = x^2$

Ne bire birdır ne de üzerinedir.

$h(2) = h(-2) = 4$

$h[R]$ R in mutlak alt kümesidir :

$-16 \not\subseteq h\ [R]$

SIRALAMA KÜMELERİ, KARTEZYEN ÇARPIMLAR

Kümelerin sıralama sınıfı

$\{A_i : i \in I\}$ $\{Ai\}_{i \in I}$ ya da basitçe $\{A_i\}$ diye

gösterilen ifade bir I kümesinden kümeler sınıfına olan bir tasvır fonksiyonudur. $i \in I$ sıralama kümesi denir A_i lere sıralanmış kümeler denir. $\forall i \in I$ ya da bir sıra denir. Eğer I sıra kümesi pozitif tam sayılardan oluşmuşsa sıralanmış $\{A_1, A_2, \ldots\}$ sınıfına da bır kümeler dizisi denir.

Örnek $\forall n \in N$ positiv tamsayısı için

$D_n = \{x : x \in N, x$ n nin katları olsun.$\}$ O zaman

$D_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $D_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$ $D_3 = \{3, 6, 9, \ldots\}$ İndislenmiş bir kümeler sınıfının $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ kartezyen çarpımı

$\Pi \{A_i : i \in I\}$ veya $\Pi_{i \in I} A_i$ veya yalnızca $\Pi_i A_i$

ile gösterilen bütün $p : I \to \bigcup_i A_i$ fonksiyonlarıdır; Öyle ki $p(i) = a_i \in A_i$ dır. Karteziyen çarpımının böyle bir elemanına $p = < a_i : i \in I >$ deriz. Her $i_0 \in I$ için bir Π_{i_0} fonksiyonu vardır. ki bu i_0 rıncı izdüşüm fonksiyonu olarak isimlendirilir. $\Pi_i A_i$ çarpım kümesinden A_{i_0} koordinat kümesine tanımlanmış olan

$$\Pi_{i_0} (< a_i : i \in I >) = a_{i_0}$$

fonksiyonudur.

Örnek : $R^3 = R X R X R$ $p = < a_1, a_2, a_3 >$ reel sayılardan meydana gelmiştir. R_1, R_2, R_3; R in kopyaları olsun. O zaman p ye fonksiyon gözüyle bırakılabilir. $I = (1, 2, 3)$ $p(1) = a_1 \in R_1$; $p(2) = a_2 \in R_2$ $p_3(3) = a_3 \in R_3$ diğer bir deyimle

$$R^3 = \Pi \{R_i : i \in I, \quad R_i = R\}$$

İşlemlerin Genelleştirilmesi

Bileşim ve kesişim kavramları orjinalde iki küme için tanımlanmıştır. Fakat U evrensel kümesinin $\mathcal{A}$ alt kümeler sınıfı için genelleştirilebilirler.

$$\bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\} = \{x : x \in U, \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

$$\bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\} = \{x : x \in U, \quad \forall A \in \mathcal{A} \text{ için}, \quad x \in A\} \text{ dır.}$$

U nun alt kümelerinden ibaret $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ sıralanmış kümeyı

$$\bigcup \{A_i : i \in I\} \text{ ya da } \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ya da } \bigcup_i A_i$$

şeklinde de toplamlarını ve kesişimlerini

$$\bigcap \{A_i : i \in I\} \text{ ya da } \bigcap_{i \in I} A_i \text{ ya da : } \bigcap A_i$$

de gösterebiliriz. Tabii şöyle de yazabiliriz.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup, \ldots; \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_2 \cap A_2 \cap \ldots$$

zaman

Örnek 1 : $\forall n \in N \quad D_n = \{x : x \in N$ x, n nin katları olsun.$\}$ O zaman

$$\bigcup \{D_i : i \geqslant 10\} = \{10, 11, 12, \ldots\} \quad \text{ve} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = \emptyset$$

Örnek 2 : $I = [0,1]$ ve $\forall i \in I \quad A_i = [0,i]$ olsun. O zaman

$$\bigcup_i A_i = [0,1] \quad \text{ve} \quad \bigcap_i A_i = \{0\}$$

TEOREM : 2. 1 $\mathcal{A} = \{A_i\}$ ve B herhangibir küme ise

(i) $\quad B \cup (\bigcap_i A_i) = \bigcap_i (B \cup A_i)$

(ii) $\quad B \cap (\bigcup_i A_i) = \bigcup_i (B \cap A_i)$

dir.

TEOREM 2.2: $\mathcal{A} = \{A_i\}$ U nun alt kümeler sınıfı olsun. O zaman

(i) $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$

(ii) $(\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c$

TEOREM 2.3: A herhangibir küme, $\forall p \in A$ $G_p \subset A : p \in G_p \subset A$ o zaman

$$A = \cup \{G_p : p \in A\}$$

İspat : $x \in \cup \{G_p : p \in A\}$ olsun. O zaman $\exists p_0 \in A$: $x \in G_{p_0} \subset A$ o halde $x \in A$ dır. Böylece $\cup \{G_p : p \in A\} \subset A$ dır.

$y \in A$ olsun. O zaman $y \in G_p$ olur. Böylece $y \in \cup \{G_p : p \in A\}$ böylece $A \subset \cup \{G_p : p \in A\}$ öyleyse bu iki küme birbirine eşittir.

Küme Fonksiyonları ile İlgili Teoremler:

$f : x \to y$ olsun. X in bir A alt kümesinin tasviri $f[A]$ A nın noktalarının tasviridir. Yani $B \subset Y$ olsun.

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}$$

$$f^{-1}[B] = \{x : x \in X, \quad f(x) \in B\}$$

Örnek : $f : R \to R$ $f(x) = x^2$ olarak tanımlanmış olsun. O zaman

$$f[\{1, 3, 4, 7\}] = \{1, 9, 16, 49\}, \quad f[(1,2)] = (1,4)$$

$$f^{-1}[\{4,9\}] = \{-3, -2, 2, 3\}, \quad f^{-1}[(1,4)] = (1,2) \cup (-2 -1)$$

$f : X \to Y$ $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ ile gösterilen fonksiyon ve f^{-1}

$\mathcal{P}^{-1}(Y) \to \mathcal{P}^{-1}(X)$ ile gösterilen fonksiyon ise, f ve f^{-1} e

Küme fonksiyonları denir. f^{-1} genellikle ilgili küme fonksiyonunun tersi olamaz.

$$f^{-1} \circ f[(1, 2)] = f^{-1}[(1, 4)] = (1, 2) \cup (-2, -1).$$

TEOREM 2.4 : $f: X \to Y$ olsun. O zaman $A, B \subset X$ herhangi iki alt küme ise

(i) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$

(ii) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$

(iii) $f[A \setminus B] \supset f[A] \setminus f[B]$

(iv) $A \subset B \Longrightarrow f[A] \subset f[B]$

ve daha genel olarak $\{A_i\} \subset X$ indekslenmiş kümeleri için

(i)' $f[\bigcup_i A_i] = \bigcup_i f[A_i]$ (ii)' $f[\bigcap_i A_i] \subset \bigcap_i f[A_i]$

İspat (i) yapalım :

Önce $f[A \cup B] \subset f[A] \cup f[B]$ gösterelim.

$y \in f[A \cup B]$ olsun. O halde $\exists\, x \in A \cup B$ vardır ki:

$f(x) = y$ dir. $x \in A$ ya da $x \in B$ dir.

$x \in A$ ise $f(x) = y \in f[A]$

$x \in B$ ise $f(x) = y \in f[B]$

her iki durumda da $y \in f[A] \cup f[B]$ dir.

$$\Longrightarrow f[A \cup B] \subset f[A] \cup f[B]$$

tersini gösterelim: $y \in f[A] \cup f[B]$ olsun. Yani $y \in f[A]$ yada $y \in f[B]$

$y \in f[A] \to \exists\, x \in A$: $f[x] = y$

$y \in f[B] \to \exists\, x \in B$: $f[x] = y$ her iki halde de

$y = f(x)$ $x \in A \cup B$ yani $y \in f[A \cup B]$

$$f[A] \cup f[B] \subset f[A \cup B]$$

$\Longrightarrow f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$

(iii) nın ispatı : $f[A] \setminus f[B] \subset f[A \setminus B]$

$y \in f[A] \setminus f[B]$ olsun. $\exists x \in A : f(x) = y$ fakat

$y \notin \{f(x) : x \in B\} \Longrightarrow x \notin B$ veya $x \in A \setminus B \Longrightarrow y \in f[A \setminus B]$

Örnek : $A = [1, 2] \times [1, 2]$ ve $B = [1, 2] \times [3, 4]$

$\Pi : R^2 \to R$ birinci koordinat kümesi olsun.

$\Pi[A] = [1,2]$, $\Pi[B] = [1,2]$ $A \cap B = \varnothing$

$\Pi[A \cap B] = \varnothing$ Buradan

$\Pi[A] \cap \Pi[B] = [1,2] \neq \Pi[A \cap B] = \varnothing$

Bundan başka $A \setminus B = A$

$\Pi[A \setminus B] = [1,2] = \varnothing = \Pi[A] \setminus \Pi[B]$

TEOREM 2.5. $f : X \to Y$ olsun. $A, B \subset Y$ olsun.

(i) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$

(ii) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$

(iii) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$

(iv) $A \subset B \Longrightarrow f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B]$

(ii) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ yi ispatlıyalım

(ii) a) $x \in f^{-1}[A \cap B]$ olsun.

$f(x) \in A \cap B$

$f(x) \in A$ ve aynı anda $f(x) \in B$

$x \in f^{-1}[A]$ ve aynı anda $x \in f^{-1}[B]$

$x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ çıkar.

b) $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ olsun.

$x \in f^{-1}[A]$ ve aynı anda $x \in f^{-1}[B]$

$f(x) \in A$ ve aynı anda $f(x) \in B$

$f(x) \in A \cap B$

$x \in f^{-1}[A \cap B]$ çıkar.

(iii) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$ yi ispatlıyalım

a) $x \in f^{-1}[A \setminus B] \Longrightarrow f(x) \in A \setminus B \Longrightarrow f(x) \in A$ ve aynı anda $f(x) \notin B \Longrightarrow x \in f^{-1}[A]$ ve aynı anda $x \notin f^{-1}[B]$

$$x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B] \text{ olur.}$$

b) $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B] \Longrightarrow x \in f^{-1}[A]$; $x \notin f^{-1}[B]$

$f(x) \in A$, $f(x) \notin B \Longrightarrow f(x) \in [A \setminus B]$

$$x \in f^{-1}[A \setminus B]$$

ve daha genel olarak

(i)′ $f^{-1}[\cup_i A_i] = \cup_i f^{-1}[A_i]$

(ii)′ $f^{-1}[\cap_i A_i] = \cap_i f^{-1}[A_i]$

$f : X \to Y$ $A \subset Y$ ise $f^{-1}[A^c] = (f^{-1}(A))^c$

Reel Değerli Fonksiyonların Cebiri

(X, R) Herhangi bir X kümesinden R üzerine tanımlanmış reel değerli fonksiyonlar olsun.

$f : X \to R$ $g : X \to R$ $k \in R$ reel sayı olmak üzere aşağıdaki tanımları verebiliriz.

$$(f+g) : X \to R, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(k \cdot f) : X \to R \qquad (k \cdot f)(x) = k\,(f(x))$$

$$(|f|) : X \to R \qquad (f+k)(x) = f(x) + k \quad \text{olur.}$$

$$(f \cdot g) : X \to R \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$k \in R$ reel sayısının $f(x) = k$ sabit fonksiyonuna idantik olarak düşünmek çoğu zaman uygun olur. O zaman

$$(f+k)(x) = f(x) + k \quad \text{olur.}$$

$(fg) : X \to R$ daha önce söylediğimiz gibi fonksiyonların bileşimleri değildir.

Örnek : $f = \{ <a, 1>, <b, 3> \}$ $g = \{ <a, 2>, <b, -1> \}$

tanım bölgesi $X = \{a, b\}$

$$(3f - 2g)(a) = 3f(a) - 2g(a) = 3(1) - 2(2) = -1$$

$$(3f - 2g)(b) = 3f(b) - 2g(b) = 3(3) - 2(-1) = 11$$

yani $3f - 2g = \{ <a, -1> <b, 11> \}$ dır.

TEOREM 2.7. $\mathcal{F}(X, R)$ ile boş olmayan bir X kümesinden R ye tanımlanmış bütün reel değerli fonksiyonları gözönüne alalım. Aşağıda vereceğimiz aksiyomlar gerçeklendiği takdirde bu fonksiyonların koleksiyonu bir **reel Lineer Vektör Uzayı** meydana getirirler.

$[V_1]$ f ve g ve h fonksiyonlar olmak üzere

1. $(f+g)+h = f+(g+h)$

2. $f+g = g+f$

3. $\exists\, 0 \in \mathcal{F}(X, R)$ yani $0 : X \to R$ tasvir fonksiyonu vardır.

Öyleki $f + 0 = f$

4. $\forall f \in \mathcal{F}(X, R)$, $\exists -f \in \mathbf{F}(X,R)$ yani $-f : X \to R$:

$f + (-f) = 0$

$[V_2]$ k, k' reel sayılar olmak üzere

1. $k . (k' \cdot f) = (kk') \cdot f$

2. $1 . f = f$

$[V_3]$ 1. $k \cdot (f+g) = k \cdot f + k \cdot g$

2. $(k + k') \cdot f = k \cdot f + k' \cdot f$

3. SAYILABİLİRLİK ve SIRA

Özdeş Kümeler

A ve B iki küme olsunlar. 1-1 ve üzerine olacak biçimde bir f fonksiyonu $f: A \rightarrow B$ bulunabiliyorsa A kümesi B kümesine özdeştir denir ve $A \sim B$ yazılır. f fonksiyonuna da A ve B kümeleri arasında 1-1 bir uyum sağlıyor denir.

Bir küme boş ise ya da $n \in N$ olmak üzere $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesine özdeş ise bu kümeye **sonlu** dur denir. Aksi halde kümeye **sonsuz**dur denir. Sonlu kümeler eş sayılı elemanlara sahip iseler **özdeştirler.**

Örnek 3.1. $N = \{1, 2, 3 \ldots\}$ $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ $f: N \rightarrow E$

$f(x) = 2x$ fonksiyonu $1-1$ ve üzerinedir. O halde $N \sim E$ dir.

Örnek 3.2. $f: (-1, 1) \rightarrow R$ $f(x) = \dfrac{x}{(1 - |x|)}$ $1-1$ ve üzerine

Bu fonksiyonla $(-1, 1)$ aralığı R reel sayılar cümlesine özdeştir. Burada şunu da işaretliyelim ki bir sonsuz küme kendi has alt kümesine özdeş olabilir.

Numarandırılabilir ve Sayılabilir Kümeler

N positiv tam sayıları gösteren küme olsun: $\{1, 2, 3, \ldots\}$ Bir X kümesi N'e özdeş ise bu X kümesine numarandırılabilir denir ve $\aleph_0$ (aleph-null) kardinal sayısına sahiptir denir. Bir A kümesi sonlu ya da numaralandırılabilir ise, bu A kümesine sayılabilir denir.

Örnek 3.3.

$$
\begin{array}{cccccccc}
(1,1) & & (1,2) & \longrightarrow & (1,3) & & (1,4) & \longrightarrow \cdot \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdots \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdots \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdots \\
\cdot & & & & & & & \cdots
\end{array}
$$

Bu çarpım kümesinin (1,1), (2,1), (1,2), (1,3), (2,2), ... diye oklarla gösterdiğimiz şekilde dizsek N X N kümesinin numaralanabilir olduğunu görürüz.

Örnek 3.4 $M = \{0, 1, 2, 3 \ldots\} = N \cup \{O\}$ şimdi her positiv $a \in N$ için sayısı tektürlü olarak $a = 2^r(2s+1)$ $r, s \in M$ olmak üzere yazılabilir. $f : N \to M \times M$ fonksiyonunu $f(a) = \langle r, s \rangle$ tanımlamış olur. f 1—1 ve üzerinedir. O halde M x M numaralandırılabilir ve $N \times N \subset M \times M$ dir.

TEOREM 3.1 Her sonsuz kümenin sayılabilir bir alt kümesi vardır.

İspat : $f : \mathcal{P}(X) \to x$ bir seçim fonksiyonu olsun. X in her boş olmayan A alt kümesi için $f(A) \in A$ dır. (Seçim aksiyomundan dolayı böyle bir fonksiyon vardır. Şöyle bir diziyi göz önüne alalım.

$a_1 = f(X)$

$a_2 = f(X \setminus \{a_1\})$

$a_3 = f(X \setminus \{a_1, a_2\}$ -

....

$$a_n = f(X \searrow \{a_1, a_2, \ldots\ldots a_n - 1\})$$

X sonsuz olduğundan herhangibir $n \in N$ için $X \searrow \{a_1, a_2, \ldots a_{n-1}\}$ boş değildir. Bundan başka f bir seçim fonksiyonu olduğundan

$$a_i \neq a_i \ : \text{dir} \quad i < n \ \text{kaldıkça}$$

ve $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ gibi X in numaralandırılabilir bir alt kümesi vardır.

Bunun sonucu olarak şu teoremi söyliyebiliriz.

TEOREM 3.2. Sayılabilir bir kümenin her alt kümesi sayılabılirdir.

İspat : X sayılabiliyor ise ya **sonludur** ya da numaralandırılabilir. Her iki halde de alt kümeleri sayılabilirdir.

Lemma 3.1 $\{A_1, A_2, \ldots\}$ birbirinden ayrık numaralanabilir kümelerin sınıfı olsun. O zaman $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i$ de numaralanabilir.

İspat : $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots\}$

$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23} \ldots\}$

....

$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \ldots\}$

olsun.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij} : i, j \in N \times N\} \qquad f : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \rightarrow N \times N$$

fonksiyonu $1-1$ ve üzerinedir. $f(a_{ij}) = (i, j)$

O halde $N \times N$ numaralandırılabilir olduğu için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ de numaralandırılabilir.

Benzer şekilde şu teorem de ispatlanır.

TEOREM 3.3 : $\{A_i : i \in I\}$ sayılabilir kümelerin sayılabilir sınıfı olsun yani I sayılabilir ve her A_i $i \in I$ için sayılabilir olsun. O zaman $\cup \{A_i : i \in I\}$ sayılabilirdir.

Bir cümle **sonlu** değilse ve **sayılamıyorsa sayılamıyor** veya **sıralanamıyor** denir.

S o n s u z l u k

Her sonsuz küme numaralandırılamaz. En iyi örneği şu teoremle verilendir.

TEOREM 3.4. $[0,1]$ kapalı aralığı numaralandırılamaz.

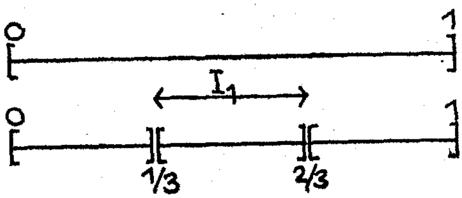
İspat : İki yolla çözülebilir burada sonraki derslerimizde faydalı olacağına inandığımız çözümü göstereceğiz:

$A = [0,1]$ kapalı aralığını aşağıdaki şekilde 3 kapalı aralığa bölelim. Diyelim ki A yı numaralandırdık.

$A = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$ noktalardan meydana gelmiş olsun. Örneğin bir x_1 noktası üç aralıktan üçünün birden içine giremez.

$I_1 = \{a_1, b_1\}$ bu üç aralıktan x_1 ri içine almayan bir tanesi olsun.

$x_1 \notin I_1$



Şimdi I_1 aralığının 3 tane $\frac{1}{9}$ uzunluğa sahip aralığa bölelim.

$$\left[a_1, a_1 + \frac{1}{9}\right] \qquad \left[a_1 + \frac{1}{9}, a_1 + \frac{2}{9}\right] \qquad \left[a_1 + \frac{2}{9}, b_1\right]$$

$x_2 \notin I_2$ olsun.

Buna devam ederek $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots\ldots$ iç içe geçmiş aralıkları elde ediniz ki burada $x_n \notin I_n$ $\forall n \in N$ için geçerlidir.

Şimdi iç-içe geçmiş aralıklar prensibinden dolayı hiç değilse bir $y \in A$ reel sayısı vardır ki bu aralıkların hepsinin içinde bulunur. Diyelim ki $m_o \in N$ için $y = X_{mo}$ olsun

$y \in A = \{x_1, x_2, \ldots\}$, Oysa $y = x_{mo} \notin I_{mo}$ bulunuyordu.

Oysa y yi biz bütün aralıkların içinde aldık.

Çelişki! Demek ki varsayımızın tersine A numaralandırılamaz. Bir X kümesi eğer $[0, 1]$ kapalı aralığına özdeş ise bu X kümesinin kuvveti sonsuzdur denir ya da kardinal sayısı C dir denir.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kardinal sayısı C dir.

Yarı Sıralanmış Kümeler

Bir A kümesinde bir $\leqslant$ bağıntısına yarı sıralama ya da (sıralama)denir, eğer her $a, b, c \in A$:

(i) $a \leqslant a$

(ii) $a \leqslant b$ ve $b \leqslant a \Longrightarrow a = b$ ve

(iii) $a \leqslant b$, $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$

ise yarı sıralama ile birlikte A kümesine yarı sıralanmış küme denir. $(A, \leqslant)$ refleksiv anti-simetrik ve transitiv bir bağıntıdır.

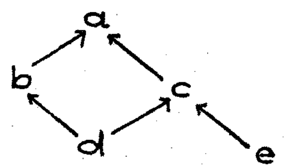
Örnek 3.5. (i) $A \subset A$ (ii) $A \subset B$ ve $B \subset A \Longrightarrow A = B$

(iii) $A \subset B$, $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$

Örnek 3.6 A her hangibir reel sayı kümesi $x \leqslant y$ «tabii sıralama» dır.

Örnek 3.7 $X = \{a, b, c, d, e\}$

Bu şekil bir yarı sıralamayı canlandırıyor.



Bir A yarı sıralanmış kümeye, eğer $\forall a, b \in A$ için ya $a \leqslant b$ ya da $b \leqslant a$ bağıntısı varsa tam sıralanmıştır denir.

Bir R bağıntısı bir A kümesinde bir yarı sıralamayı veriyorsa R^{-1} ters bağıntısı da bir yarı sıralamadır.

Sıralanmış Kümelerin Alt Kümeleri

X yarı sıralanmış bir küme olsun. $A \subset X$ olsun. A alt kümesinde sıralama X in sıralanmasından tabii yolla şöyle elde edilir.

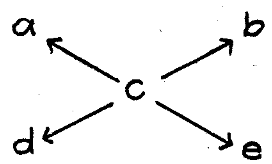
$\forall a, b \in A$ elemanları X içinde ancak ve ancak $a < b$ şeklinde yarı sıralanmşı elemanlar iseler, o zaman A içinde de $a \leqslant b$ yani yarı sıralanmış elemanlardır. O halde R, X de yarı sıralama ise $R_A = R \cap (A \times A)$ R in A ya kısıtlanışı denir ve A da yarı sıralamadır. (A, R_A) (X, R) in yarı sıralanmış alt kümesidir. Bazı yarı sıralanmış kümelerin alt kümeleri de tam sıralanmış olabilirler. Açıktır ki tam sıralanmış kümelerin alt kümeleri tam sıralanmış olurlar.

1) $\{a, c, d\}$ kümesi tam sıralanmış

2) $\{b, e\}$ kümesi tam sıralanmış

3- $\{a, b, c\}$ tam sıralanmış değil

4) $\{d, e\}$ tam sıralanmış değil.



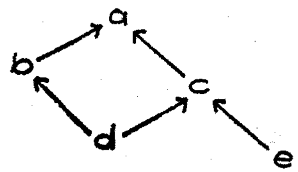
İlk ve Son Elemanlar

X sıralanmış bir küme olsun. $a_0 \in X$'a **ilk eleman** ya da **en küçük** elemandır denir, ancak ve ancak $\forall x \in X$ için $a_0 \leqslant x$ var ise

Aynı şekilde bir $b_0 \in X$'a X içinde **en son** ya da **en büyük** elemandır denir. $\forall x \in X$ için ancak ve ancak $x \leqslant b_0$ ise,

Örnek $X = \{a, b, c, d, e\}$ 6.1

a en büyük elemandır. Çünkü her eleman kendisinden daha öncedir. en küçük eleman yoktur. d en küçük olamaz çünkü ondan daha küçük mü büyük mü olduğunu bilmediğimiz e elemanı vardır.



Örnek : N positiv tam sayılar 1 sayısının ilk eleman olarak kabu ederler.

Z tam sayılar kümesinin ne ilk ne de son elemanı belirlidir.

Maksimal ve Minimal Elemanlar

X sıralanmış bir küme olsun. Bir $a_0 \in X$ elemanına **maksimal** dır denir. Ancak ve ancak $a_0 \leqslant x \Longrightarrow x = a_0$ ise, yani a_0 kendisinden başka hiç bir eleman takip etmiyorsa Benzer şekilde bir $b_0 \in X$ elemana **minimal** dır denir eğer $x \leqslant b_0 \Longrightarrow b_0 =$ yani b_0 kendisinden başka hiç bir elemanın önünde değilse.

Örnek : Yukarıdaki 6.1 örnek : a maximal elemandır

d ve e minimal elemandır.

Örnek : IR reel sayılar kümesi tabii sınırlanmasıyla tam sıralanmış bir kümedir. Fakat ne maksimal ne de minimal elemana sahiptir.)

Örnek : $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots a_m\}$ sonlu tam sıralanmış bir küme olsun. O zaman A tam olarak bir max ve bir min elemana sahipdir ve

$$\min \{a_1, a_2, \ldots a_m\}; \qquad \max \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$$

olarak isimlendirilir.

Üst ve Alt Sınırlar

Bir A kümesi yarı sıralanmış bir X kümesinin alt kümesi olsun. Bir $m \in X$ eleman A nın **alt sınırıdır** eğer $\forall x \in A$ için $m \leqslant X$ ise. Yani **m** A da ki her elemandan daha önce geliyorsa. Eğer A nın bir alt sınırı A nın diğer bütün alt sınırlarından sonra geliyorsa A nın en büyük alt sınırı ya da A nın infimum denir ve inf (A) ile gösterilir.

Benzer şekilde bir $M \in X$ elemanı A nın üst sınırıdır eğer $\forall x \in A \quad x \leqslant M$ ise. Yani M, A nın bütün elemanlarını takip eder.

Eğer A nın bir **üst sınırı** diğer bütün üst sınırlarından önce geliyorsa buna A nın **en küçük üst sınırı** ya da A nın supremum'u denir ve sup(A) ile gösterilir.

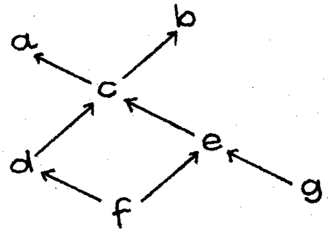
A kümesine **yukarıdan sınırlıdır** denir eğer bir üst sınırı varsa, ve **aşağıdan sınırlıdır** denir eğer bir alt sınırı varsa, hem üst hem de alt sınırı varsa A ya **sınırlıdır** denir.

Örnek : $X = \{a, b, c, d, e, f, a\}$

$B = \{c, d, e\}$ olsun.

a,b ve c B nin üst sınırıdır.

Yalnız f bir alt sınırdır. g alt sınır olamaz.



Çünkü d den $c = \sup(B) \in B$ ve $f = \inf(B) \notin B$ in önce gelmiyor.

Örnek : A reel sayıların sınırlı bir kümesi olsun. Reel sayıların temel teoremine göre inf (A) ve sup(A) vardır.

Örnek 3 : Q rasyonal sayılar cümlesinde

$$B = \{x : x \in Q, \ x > 0, \ 2 < x^2 < 3\}$$

olsun. B $\sqrt{2}$ ile $\sqrt{3}$ arasındaki bütün rasyonel sayıları içine alsın. Bu B kümesinin sonsuz sayıda alt ve üst sınır elemanları vardır. Ama bir tane inf (B) ve sup (B) yoktur. Çünkü $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ Q ya dahil değildir.

Zorn Lemması :

X boş olmayan yarı sıralanmış bir küme olsun. Öyle ki her tam sıralanmış alt kümesi bir üst sınıra sahip olsun. O zaman X in en azından bir maximal elemanı vardır.