MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN ASAL İDEALLER VE ZAYIF ASAL İDEALLER

EMİNE SERAP KARACAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2017

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN ASAL İDEALLER VE ZAYIF ASAL İDEALLER

EMİNE SERAP KARACAN
521113009

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2017

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Emine Serap KARACAN'ın "Hemen Hemen Asal İdealler ve Zayıf Asal İdealler " başlıklı tez çalışması, 12.01.2017 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ünsal TEKİR (Danışman)
Marmara Üniversitesi ....

Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL (Üye)
Marmara Üniversitesi ....

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY (Üye)
Yıldız Teknik Üniversitesi ....

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 30.01.2017 tarih ve 2017/03.02 sayılı kararı ile Emine Serap KARACAN'ın Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programında Yüksek Lisans derecesi alması onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Uğur YAHŞİ

TEŞEKKÜR

Tez dönemim boyunca desteğini esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e ve çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan değerli hocam Arş. Gör. Dr. Emel ASLANKARAYİĞİT UĞURLU'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Tez jüri üyelerim Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL ve Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmamda maddi ve manevi bana destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Ocak, 2017 **Emine Serap KARACAN**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

HEMEN HEMEN ASAL İDEALLER VE ZAYIF ASAL İDEALLER

Tezimizin amacı yeni tip ideal yapılarını özellikleriyle birlikte tanıtmaktır. Bunun için öncelikle ideal tanımı verilmiştir. Bu yeni tip ideal yapıları asal ideal ve asalımsı ideal başlıkları altında incelenmiştir.

İkinci kısımda zayıf asal idealler ve hemen hemen asal idealler, asal idealler başlığı altında tanımlanmıştır. Bu idealler çeşitli halka yapıları altında incelenmiştir.

Son kısımda ise zayıf asalımsı idealler ve hemen hemen asalımsı idealler, asalımsı idealler başlığı altında tanımlanmıştır.

ABSTRACT

ALMOST PRIME IDEALS AND WEAKLY PRIME IDEALS

In this study our main purpose is to introduce the structures of various ideals with their properties. For this, firstly, we give the definition of “ideal”. And we investigate these ideals in domains of “Prime Ideals” and “Primary Ideals”.

If we give some details, we survey “Almost Prime Ideals” and “Weakly Prime Ideals” in domain of “Prime Ideals”. Furthermore, we present these ideals with structures of different rings.

Finally, we examine “Almost Prime Ideals” and “Weakly Prime Ideals” in domain of “Prime Ideals”.

SEMBOLLER ve KISALTMALAR

R	: değişmeli birimli halka
$\mathbb{N}$	: doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_m$	: Tam sayıların mod m kalan sınıflar kümesi
$\mathbb{R}$	: reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: rasyonel sayılar kümesi
$dimR$	: R nin boyutu
$A = B$	: A ve B kümeleri birbirine eşittir.
$A \subseteq B$	: A B nin bir alt kümesidir.
$A \subset B$	: A B nin kendisinden farklı bir alt kümesidir.
$A \nsubseteq B$	: A kümesi B kümesinde içerilmez.
$A - B$	: A kümesinin B kümesinden farkı
$f^{-1}(B)$	: B kümesinin f dönüşümü altındaki ters görüntü kümesi
$\Leftrightarrow$	: gerek ve yeter koşul
$\Rightarrow$	: gerektirmenin ispatı
$\Leftarrow$	: yeterliliğin ispatı
$a\|b$	: a böler b yi
$a \in R$	: a R nin elemanıdır.
$a \notin R$	: a R nin elemanı değildir.
$A \cap B$	: A, B ideallerinin kesişimi
$A \cup B$	: A, B ideallerinin birleşimi
$(A : B)$	: A kolon B
$A \leq B$	: A küçük eşittir B
$I(R)$	: R nin tüm ideallerinin kümesi
$J(R)$	: R nin Jakobson radikali
$Spec(R)$	: R nin tüm asal ideallerinin kümesi
$R[X]$	: R den katsayılı polinimlar halkası
$R[[X]]$	: R den katsayılı polinimlar halkası
0_R	: R nin 0 ideali

1_R	: R nin 1 ideali
$\sqrt{I}$	: I idealinin radikali
$A - B$	: A fark B
$çekf$	: f homomorfizmasının çekirdeği
imf	: f homomorfizmasının görüntüsü
$\langle a \rangle$	: a ile üretilmiş temel ideal
(A)	: A nın ürettiği ideal
π	: doğal homomorfizma
AB	: A ve B ideallerinin çarpımı
S_T	: S nin T de yerelleştirilmesi
$\vee A_\propto$	: $A_\propto$ ların supremumu
$\wedge A_\propto$	: $A_\propto$ ların infimumu
$S \cong T$	: S, T ye izomorftur
$P(X)$	: X in kuvvet kümesi
Δ	: indis kümesi
$Z(S/I)$	: sıfır bölen kümesi
$V(A)$	: A yı kapsayan tüm asal ideallerin kümesi
syf	: sayfa

1. GİRİŞ

Hemen hemen asal ideal kavramı, S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından Noetherian bölgelerin çarpanlarına ayrılma çalışması olarak tanımlanmıştır[7]. Zayıf asal ideal kavramı, sıfır bölenli değişmeli halkaların çarpanlarına ayrılma çalışması olarak A. G. Ağargün, D. D. Anderson ve S. Valdes-Leon tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra ise D. D. Anderson ve E. Smith tarafından çalışılmıştır[3,4]. P R nin bir has ideali olmak üzere her $a, b \in R$ için $ab \in P - P^2$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye hemen hemen asal ideal denir. P R nin bir has ideali olmak üzere her $a, b \in R$ için $0 \neq ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye zayıf asal ideal denir. Her asal ideal bir zayıf asal ideal ve her zayıf asal ideal bir hemen hemen asal idealdir. Zayıf asal idealler ve hemen hemen asal idealler, asal ideallerin genelleştirilmesidir. 0_R idealinin her zaman bir zayıf asal ideal olduğunu dolayısıyla hemen hemen asal ideal olduğunu kolayca görebiliriz. Fakat 0_R ideali $M^2 = 0_R$ olmak üzere (R, M) quasilokal halkasında asal ideal değildir. Buradan zayıf asal ideal ve hemen hemen asal ideallerin asal ideal olmak zorunda olmadıklarını anlayabiliriz.

Daha sonra $n-$hemen hemen asal ideali tanımlanacak ve tersinir bir $n-$hemen hemen asal idealin asal olduğu ispatlanacaktır. I ideali R nin $n-$hemen hemen asal ideali ve S kümesi R nin herhangi bir çarpımsal kapalı alt kümesi olmak üzere $I \cap S = \emptyset$ olacak şekilde $S^{-1}I$ idealinin $n-$hemen hemen asal ideal olduğu gösterilecektir. Ayrıca hemen hemen asal ideallerin örneklerini verip onların genelleştirmesi olan $f-$asal idealler tanımlanacaktır. Bir idealin asal olması için gerekli durumlara benzeyen hemen hemen asal ideal olması için birkaç denk durum gösterilecektir. Ayrıca hemen hemen asal ve zayıf asal idealler arasındaki ilişki açıklanacaktır. I R nin bir tersinir hemen hemen asal ideali ise I asal idealdir. c elemanı R nin sıfırdan farklı birim olmayan bir elemanı olsun. O zaman (c) R nin hemen hemen asal ideali ve $\big(0:(c)\big) \subseteq (c)$ oluyorsa (c) asal idealdir. $M^2 \subseteq I \subseteq M$ olacak şekilde R nin bir I ideali için (R, M) quasilokal halkasında I nın hemen hemen asal ideal olmasının gerek ve yeter koşulu $M^2 = I^2$ olmasıdır. R halkasının her has idealinin hemen hemen asal ideal olmasının gerek ve yeter koşulu R nin ya Von Neumann regüler halkası ya da (R, M) nin $M^2 = 0$ olacak şekilde quasilokal halka olmasıdır. Hemen hemen asal ideallerin homomorfizmalar, yerelleştirmeler ve diğer halka yapıları altındaki durumları araştırılacaktır.

Sonraki bir bölümde ise her has ideali hemen hemen asal ideallerin çarpımı olan Noetherian halkalar tanımlanacaktır. Ayrıca her has temel ideali hemen hemen asal ideallerin çarpımı olan quasilokal bölgeler sınıflandırılacaktır. Hemen hemen asal ideallerin bir V değer bölgesinde asal idealler gibi olduğu, ancak bir Prüfer bölgesinde böyle bir durum olmadığı bir örnekle gösterilecektir. Hemen hemen asal elemanlar tanımlanıp ve örnekler verilecektir.

İdealleştirme Metodu ile hemen hemen asal idealler için örneklerin nasıl oluşturulabileceği gösterilecektir. A bir R −modül iken $R(A) = R \oplus A$ ve

$$(a, m)(b, n) = (ab, an + bm)$$

oluyorsa $R(A)$ değişmeli bir halkadır. $I \oplus A$ nın hemen hemen asal ideal olmasının gerek ve yeter koşulu I idealinin hemen hemen asal olmasıdır. Ayrıca $ab \in I^2$ olacak şekilde $a, b \in R$ ve $n, m \in A$ için $an + bm \in IA$ ise $a \in I$ veya $b \in I$ olmasıdır. Polinom halkalar ve quasilokal halkalar ile ilgili örnekler verilecektir.

Son olarak hemen hemen asalımsı idealler ve zayıf asalımsı idealleri özellikleriyle tanımlanacaktır. Bu ideallerin bazı karakterizasyonları verilecektir.

1. 1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 1. 1. 1. R boştan farklı bir küme ve $(R, +, \cdot)$ iki işlemli cebirsel bir yapı olmak üzere her $a, b, c \in R$ için,

1) $a + b = b + a$,

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

3) Her $a \in R$ için $a + 0_R = a$ olacak şekilde bir $0 = 0_R \in R$ vardır,

4) Her $a \in R$ için $a + (-a) = 0$ olacak şekilde bir $(-a) \in R$ vardır,

5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

koşulları sağlanıyorsa R ye halka denir.

Tanım 1. 1. 2. $(R, +, \cdot)$ bir halka olmak üzere;

1) R halkasında “ $\cdot$ ” işleminin değişme özelliği varsa yani her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise R ye değişmeli halka denir.

2) R halkasında " $\cdot$ " işleminin birim elemanı varsa yani her $a \in R$ için $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ olacak şekilde bir $1 \in R$ varsa R ye birimli halka denir.

3) Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa halkaya cisim, eğer bu halka değişmeli değilse bölümlü halka denir.

Bundan sonra "$a \cdot b$" ifadesini "ab" şeklinde göstereceğiz.

Bu tezde halkalar hep birimli ve değişmeli halka olacaktır. Halka sadece 0_R dan ibaret ise yani $0_R = 1_R$ ise halkaya trivial halka denir.

Bundan sonra "0_R" ifadesini "0" ve "1_R" ifadesini "1" şeklinde göstereceğiz.

Tanım 1. 1. 3. $a \in R$ için $ab = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ bulunabilirse a ya halkanın bir sıfır böleni denir. 0 dan başka hiçbir sıfır böleni bulunmayan halkaya da tamlık bölgesi denir.

R de tersi mevcut elemanlara birimsel elemanlar denir. Halkada birimsel elemanlar bir çarpımsal grup oluştururlar. Bu gruba halkanın birim grubu denir ve U_R ile gösterilir. Sıfır bölenlerin birimsel olamayacağı açıktır.

Tanım 1. 1. 4. $a \in R$ için $a^k = 0$ olacak şekilde bir $k > 0$ tam sayısı bulunabilirse a elemanına nilpotent, $a^2 = a$ ise idempotent denir.

Tanım 1. 1. 5. $0 \neq p \in R$ olmak üzere p birimsel olmayan bir eleman olsun.

1) $a, b \in R$ için $p = ab$ olması a veya b nin R de birimsel olmasını gerektirirse p ye R nin indirgenemez (atom) elemanı denir.

2) $a, b \in R$ için $p|ab$ olması $p|a$ veya $p|b$ olmasını gerektirirse p ye R nin asal elemanı denir.

Tanım 1. 1. 6. R bir tamlık bölgesi olsun. R de sıfırdan ve birimsel elemanlardan farklı her eleman indirgenemez elemanların bir çarpımı olarak yazılabiliyor ve bu yazılış sıra ve ilgililik düşünmeden tek türlü ise R ye Tek türlü Asal Çarpanlara ayrılabilen bölge (TAÇ) denir.

1. 2. İdealler

Tanım 1. 2. 1. $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

1) Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$,

2) Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ ise I ya R nin ideali denir.

$0 = \{0_R\}$ ve R nin kendisi her zaman bir ideal olduğundan trivial olmayan her halkanın en az iki ideali vardır. R nin kendinden farklı ideallerine has ideal denir. R halkasının tüm ideallerinin kümesini $I(R)$ ile gösterelim. Kapsama bağıntısına göre $I(R)$ sıralı bir kümedir.

Tanım 1. 2. 2. A kümesi R nin bir alt kümesi olsun. R nin A yı kapsayan en küçük idealine A nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. Özel olarak $A = \emptyset$ ise $(A) = 0$ olur. $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise $(A) = (a)$ ya a nın ürettiği temel ideal denir.

Önerme 1. 2. 3. I R nin bir ideali olsun. $\sqrt{I} = \{r \in R\text{: bir } n \in N \text{ için } r^n \in I\}$ R nin I yı kapsayan bir idealidir. Bu ideale I idealinin radikali denir.

İspat: $I \subseteq \sqrt{I}$ olduğu açıktır. Her $a, b \in \sqrt{I}$ için $a - b \in \sqrt{I}$ olduğunu gösterelim. $a, b \in \sqrt{I}$ olduğundan bir $m \in \mathbb{N}$ için $a^m \in I$ ve bir $n \in \mathbb{N}$ için $b^n \in I$ dır. Binom açılımını kullanarak $(a-b)^{m+n-1} = \sum_{k=0}^{m+n-1}(-1)^k\binom{n+m-1}{k}a^{m+n-1-k}b^k$ dir. Toplamda her a^ib^j terimi için $i + j = m + n - 1$ olduğundan $i \geq m$ veya $j \geq n$ olmalıdır. Aksi halde $i \leq m - 1$ ve $j \leq n - 1$ olsaydı $i + j \leq m + n - 2$ olurdu. $i \geq m$ ise $a^i \in I$ olurken $j \geq n$ ise $b^j \in I$ olduğu göz önüne alınarak binom açılımındaki her terimin dolayısıyla toplamın $(a-b)^{m+n-1} \in I$ olduğu ve böylece $a - b \in \sqrt{I}$ olacağı görülür. $a^m \in I$ olduğundan her $r \in R$ için $(ra)^m = r^m a^m \in I$ olur. Yani $ra \in \sqrt{I}$ elde edilir.

Sonuç 1. 2. 4. $I = 0$ ideali için $\sqrt{0} = \{r \in R\text{: bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n = 0\}$ ideali halkanın tüm nilpotent elemanlarının oluşturduğu kümedir. Bu ideale nil radikal veya asal radikal denir**[1].**

2. ASAL İDEALLER

Bu bölümün amacı hemen hemen asal idealleri tanımlamak, hemen hemen asal ideallerin bazı nitelemelerini ve örneklerini vermektir. Ayrıca bu ideallerin temel özelliklerinin bir kısmını belirtmektir. Bütün bunlardan önce asal idealler, zayıf asal idealler ve hemen hemen asal idealler arasındaki ilişkiyi göstermek yararlı olacaktır. Bunun için bir idealin asal olmasını gerektiren durumlar gösterilecektir.

Tanım 2. 1. P R nin kendinden farklı (has) bir ideali olsun. $ab \in P$ olacak şekilde $a, b \in R$ için $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye asal ideal denir. R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi $Spec(R)$ ile gösterilir.

Örnek 2. 2. R de bir $p \in R$ elemanının asal olması için gerek ve yeter koşul (p) nin bir asal ideal olmasıdır.

Çözüm: $p \in R$ bir asal eleman ve $a, b \in R$ olsun. $ab \in (p)$ ise $ab = pc$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır. p asal olduğundan $p|ab$ sağlanır.

$\Rightarrow p|a$ veya $p|b$ olur.

$\Rightarrow a \in (p)$ veya $b \in (p)$ bulunur.

Şu halde (p) bir asal idealdir. Tersine (p) nin bir asal ideal olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ olmak üzere $p|ab$ sağlanır.

$\Rightarrow ab \in (p)$ olur.

$\Rightarrow a \in (p)$ veya $b \in (p)$ dır.

$\Rightarrow p|a$ veya $p|b$ bulunur. Böylece p bir asal elemandır[1].

Tanım 2. 3. R nin boştan farklı A ve B alt kümeleri için $(A:B) = \{x \in R | xB \subseteq A\}$ olsun. A bir ideal ise $(A:B)$ de bir idealdir. $B = \{r\}$ için $(A:\{r\})$ idealini $(A:r)$ olarak yazarız. $\emptyset \neq S \subseteq R$ olmak üzere her $x, y \in S$ için $xy \in S$ ise S ye çarpımsal kapalı küme denir. Bu çalışmada $0 \notin S$ kabul edeceğiz.

P idealinin asal olması için birçok denk durum vardır. Örneğin P nin asal olması için gerek ve yeter koşul I ve J R nin idealleri olmak üzere $IJ \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasıdır.

Teorem 2. 4. $P \subseteq R$ has ideali için aşağıdakiler denktir:

1) P asaldır.

2) Her $x \in R - P$ için $(P:x) = P$ dir.

3) $AB \subseteq P$ olacak şekilde R nin bütün A, B idealleri için $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ dir.

4) $R - P$ çarpımsal kapalıdır.

5) R/P tamlık bölgesidir.

İspat: 1) ⇒ 2): $x \in R - P$ olsun. $P \subseteq (P: x)$ kapsaması açıktır. $y \in (P: x)$ olsun. O halde $xy \in P$ olur. Bu durumda P asal ideal ve $x \notin P$ olduğundan $y \in P$ dir. Dolayısıyla $(P: x) \subseteq P$ dir.

2) ⇒ 1): $a, b \in R$ için $ab \in P$ olsun. O zaman $a \in P$ veya $a \in R - P$ dir. Birinci durumda $a \in P$ olduğundan kolayca P nin asal ideal olduğu görülür. İkinci durumda ise kabulümüzden $b \in (P: a) = P$ olur.

1) ⇒ 3): P asal ideal olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ için $ab \in AB \subseteq P$ elde edilir. P asal ideal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ sonucu çıkar. $a \notin P$ ise b elemanının keyfi seçimi ile $B \subseteq P$ elde edilir.

3) ⇒ 1): $a, b \in R$ için $ab \in P$ olsun. Buradan $ab \in P$ ise $(ab) \subseteq P$ olur. $(a)(b) = (ab)$ olduğu için kabulümüzden $(a) \subseteq P$ veya $(b) \subseteq P$ olur. Buradan $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir.

1) ⇔ 4): Asal ideal olma koşulunun karşıt tersinden $a \in R - P$ ve $b \in R - P$ ise $ab \in R - P$ olur.

1) ⇒ 5): $\bar{R} = R/P$ ve $\bar{a}\bar{b} = \bar{0} = 0_{R/P} = P$ olacak şekilde $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{R}$ olsun. Buradan $a, b \in R$ olacak şekilde $\bar{a} = a + P$ ve $\bar{b} = b + P$ olur.

$$\bar{a}\bar{b} = (a + P)(b + P) = ab + P = \bar{0} = P$$

olacağından $ab \in P$ olur. Bu durumda P asal ideal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ dir. Böylece $\bar{a} = \bar{0}$ veya $\bar{b} = \bar{0}$ elde edilir.

5) ⇒ 1): $rs \in P$ olacak şekilde $r, s \in R$ olsun. Bu durumda $\bar{r}\bar{s} = \bar{0}$ olacağından $\bar{r} = \bar{0}$ veya $\bar{s} = \bar{0}$ elde ederiz. Böylece $r \in P$ veya $s \in P$ sonucuna ulaşırız[13].

Önerme 2. 5. $P \subset R$ idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul R/P bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır.

İspat: (⇒): P bir asal ideal olsun. $P \neq R$ olduğundan R/P bölüm halkası trivial değildir. $a \in R$ olmak üzere $a + P \in R/P$ bir sıfır bölen olsa $(a + P)(b + P) = 0_{R/P}$ olacak şekilde bir $P \neq b + P \in R/P$ bulunabilir ve $(a + P)(b + P) = ab + P = 0_{R/P}$ den $ab \in P$ bulunurdu. P yi asal ideal ve $b \notin P$ kabul ettiğimizden $a \in P$ yani aldığımız $a + P$ sınıfının sıfırın sınıfı olduğu ve R/P nin bir tamlık bölgesi olduğu anlaşılır.

(⇐): R/P bir tamlık bölgesi ve $a, b \in R$, $ab \in P$ olsun.

$$0_{R/P} = ab + P = (a + P)(b + P)$$

olduğundan $a + P = P$ veya $b + P = P$ yani $a \in P$ veya $b \in P$ elde edilir.

Sonuç 2. 6. R nin bir tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşul (0) nin bir asal ideal olmasıdır[1].

2. 1. Maksimal İdealler

Tanım 2. 1. 1. M R nin kendinden farklı (has) bir ideali olsun. R nin M yi kapsayan M den başka hiçbir has ideali yoksa M ye maksimal ideal denir.

Önerme 2. 1. 2. $M \subset R$ has idealinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul R/M bölüm halkasının bir cisim olmasıdır.

Sonuç 2. 1. 3. Her maksimal ideal asaldır.

Her asal idealin maksimal olduğu doğru değildir. Gerçekten $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasında (0) ideali asal fakat maksimal ideal değildir.

Önerme 2. 1. 4. M R nin bir ideali olmak üzere M nin maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $x \notin M$ için $1 - rx \in M$ olacak şekilde bir $r \in R$ nin bulunabilmesidir.

Önerme 2. 1. 5. Trivial olmayan her R de en az bir maksimal ideal vardır.

Sonuç 2. 1. 6. $J \subset R$ bir has ideal ise J yi kapsayan bir maksimal ideal vardır.

Sonuç 2. 1. 7. $a \in R$ elemanının birimsel olması için gerek ve yeter koşul a nın R nin hiçbir maksimal idealinde olmamasıdır.

Tanım 2. 1. 8. R nin tam bir tane maksimal ideali varsa R ye yerel (lokal) halka denir. M tek maksimal ise R/M cismine de kalıntı (rezidü) cismi denir.

Tanım 2. 1. 9. R nin tüm maksimal ideallerinin arakesitine Jacobson radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir. Yani $J(R) = \bigcap_{M\ mak.ideal} M$ dir.

Yerel bir halkanın Jacobson radikali tek maksimal idealidir.

Tanım 2. 1. 10. $(M\,,+)$ bir değişmeli grup olsun. M deki elemanların R deki elemanlarla skaler çarpımı olan $R \times M \to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa M ye "R üzerinde bir modül" veya kısaca R $-$modül denir.

1. Her $r \in R$ ve her $m, m' \in M$ için $r(m + m') = rm + rm'$,
2. Her $r, r' \in R$ ve her $m \in M$ için $(r + r')m = rm + r'm$,
3. Her $r, r' \in R$ ve her $m \in M$ için $(rr')m = r(r'm)$,
4. Her $m \in M$ için $1_R m = m$.

Nakayama Lemma: M sonlu üretilmiş bir R $-$modül olsun. $I \subseteq J(R)$ olacak şekilde R nin I ideali için $M = IM$ ise $M = 0$ dır[1].

2. 2. Zayıf Asal İdealler ve Hemen Hemen Asal İdealler

Tanım 2. 2. 1. P R nin bir has ideali olsun. Her $a, b \in R$ için $0 \neq ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye zayıf asal ideal denir.

Tanım 2. 2. 2. P R nin bir has ideali olsun. Her $a, b \in R$ için $ab \in P - P^2$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye hemen hemen asal ideal denir.

Asal idealin zayıf asal ideal, zayıf asal idealin de hemen hemen asal ideal olduğu açıktır. $\{0\}$ her zaman zayıf asal ideal dolayısıyla hemen hemen asal idealdir. Hatırlayacağımız gibi $\{0\}$ ın asal ideal olması için gerek ve yeter koşul R nin tamlık bölge olmasıdır. Buna göre zayıf asal ideal ve hemen hemen asal ideal, asal ideal olmak zorunda değildir. Zayıf asal idealler A. G. Ağargün, D. D. Anderson ve S. Valdes-Leon tarafından tanımlanmıştır[3]. Hemen hemen asal idealler ise S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından tanımlanmıştır[7]. Bir idempotent ideal I $(I = I^2)$ hemen hemen asal idealdir. Şimdi trivial olmayan hemen hemen asal idealin asal olmadığını gösteren bir örnek verelim:

R quasi-lokal halkasını tek maksimal ideali M olan değişmeli bir halka olarak kabul edelim ve (R, M) olarak gösterelim.

Örnek 2. 2. 3. (R, M) $M^2 = 0$ olacak şekilde bir quasi-lokal halka olsun. O zaman R nin her I has ideali zayıf asal ideal dolayısıyla hemen hemen asal idealdir. $ab \in I - \{0\}$ olsun. $ab \in M$ ve M asal ideal olduğu için $a \in M$ veya $b \in M$ dir. $M^2 = 0$ ve $ab \neq 0$ olduğundan ya a ya da b elemanı M de bulunmaz. $a \notin M$ ise a birim elemandır. Fakat $b = a^{-1}(ab) \in I$ dir. $I \subset M$ ise M R nin tek asal ideali olduğundan I asal değildir.

Bu örneği somut bir şekilde ifade edelim.

Örnek 2. 2. 4. K bir cisim, $R = K[X, Y]/(X, Y)^2$ ve $I = (X^2, Y)/(X, Y)^2$ olsun. $(X, Y)/(X, Y)^2$ R nin tek asal ideali olduğundan I asal değildir. I ideali R nin zayıf asal ideali ve hemen hemen asal idealidir.

Aşağıda verilen lemmadan sonra Teorem 2. 4. ün hemen hemen asal ideallere genelleştirmesi elde edilecektir.

Lemma 2. 2. 5. P, A ve B kümeleri R nin keyfi idealleri olsun. $P \subseteq A \cup B$ ise $P \subseteq A$ veya $P \subseteq B$ olur. Özel olarak $P = A \cup B$ ise $P = A$ veya $P = B$ dir.

İspat: Sonucun yanlış olduğunu varsayalım. Bu durumda $a \notin B$ ve $b \notin A$ olacak şekilde $a, b \in P$ vardır. O zaman $a \in A$ ve $b \in B$ olur. Fakat $a + b \in P \subseteq A \cup B$ olduğundan $a + b \in A$ veya $a + b \in B$ olur. O zaman her iki çelişkide de ikinci durumda $a \in B$ iken ilk durumda $b \in A$ olur. İkinci ifadede $P = A \cup B$ için $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ koşulunun sağlanması yeterlidir.

Teorem 2. 2. 6. R nin bir I has ideali için aşağıdakiler denktir:

1) I hemen hemen asaldır.
2) $x \in R - I$ için $(I:x) = I \cup (I^2:x)$.
3) $x \in R - I$ için $(I:x) = I$ veya $(I:x) = (I^2:x)$.
4) $AB \subseteq I$ olan R nin her A ve B idealleri için $AB \nsubseteq I^2$ koşulu sağlanıyorsa $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ olur.

İspat: 1) ⇒ 2): $x \in R - I$ için $y \in (I:x)$ olsun. Buradan $xy \in I$ olur. $xy \notin I^2$ ise I hemen hemen asal olduğundan $y \in I$ olur. Buradan $(I:x) \subseteq I \cup (I^2:x)$ elde ederiz. $I \cup (I^2:x) \subseteq (I:x)$ doğru olduğu açıktır.

2) ⇒ 3): Bu gerektirmeyi Lemma 2. 2. 5. den elde ederiz.

3) ⇒ 4): $AB \subseteq I$ olacak şekilde $A \nsubseteq I$ ve $B \nsubseteq I$ için A ve B kümeleri R nin idealleri olsun. $AB \subseteq I^2$ olduğunu göstereceğiz. İlk olarak $a \in A - I$ olduğunu varsayalım. O zaman $aB \subseteq I$ olur. Dolayısıyla $B \subseteq (I:a)$ elde ederiz. $B \nsubseteq I$ olduğundan $(I:a) \neq I$ olur. Bundan dolayı $(I:a) = (I^2:a)$ ve $B \subseteq (I:a) = (I^2:a)$ olur. Buradan $aB \subseteq I^2$ elde ederiz. $a \in A \cap I$ ve $b \in B$ olsun. $b \in I$ ise $ab \in I^2$ olur. $b \in B - I$ ise ilk varsayımımızın sonucuna göre $bA \subseteq I^2$ olur. Bu iki varsayımdan $ab \in I^2$ elde ederiz. Bundan dolayı $AB \subseteq I^2$ olur.

4) ⇒ 1): $xy \in I - I^2$ olacak şekilde $x, y \in R$ olsun. O zaman (x) ve (y) kümeleri R nin idealleridir ve $(x)(y) = (xy) \subseteq I$ olur. Fakat $(x)(y) \nsubseteq I^2$ dır. Dolayısıyla hipotezden $(x) \subseteq I$ veya $(y) \subseteq I$ olur. Buradan $x \in I$ veya $y \in I$ sonucuna ulaşırız.

Tanım 2. 2. 7. S kümesi R nin bir alt kümesi olsun. $a, b \in S$ için

$$ab \in S \text{ veya } ab \in (R - S)^2$$

oluyorsa S ye hemen hemen çarpımsal kapalı denir.

R nin bir I has idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul $R - I$ nın çarpımsal kapalı olmasıdır.

R nin bir I idealinin zayıf asal olmasının gerek ve yeter koşulu $R - I$ nın $a, b \in R - I$

için $ab \in R - I$ veya $ab = 0$ olmak üzere zayıf çarpımsal kapalı olmasıdır.

R nin bir I idealinin hemen hemen asal olmasının gerek ve yeter koşulu $R - I$ nın hemen hemen çarpımsal kapalı olmasıdır.

Krull'a ait bir sonucu ifade edelim. S R nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olmak üzere $I \cap S = \emptyset$ olacak şekilde I R nin bir maksimal ideali ise I asal idealdir. Bu durum zayıf çarpımsal küme $S(a, b \in S$ olmak üzere $ab \in S \cup \{0\})$ veya hemen hemen çarpımsal kapalı küme için geçerli olmaz.

Örnek 2. 2. 8. $R = \frac{Z}{16Z}$, $I = \frac{8Z}{16Z}$ ve $S = \{\overline{1}, \overline{4}\}$ olsun. O zaman S kümesi hem zayıf çarpımsal kapalı hem de hemen hemen çarpımsal kapalıdır. I ideali $I \cap S = \emptyset$ olacak şekilde maksimaldir. Fakat I ideali $\overline{2} \times \overline{4} \in I - I^2$ iken $\overline{2} \notin I$ ve $\overline{4} \notin I$ olduğundan hemen hemen asal ve zayıf asal ideal değildir.

Tanım 2. 2. 9. $n \geq 2$ olsun. P ideali R nin bir has ideali olmak üzere $ab \in P - P^n$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye n −hemen hemen asal ideal denir.

2 −hemen hemen asal ideal, hemen hemen asal ideal ile aynı şeydir. $n \geq 2$ için bir $(n+1) -$ asal ideal, n −asal idealdir.

Teorem 2. 2. 6. da hemen hemen asal idealleri (2 −hemen hemen asallar) karakterize ettik. Sıradaki teoremde n −hemen hemen asal idealleri karakterize edeceğiz. İspat hemen hemen aynıdır.

Teorem 2. 2. 10. I ideali R nin bir has ideali olmak üzere aşağıdakiler denktir:

1) I ideali n −hemen hemen asaldır.

2) $x \in R - I$ için $(I: x) = I \cup (I^n: x)$.

3) $x \in R - I$ için $(I: x) = I$ veya $(I: x) = (I^n: x)$.

4) $AB \subseteq I$ olacak şekilde R nin A ve B idealleri için $AB \nsubseteq I^n$ koşulu sağlanıyorsa $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ olur.

İspat: 1) ⇒ 2): $x \in R - I$ olsun. $y \in (I: x)$ olsun. Dolayısıyla $xy \in I$ olur. $xy \in I^n$ ise $y \in (I^n: x)$ dir. $xy \notin I^n$ ise $y \in I$ dir. Dolayısıyla $(I: x) \subseteq I = (I^n: x)$ dir. Diğer kapsama her zaman geçerlidir.

2) ⇒ 3): Bunu Lemma 2. 2. 5. ten elde edebiliriz.

3) ⇒ 4): A ve B R nin idealleri olmak üzere $AB \subseteq I$ olacak şekilde $A \nsubseteq I$ ve $B \nsubseteq I$ olsun. $AB \subseteq I^n$ olduğunu göstereceğiz. $a \in A$ olsun. İlk varsayımdan $a \notin I$ olur. O zaman $aB \subseteq I$ olur. Buradan $B \subseteq (I: a)$ elde ederiz. $B \nsubseteq I$ olduğundan $(I: a) = (I^n: a)$

olur. Buradan $aB \subseteq I^n$ elde ederiz. İkinci olarak $a \in A \cap I$ olduğunu varsayalım. $a' \in A - I$ olsun. O zaman $a + a' \in A - I$ olur. İlk varsayımdan $a'B$ ideali $(a + a')B \subseteq I^n$ olur. $b \in B$ olsun. O zaman $a'b \in I^n$ ve $(a + a')b \in I^n$ olur. Buradan $ab \in I^n$ elde ederiz. $AB \subseteq I^n$ sonucuna ulaşırız.

4) $\Rightarrow$ 1): $ab \in I - I^n$ olsun. Buradan $(a)(b) \nsubseteq I^n$ koşuluyla $(a)(b) \subseteq I$ olur. Bu durumda $(a) \subseteq I$ veya $(b) \subseteq I$ dır. Yani $a \in I$ veya $b \in I$ dır.

Tanım 2. 2. 11. $I(R)$ kümesi R nin bütün ideallerinin kümesi ve f bir fonksiyon olsun. $f: I(R) \to I(R) \cup \{\phi\}$ tanımlayalım. Bir $x, y \in R$ olmak üzere $xy \in I - f(I)$ için $x \in I$ veya $y \in I$ oluyorsa R nin I has idealine f $-$asal denir.

Örnek 2. 2. 12. $f(I)$ nın özel kümeler alınması halinde aşağıdakiler elde edilir:

1) $f_\phi(J) = \phi$ olacak şekilde $f_\phi: I(R) \to I(R) \cup \{\phi\}$ tanımlayalım. Bu durumda f_ϕ $-$asal ideali bir asal idealdir.
2) $f_0(J) = 0$ tanımlayalım. Bu durumda f_0 $-$ asal ideali bir zayıf asal idealdir.
3) $f_2(J) = J^2$ tanımlayalım. Bu durumda f_2 $-$asal ideali hemen hemen asal idealdir.
4) $n \geq 2$ olmak üzere $f_n(J) = J^n$ tanımlayalım. Bu durumda f_n $-$asal ideali n $-$hemen hemen asal idealdir.

Aşağıdaki teorem hemen hemen asal ideallerin ve zayıf asal ideallerin ilişkisini gösterir.

Teorem 2. 2. 13. I nın R nin hemen hemen asal ideali olması için gerek ve yeter koşul I/I^2 nin R/I^2 halkasında zayıf asal ideal olmasıdır.

İspat: (⇒): I nın hemen hemen asal ideal olduğunu varsayalım. $\bar{0} \neq (\alpha + I^2)(\beta + I^2)$, R/I^2 de I/I^2 idealinin elemanı olsun. O zaman $\alpha\beta \notin I^2$ olacak şekilde $\alpha\beta \in I$ olur. I hemen hemen asal ideal olduğundan $\alpha \in I$ veya $\beta \in I$ dır. Buradan I/I^2 zayıf asal olur.

(⇐): I/I^2 idealinin R/I^2 de zayıf asal ideal olduğunu varsayalım. $\alpha\beta \in I - I^2$ olsun. Bundan dolayı $\bar{0} \neq (\alpha + I^2)(\beta + I^2) \in I/I^2$ olur. I/I^2 zayıf asal ideal olduğu için $(\alpha + I^2) \in I/I^2$ veya $(\beta + I^2) \in I/I^2$ olur. Buradan $\alpha \in I$ veya $\beta \in I$ olur. Böylece I nın hemen hemen asal ideal olduğunu elde ederiz.

Şimdi homomorfizmalar, yerelleştirmeler ve diğer halka yapıları altında hemen hemen asal idealleri inceleyelim.

Teorem 2. 2. 14. P R nin bir hemen hemen asal ideali olmak üzere;

1) $I \subseteq P$ olacak şekilde I R nin bir ideali ise P/I R/I nın hemen hemen asal idealidir.

2) $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde S R nin çarpımsal kapalı kümesi ise P_S ideali R_S de hemen hemen asaldır.

İspat: 1): $(a+I)(b+I) \in (P/I) - (P/I^2)$ olsun. Buradan $ab + I \in P/I - (P^2 + I)/I$ olur. O zaman $ab \in P$ ve $ab \notin P^2 + I$ dır. Buradan $ab \notin P^2$ dir. P hemen hemen asal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ dir. Buradan $a + I \in P/I$ veya $b + I \in P/I$ elde ederiz. Böylece P/I nın R/I da hemen hemen asal ideal olduğu sonucuna ulaşırız.
2): $xy/st = (x/s)(y/t) \in S^{-1}P - S^{-1}P^2$ olacak şekilde $x, y \in R$ ve $s, t \in S$ olsun. O zaman $uxy \in P$ olacak şekilde $u \in S$ vardır. S nin herhangi bir w elemanı için $wxy \notin P^2$ dir. Buradan $uxy \in P - P^2$ dır. P hemen hemen asal ideal olduğundan $ux \in P$ veya $y \in P$ dır. Buradan $x/s \in S^{-1}P$ veya $y/t \in S^{-1}P$ olur. $S^{-1}P$ nin $S^{-1}R$ de hemen hemen asal ideal olduğu sonucuna ulaşırız.

Teorem 2. 2. 14. zayıf asal idealler için de geçerlidir. P R de asal ideal ve K R nin alt halkası ise $P \cap K$ K nın asal idealidir. P R de zayıf asal idealse ve K R nin alt halkası ise $P \cap K$ K nın zayıf asal idealidir. Bununla birlikte bu hemen hemen asal idealler için doğru değildir. Bununla ilgili örnekleri inceleyelim.

Örnek 2. 2. 15. $R = \bar{Z}$ bütün cebirsel tamsayıların halkası olsun. Z de (2) ve (3) ideallerini düşünelim. $\bar{Z}$ halkası Z üzerinde integral olduğundan $M \cap Z = (2)$ ve $N \cap Z = (3)$ olacak şekilde $\bar{Z}$ nin M ve N maksimal idealleri vardır. M ve N idempotenttir. Aslında R nin bir I radikal ideali idempotenttir. $i \in R$ şartı için $\sqrt{i} \in R$ ve $(\sqrt{i})^2 = i \in I$ dır. Buradan $\sqrt{i} \in I$ olur. $I = I^2$ dir. $M \cap N = MN$ idempotenttir ve dolayısıyla R nin hemen hemen asal idealidir[13]. Fakat temel ideal ancak ve ancak asal olursa hemen hemen asal olduğundan $(M \cap N) \cap Z = (2) \cap (3) = (6)$ hemen hemen asal değildir(Bakınız, Teorem 2. 2. 21.).

Aşağıdaki teorem S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından ispatlanmıştır[7]. R Noetherian ise R regülerdir ve R nin her maksimal M ideali için R_M regüler bir yerel halkadır. Yani M_M kümesi M_M elemanlarının yüksekliğiyle oluşturulur.

Teorem 2. 2. 16. R regüler bir bölge olsun. R nin I ideali ancak ve ancak I asal ise hemen hemen asaldır.

Teorem 2. 2. 14. ün zayıf asal idealler için ispatı D. D. Anderson ve E. Smith tarafından yapılmıştır[4]. Teorem 2. 2. 14. 2) nin bir R bölgesi için ispatı S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından yapılmıştır[7]. Teorem 2. 2. 14. 1) e göre $I \subseteq P$ için ancak ve ancak $\bar{P} = P/I$ ideali $\bar{R} = R/I$ nın asal ideali ise P ideali R nin bir asal idealidir(Correspondence Teoremine göre $\bar{R}/\bar{P}$ kümesi R/P ye izomorftur). $\bar{P}$ hemen hemen asal ideal ise P de hemen hemen asaldır. Ancak tersi doğru değildir. Aslında herhangi bir I has ideali için $I/I = 0$ ideali R/I da zayıf asal dolayısıyla hemen hemen asaldır.

Örnek 2.2.17. $R = K[X, Y]$, K bir cisim, $P = (X, Y^2)$ ve $I = (X, Y)^2$ olsun. P/I hemen hemen asal olacak şekilde $P \supset I$ dır. (Çünkü $(X, Y)/I$ maksimal idealinin karesi $\{0\}$ olacak şekilde R/I quasi-lokal halkadır.) Fakat P hemen hemen asal değildir. Çünkü P hemen hemen asal olsaydı $P_{(X,Y)}$ ideali $R_{(X,Y)}$ de hemen hemen asal olurdu. $R_{(X,Y)}$ yi regüler yerel halka olarak düşünürsek $P_{(X,Y)}$ asal olmazdı, hemen hemen asal ideal olurdu. Teorem 2. 2. 16. ya göre regüler bir yerel halkada hemen hemen asal ideal asaldır.

S R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olmak üzere $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde P R nin bir asal ideali ise P_S R_S nin asal idealidir ve $P_S \cap R = P$ dir. $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde P hemen hemen asal ise P_S ideali R_S de hemen hemen asaldır[13].

Şimdi de $P_S \cap R \neq P$ olduğunu göstereceğiz.

Örnek 2. 2. 18. $P = \{0\}$ ise $P_S \cap R = 0_S \cap R$ dir ve bu küme P yi içerir. $R = Z/Z_6$ ve $S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ düşünelim. Böylece $0_S \cap R = \{\text{bir } s \in S \text{ için } x \in Z/Z_6 | xs = \bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ elde ederiz.

Lemma 2. 2. 19. R_1 ve R_2 herhangi iki değişmeli halka ve A ideali R_1 in has ideali olsun. A nın R_1 de hemen hemen asal olması için gerek ve yeter koşul $A \times R_2$ nin $R_1 \times R_2$ de hemen hemen asal olmasıdır.

İspat: (⇒): $(a_1, b_1)(a_2, b_2) \in (A \times R_2) - (A \times R_2)^2$ olsun. Buradan

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) \in (A \times R_2) - (A \times R_2)^2$$

olur. $(R_2)^2 = R_2$ olduğundan $(A \times R_2) - (A \times R_2)^2 = (A - A^2) \times R_2$ olur. O zaman $a_1 a_2 \in A - A^2$ dır. Dolayısıyla $a_1 \in A$ veya $a_2 \in A$ dır.

(⇐): $A \times R_2$ nin hemen hemen asal ideal olduğunu varsayalım. A nın hemen hemen asal olduğunu göstereceğiz. $ab \in A - A^2$ olsun. O zaman $(a, 1)(b, 1) \in (A - A^2) \times R_2$ olur. Fakat $(A - A^2) \times R_2 = (A \times R_2) - (A \times R_2)^2$ dir. $A \times R_2$ hemen hemen asal olduğundan $(a, 1) \in A \times R_2$ veya $(b, 1) \in A \times R_2$ dir. Buradan $a \in A$ veya $b \in A$ olur.

Teorem 2. 2. 20. R_1 ve R_2 herhangi iki değişmeli halka olsun. $R_1 \times R_2$ nin bir ideali ancak ve ancak aşağıda verilen üç formdan birine sahipse hemen hemen asaldır.

1) I R_1 nin hemen hemen asal ideali olmak üzere $I \times R_2$ ideali.

2) J R_2 nin hemen hemen asal ideal olmak üzere $R_1 \times J$ ideali.

3) I R_1 nin idempotent ideali ve J R_2 nin idempotent ideali olmak üzere $I \times J$ ideali.

İspat: A $R_1 \times R_2$ nin hemen hemen asal ideali olsun. A $I \times R_2$ veya $R_1 \times J$ formunda bir ideal ise I ideali R_1 in J de R_2 nin has idealidir. Bu durumda biz Lemma 2. 2. 19. u kullanabiliriz. I ve J has idealler olmak üzere $A = I \times J$ ve $\alpha \in I - I^2$ olsun.

$$A - A^2 = \big((I - I^2) \times J\big) \cup (I \times (J - J^2))$$

olduğundan $(\alpha, 0) \in A - A^2$ olur. Fakat $(\alpha, 0) = (\alpha, 1)(1,0)$ dır. Buradan $(\alpha, 1) \in A$ veya $(1,0) \in A$ olur. $(\alpha, 1) \in A$ ise $1 \in J$ dir. $(1,0) \in A$ ise $1 \in I$ dır. Bu durum I ve J nin has idealler olmasıyla çelişir. Bundan dolayı $I - I^2$ boş kümedir ve I nın idempotent olduğu sonucu çıkar. Benzer şekilde J nin de idempotent olduğu sonucuna varırız.

Diğer yandan I ve J idempotent iken $A = I \times J$ ise $A = I \times J$ idempotenttir. Buradan A nın hemen hemen asal ideal olduğu sonucuna ulaşırız[13].

Sıradaki teorem bölge konusunda S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından ispatlanmıştır[7]. Şimdi bu teoremi herhangi bir R halkası için gösterelim ve ispatlayalım.

Teorem 2. 2. 21. c elemanı R nin sıfırdan farklı birim olmayan bir elemanı olsun. (c) hemen hemen asal ve $\big(0:(c)\big) \subseteq (c)$ ise (c) asal idealdir.

İspat: (c) nin asal ideal olmadığını varsayalım. $xy \in (c)$ olacak şekilde $x \notin (c)$ ve $y \notin (c)$ bulunur. $xy \notin (c)$ ise bunu ispatlamış oluruz. Öyleyse $xy \in (c^2)$ olsun. $x(y + c) \in (c)$ yi düşünelim. $x(y + c) \in (c) - (c^2)$ ise (c) hemen hemen asal ideal olduğundan $x \in (c)$ veya $y + c \in (c)$ olur. $x \in (c)$ ise bir çelişki elde ederiz. O zaman $y + c \in (c)$ olsun. Buradan bir $r \in R$ için $y + c = cr$ olur. Öyleyse $y = c(r - 1) \in (c)$ dir. Bir çelişki elde ettik. O zaman $x(y + c) \in (c^2)$ dir. $xy \in (c^2)$ olduğundan $xc \in (c^2)$ dır. Yani bir $r \in R$ için $xc = c^2 r$ olur. O zaman $c(x - cr) = 0$ dır. $\big(0:(c)\big) \subseteq (c)$ hipoteziyle $c(x - cr) \in (c)$ dir ve $x \in (c)$ dir[13].

Sıradaki lemma $n = 2$ koşuluyla (diğer bir deyişle hemen hemen asal idealler) bir R bölgesi için S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından ispatlanmıştır[7]. Şimdi bu lemmayı R de bir n −hemen hemen asal ideal için gösterelim ve ispatlayalım.

Lemma 2. 2. 22. I ideali R de bir n −hemen hemen asal ideal olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

1) b elemanı R/I da bir sıfır bölen ise $b \in I$ veya $bI \subseteq I^n$ dir.
2) R nin herhangi bir J ideali için $I \subseteq J$ ve J ideali R/I da sıfır bölenler içeriyorsa $JI^{n-1} = I^n$ dir.
3) I terslenebilir bir ideal ise asaldır.

İspat: 1): Varsayımdan $bc \in I$ olacak şekilde $c \notin I$ bulunabilir. $b \notin I$ olsun. Buradan $b \notin I, c \notin I$ ve $bc \in I$ dır. Dolayısıyla I n −hemen hemen asal ideal olduğundan $bc \in I^n$ dir. Buradan bir $x \in I$ için $x + c \notin I$ ve $b(x + c) \in I$ olur. I ideali n −hemen hemen asal olduğundan $b(x + c) \in I^n$ olur. $bc \in I^n$ olduğundan $bx \in I^n$ dir. Sonuç olarak $bI \subseteq I^n$ dir.

2): Bu 1) den açıktır.

3): $xy \in I$ ve $x \notin I$ olsun. $y \in I$ ise bunu ispatlamış oluruz. Varsayalım ki $y \notin I$ dır. O zaman $x \notin I$, $y \notin I$ ve $xy \in I$ dır. Bundan dolayı y elemanı R/I da sıfır bölendir. 1) den $yI \subseteq I^n$ olur. I terslenebilir olduğundan $yII^{-1} \subseteq I^nI^{-1}$ olur. Bundan dolayı $yR \subseteq I^{n-1}$ dır. Buradan $y \in I^{n-1}$ olur. Dolayısıyla $y \in I$ dır. Böylece I nın asal ideal olduğunu elde ederiz.

Teorem 2. 2. 14. 2) yi n −hemen hemen asal idealler için ispatlayabiliriz.

Teorem 2. 2. 23. I R de n −hemen hemen asal ideal olsun. O zaman S R nin herhangi çarpımsal kapalı alt kümesi olmak üzere $S \cap I = \emptyset$ için $S^{-1}I$ n −hemen hemen asal idealdir.

İspat: $x, y \in R$ ve $s, t \in S$ olsun. $\frac{xy}{st} \in S^{-1}I - S^{-1}I^n$ olsun. $uxy \in I$ için $u \in S$ ve $w \in S$ için $wxy \notin I^n$ vardır. Bundan dolayı $uxy \in I - I^n$ dir. I ideali n −hemen hemen asal olduğundan $ux \in I$ veya $y \in I$ olur. Sonuç olarak $x/s \in S^{-1}I$ veya $y/t \in S^{-1}I$ dır. Buradan $S^{-1}I$ bir n −hemen hemen asal ideal olur.

Şimdi vereceğimiz bölge ile ilgili önerme S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından ispatlanmıştır[7]. Bunu genel bir R halkası için ispatlayalım. İspat hemen hemen aynıdır.

Önerme 2. 2. 24. (L, M) bir quasi-lokal halka olsun. $M^2 \subseteq I \subseteq M$ olacak şekilde I R nin bir ideali olsun. Bu durumda I nın hemen hemen asal olmasının gerek ve yeter koşulu $M^2 = I^2$ olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki $M^2 = I^2$ dir. $xy \in I - I^2$ olacak şekilde $x, y \in R$ olsun. $x \notin M$ ise x bir birim elemandır ve $y \in I$ olur. Buradan $x, y \in M$ olsun. Bu durumda $xy \in M^2 = I^2$ dir. Fakat bu doğru değildir. Buradan I nın hemen hemen asal olduğu açıktır. Tersine I hemen hemen asal ideal olsun. Herhangi $x, y \in M$ için $M^2 \subseteq I$ olduğundan $xy \in M^2 \subseteq I$ dır. $xy \in I^2$ olduğunu gösterelim. $y^2 \in M^2 \subseteq I$ olduğundan y elemanı R/I da bir sıfır bölendir. Lemma 2. 2. 22. 1) den $xy \in yI \subseteq I^2$ olur. Buradan sonuca ulaşırız.

Örnek 2. 2. 3. e göre $M^2 = 0$ olacak şekilde (R, M) quasi-lokal halka ise R nin her has ideali hemen hemen asaldır. Tersinin hemen hemen doğru olduğunu Teorem 2. 2. 32. de göstereceğiz.

Tanım 2. 2. 25. $R \cong R_1 \times R_2$ olacak şekilde aşikar olmayan R_1 ve R_2 halkaları olsun. Bu durumda R ye ayrışabilir denir. Eğer R ayrışabilir değilse, ayrışamaz denir.

Tanım 2. 2. 26. $x \in R$ ve $a \in R$ olacak şekilde $a = axa$ şartı sağlanıyorsa R ye Von Neumann regüler halkası denir.

Şimdi her has ideali hemen hemen asal ideal olan halkaların özelliklerini inceleyelim. Bunun için önce aşağıda verilen lemmalara bakalım.

Lemma 2. 2. 27. (R, M) her has temel ideali hemen hemen asal ideal olan bir quasi-lokal halka olsun. Bu durumda $M^2 = 0$ olur.

İspat: $a, b \in M - \{0\}$ olsun. (ab) idealini düşünelim. $(ab) \neq 0$ olsun. O zaman (ab) hemen hemen asal idealdir. Dolayısıyla $ab \in (ab)$ dir. Buradan ya $a \in (ab)$ ya $b \in (ab)$ ya da $ab \in (ab)^2$ olur. $a \in (ab)$ ise Nakayama lemmadan $(a) = 0$ olacak şekilde $(a) = (ab)$ dir(Bakınız [10], Hungerford). Benzer şekilde $b \in (ab)$ ise $(b) = 0$ dır. $ab \in (ab)^2$ ise $(ab) = 0$ olacak şekilde $(ab) = (ab)^2$ dir. Dolayısıyla $a \neq 0, b \neq 0$ ve $ab \neq 0$ ile ilgili varsayımımız için bir çelişki elde ederiz.

Lemma 2. 2. 28. R her has temel ideali hemen hemen asal olan bir halka olsun. O zaman her $a \in R$ için $(a^2) = (a^3)$ dir. e bir idempotent eleman olmak üzere $(a^2) = (e)$ dir.

İspat: M ideali R nin maksimal ideali olsun. O zaman R_M nin her has temel ideali hemen hemen asaldır. Lemma 2. 2. 27. den $M_M^2 = 0_M$ dir. $\left(\frac{a}{1}\right)^2 = \frac{0}{1}$ veya $\frac{a}{1}$ ideali R_M halkasında bir birimdir. Başka bir durumda $\left(\frac{a}{1}\right)^2 = \left(\frac{a}{1}\right)^3$ dir. Dolayısıyla $(a^2) = (a^3)$ yereldir ve dolayısıyla geneldir. $(a^2) = (a^3)$ olduğundan $(a^3) = (a^4)$ dir. Bu yüzden $a^2 = \alpha a^4$ dir. Dolayısıyla $\alpha a^2 = \alpha^2 a^4 = (\alpha a^2)^2$ dir. Bu yüzden $e = \alpha a^2$ idempotenttir. Ayrıca $ea^2 = \alpha a^4 = a^2$ dir. Buradan $(a^2) \subseteq (e) \subseteq (a^2)$ olur ve $(a^2) = (e)$ elde ederiz[13].

Lemma 2. 2. 29. R için aşağıdakiler denktir:

1) R Von Neumann regüler halkadır.
2) M R nin maksimal ideali olmak üzere R_M bir cisimdir.
3) R nin her temel ideali idempotenttir.

İspat: 1) ⇒ 2): $a \in M$ ve $a = axa$ olsun. O zaman $(ax)^2 = axax = (axa)x = ax$ dir. Buradan $e = ax \in M$ elemanı idempotenttir. Buradan $a = ea$ olur. $e/1 = 0/1$ olduğundan $a/1 = 0$ dır.

2) ⇒ 3): I ve J idealleri için $I = J$ olmasının gerek ve yeter koşulu R nin her M maksimal ideali için $I_M = J_M$ şartının sağlanmasıdır. R_M halkası herhangi bir M maksimal ideali için bir cisim olduğundan $I_M = 0_M$ veya $I_M = R_M$ olur. Dolayısıyla $I^2R_M = (IR_M)^2 = IR_M$ dir.

3) ⇒ 1): $a \in R$ olsun. $(a) = (a)^2$ olduğundan bir $x \in R$ için $a = a^2x$ olur, $a = axa$ gibi[9].

Şimdi bilinen bir önermeyi verelim.

Önerme 2. 2. 30. R nin her has ideali asal olmasının gerek ve yeter koşulu R nin bir cisim olmasıdır.

İspat: (⇐) Tek ideali olan bir cisim $\{0\}$ dır. Bir cisim aynı zamanda bölge olduğundan $\{0\}$ asal olmalıdır.

(⇒) $\{0\}$ asal olduğundan R bir bölge olmalıdır. $0 \neq x \in R$ olsun. x in bir birim eleman olmadığını varsayalım. Dolayısıyla (x^2) ideali asaldır. Buradan $x \in (x^2)$ ve $x^2 \in (x^2)$ olur. Dolayısıyla $(x) = (x^2)$ dir. Buradan $rx^2 = x$ olacak şekilde $r \in R$ bulunur. Bundan dolayı $x(rx - 1) = 0$ dır. R bir bölge ve $x \neq 0$ olduğundan $rx - 1 = 0$ dır. Bu yüzden x bir birim eleman olmalıdır.

Aşağıdaki teorem D. D. Anderson ve E. Smith tarafından ispatlanmıştır[4].

Teorem 2. 2. 31. R nin her has idealinin zayıf asal olmasının gerek ve yeter koşulu F_1 ve F_2 cisim olmak üzere $R \cong F_1 \times F_2$ olmasıdır veya $M^2 = 0$ olacak şekilde (R, M) nin bir quasi-lokal halka olmasıdır.

Bu durumu sıradaki teoremde hemen hemen asal idealler için ispatlayalım.

Teorem 2. 2. 32. R için aşağıdakiler denktir:

1) Her has ideali hemen hemen asaldır.

2) Her has temel ideali hemen hemen asaldır.

3) M R nin maksimal ideali olmak üzere R bir Von Neumann regüler halkası veya $M^2 = 0$ olacak şekilde bir quasi-lokal halkadır.

İspat: 1) ⇒ 2): Açıktır.

2) ⇒ 3): Varsayalım ki R ayrışamazdır. O zaman 0 ve 1 tek idempotentlerdir. $a \in R$ ise Lemma 2. 2. 28. den $(a^2) = (a^3)$ olur. Bir e idempotenti için $(a^2) = (e)$ dir. Buradan $e = 0$ veya $e = 1$ dir. Bu yüzden R nin her birim olmayan elemanı için $a^2 = 0$ dır. Dolayısıyla birim olmayan elemanların kümesi R nin nilradikalinde bulunur ve R nin bir idealidir. Bu yüzden R quasi-lokal halkadır. Lemma 2. 2. 27. den $M^2 = 0$ olur. Varsayalım ki R halkası $R = R_1 \times R_2$ gibi ayrışabilirdir. R nin Von Neumann regüler halka olduğunu ispatlayacağız. R bir Von Neumann regüler halka ise R_1 ve R_2 de öyledir. R bir Von Neumann regüler halka olmasın. O zaman ya R_1 ya R_2 ya da hiçbiri Von Neumann regüler halka değildir. R_2 Von Neumann regüler halka olmasın. Lemma 2. 2. 29. dan R_2 nin idempotent olmayan I ideali vardır. $0 \times I$ idealini düşünelim. $a \in I - I^2$ olsun. O zaman $(0, a) \in 0 \times I - (0 \times I)^2$ olur. $0 \times I$ hemen hemen asal olduğundan $(1, a) \in 0 \times I$ veya $(0,1) \in 0 \times I$ dır. Buradan

$$(1, a)(0,1) = 0 \times I - (0 \times I)^2$$

olur. Hiçbir eleman $0 \times I$ e ait olmadığından bir çelişki elde ederiz. Dolayısıyla R_2 nin her ideali idempotenttir. Böylece R_2 Von Neumann regüler halkadır. Dolayısıyla R bir Von Neumann halkadır.

3) ⇒ 1): $M^2 = 0$ olacak şekilde R quasi-lokal halka ise Örnek 2. 2. 3. ten R nin her has ideali hemen hemen asaldır. R Von Neumann regüler halka ise R nin her has ideali idempotenttir. Dolayısıyla R nin her has ideali hemen hemen asaldır.

Sonuç 2. 2. 33. R ayrışamaz halka olsun. R nin her has idealinin hemen hemen asal olmasının gerek ve yeter koşulu $M^2 = 0$ olacak şekilde (R, M) nin quasi-lokal halka olmasıdır.

Sonuç 2. 2. 34. R ayrışabilir halka olsun. R nin her has ideali hemen hemen asal olmasının gerek ve yeter koşulu R nin Von Neumann regüler halka olmasıdır[13].

2. 2. 1. Özel Halkalar

Her has ideali asal ideallerin bir çarpımı olan tamlık bölgelerine Dedekind bölgeleri denir. Her has ideali hemen hemen asal ideal olan bölge yapılarına bakmadan önce aşağıdaki tanımları inceleyelim.

Tanım 2. 2. 1. 1. R tek asal ideali olan bir temel ideal halkası olmak üzere R nin asal ideali nilpotent ise R ye özel temel ideal halkası $(SPIR)$ denir. R nin her has temel ideali asal ideallerin çarpımı ise R ye $\Pi -$halka denir. Bir tamlık bölge olan bir $\pi -$halkası $\Pi -$bölge olarak adlandırılır. R nin her has ideali asal ideallerin çarpımı ise R ye $ZPI -$halka denir. Bir R bölgesi her has ideali asal ideallerin sonlu sayıda bir çarpımı ise Dedekind bölgesidir.

Tanım 2. 2. 1. 2. R nin her ideali sonlu üretilmiş veya eşit bir biçimde R nin idealleri artan zincir şartını sağlıyorsa R ye Noetherian halka denir.

Tanım 2. 2. 1. 3. R nin boyutu asal idealler zincirinin bütün uzunluklarının supremumudur. (ya da eşit bir biçimde maksimal ideallerinin bütün mertebelerinin supremumu ya da asal ideallerin bütün mertebelerinin supremumu). Buna Krull boyutu denir.

Tanım 2. 2. 1. 4. R nin herhangi a ve b elemanları için a elemanı b yi veya b elemanı a yı bölerse R ye değer halkası denir.

Tanım 2. 2. 1. 5. Q ideali R nin has ideali olsun. Q nun radikali Q yu içeren bütün asal ideallerin kesişimidir ve $\sqrt{Q}$ ile gösterilir. $a, b \in R$ için $ab \in Q$ ve $a \notin Q$ iken $n \geq 1$ için $b^n \in Q$ oluyorsa Q ya asalımsı denir. Q ideali asalımsı ise $P = \sqrt{Q}$ asal idealdir ve Q ya $P -$asalımsı denir.

Tanım 2. 2. 1. 6. A R nin bir ideali olmak üzere $B \subseteq A$ için $B = AC$ olacak şekilde bir C ideali bulunuyorsa A ya çarpım ideali denir.

Tanım 2. 2. 1. 7. Bir tamlık bölgesinin sıfırdan farklı sonlu üretilmiş bütün idealleri terslenebilir ise bu tamlık bölgesine Prüfer bölgesi denir.

Aşağıdaki lemma, S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından gösterilmiş ve ispatlanmıştır[7].

Lemma 2. 2. 1. 8. c elemanı R tamlık bölgesinde sıfırdan farklı birim olmayan bir eleman olsun. (c) asal ideal değil ise $ab \notin Rc^2$ için $ab \in Rc$ olacak şekilde $a \notin Rc$ ve $b \notin Rc$ vardır.

Lemma 2. 2. 1. 8. i her $n \geq 2$ için genişlettik.

Lemma 2. 2. 1. 9. c elemanı R tamlık bölgesinde sıfırdan farklı birim olmayan bir eleman ve $n \geq 2$ olsun. (c) asal ideal değil ise $ab \notin (c^n)$ için $ab \in Rc$ olacak şekilde $a, b \notin (c)$ vardır.

İspat: $a, b \notin (c)$ olmak üzere $ab \in (c)$ için $a, b \in R$ olsun. $ab \notin (c^n)$ ise ispat edilmiştir. O zaman $ab \in (c^n)$ olsun. Buradan $a(b + c^{n-1}) \in (c)$ ve $a, b + c^{n-1} \notin (c)$ olur. $a(b + c^{n-1}) \in (c^n)$ olacak şekilde $ac^{n-1} \in (c^n)$ olur. $a \in (c)$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Sonuç 2. 2. 1. 10. (c) R bölgesinde n −hemen hemen asal ideal ise (c) asal idealdir.

Teorem 2. 2. 1. 11. R Noetherian bölgesinde bir I idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul her n için I nın n −hemen hemen asal olmasıdır.

İspat : (⇒): Açıktır.

(⇐): I her $n \geq 2$ için n −hemen hemen asal ideal ve $xy \in I$ olsun. Bir n için $xy \notin I^n$ ise $xy \in I - I^n$ dir. I n −hemen hemen asal ideal olduğundan $x \in I$ veya $y \in I$ dır. Her $n \geq 1$ için $xy \in I^n$ ise R Noetherian olduğundan $xy \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{0\}$ dır. R bir bölge olduğundan $xy = 0$ olur. Buradan $x = 0 \in I$ veya $y = 0 \in I$ elde edilir.

Teorem 2. 2. 1. 17. ve Teorem 2. 2. 1. 20. de her has ideali hemen hemen asal ideallerin çarpımı olan R Noetherian halkalarını tanımlayacağız. Bir ZPI −halkası ve $M^2 = 0$ olacak şekilde (R, M) quasi-lokal halkası bu özelliğe sahiptir. $M^2 = 0$ olacak şekilde (R, M) bir quasi-lokal halka ise Örnek 2. 2. 3. ten R nin her has ideali hemen hemen asaldır.

Bu halkaları tanımlamadan önce birtakım bilgiler verelim.

Tanım 2. 2. 1. 12. K bir cisim olsun. $K^\times = K\backslash\{0\}$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan $v: K^\times \to Z$ fonksiyonuna ayrık değerlendirme denir.

1. v örtendir.
2. Her $x, y \in K^\times$ için $v(xy) = v(x) + v(y)$.
3. Her $x, y \in K^\times$ ve $x + y \neq 0$ için $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Tanım 2. 2. 1. 13. v fonksiyonu K cismi üzerinde bir ayrık değerlendirme ise K nın $\{x \in K: v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ alt halkasına v nin değer halkası denir.

Tanım 2. 2. 1. 14. R bir tamlık bölgesi ve K kesir cismi olsun. K üzerindeki v değerlendirmesinin değer halkası R ise R tamlık bölgesine ayrık değer halkası denir (ADH).

Lemma 2. 2. 1. 15. R Noetherian halkasının yerel ayrık bir değer halkası olmasının gerek ve yeter koşulu R nin Dedekind bölgelerinin sonlu doğrudan bir çarpımı olmasıdır.

İspat: (⇒): R Noetherian halka ve yerel ayrık bir değer halkasıdır. O zaman R Noetherian ve yerel bölgedir. [11] de Teorem 168 den her D_i tamlık bölgesi olmak üzere $R = D_1 \times ... \times D_k$ olur. Her D_i nin Dedekind bölgesi olduğunu göstermeliyiz. M_1 ideali D_1 in maksimal ideali olsun. O zaman $M = M_1 \times D_2 \times ... \times D_k$ ideali R nin maksimal idealidir. Buradan $R_M \cong D_{1_{M_1}}$ ayrık bir değer halkasıdır. Dolayısıyla D_1 Noetherian ve yerel ayrık bir değer halkasıdır. Bundan dolayı D_1 Dedekind bölgesidir. Benzer şekilde $D_2, ..., D_k$ da Dedekind bölgeleridir.

(⇐): Her D_i Dedekind bölgesi olmak üzere $R = D_1 \times ... \times D_k$ olsun. M R nin maksimal ideali olsun. M_i D_i nin maksimal ideali olacak şekilde bir i için $M = D_1 \times ... \times D_{i-1} \times M_i \times D_{i+1} \times ... \times D_k$ olur. Buradan R_M ayrık bir değer halkası olacak şekilde $R_M \cong D_{i_{M_i}}$ olur[13].

Lemma 2. 2. 1. 16. R bir Noetherian halka olsun. O zaman R sıfır boyutlu halka ile her maksimal ideali en az bir boyuta sahip bir halkanın çarpımıdır.

İspat: R Noetherian olduğundan sadece sonlu minimal asal idealleri vardır $P_1, ..., P_s$ gibi. $\{0\}$ minimal asal ideal ise R bir bölgedir ve sonuç geçerli olur. Sıfırdan farklı minimal asal idealler olsun. Varsayalım ki $P_1, ..., P_k$ idealleri R nin maksimal idealleridir. $P_{k+1}, ..., P_s$ maksimal ideal olmasınlar. $s = k$ ise R $0-$boyutludur ve ispat tamamlanır. $k = 0$ ise R nin her maksimal ideali en az bir boyuta sahiptir ve ispat tamamlanır. Öyleyse $1 \leq k < s$ olsun. $I = P_1 ... P_k$ ve $J = P_{k+1} ... P_s$ olsun. O zaman I ve J komaksimal idealler olmak üzere $I + J = R$ dir. $IJ \subseteq nil(R)$ olduğundan bir n için $(IJ)^n = 0$ dır. I ve J komaksimal olduklarından I^n ve J^n de komaksimaldir. Dolayısıyla $I^n \cap J^n = I^n J^n$ dir. Buradan $0 = (IJ)^n = I^n \cap J^n$ olur. Çinlilerin kalan teoremi, R/J^n her maksimal ideal en az bir boyuta sahip olan bir halka olduğundan R/I^n deki her asal idealin minimal ve maksimal olduğunu ve R/I^n sıfır boyutlu bir halka olmak üzere $R = R/(I^n \cap J^n) \cong R/I^n \times R/J^n$ olduğunu ifade eder[11].

Teorem 2. 2. 1. 17. (R, M) bir yerel halka olsun. R nin her has idealinin asal ideallerin çarpımı olmasının gerek ve yeter koşulu M nin temel ideal olması (dolayısıyla R bir ADH veya $SPIR$) veya

1) Bir $x \in M - M^2$ için $(x^2) = M^2$,

2) $M^3 = 0$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat: (⇒): M temel ideal olmasın. $M^2 \subset I \subset M$ olacak şekilde I hemen hemen asal ideallerin bir çarpımı olan R nin bir has ideali olsun. I iki has idealin çarpımı olamayacağından hemen hemen asaldır. Önerme 2. 2. 24. ten $I^2 = M^2$ olur.

$x \in M - M^2$ için $I = (x) + M^2$ alalım. Dolayısıyla $M^2 \subset I \subseteq M$ dir. O zaman

$$M^2 = ((x) + M^2)^2 = (x)^2 + (x)M^2 + M^4 = (x)^2 + M^3 = (x)^2 + MM^2$$

olur. Nakayama lemmadan $M^2 = (x)^2$ dir. $M^3 = 0$ olduğunu gösterelim. $(0: x)$ düşünelim. $M^2 \subseteq (x)$ olur. $(0: x) \subseteq M^2$ ise (x) hemen hemen asal olacak şekilde $(0: x) \subseteq (x)$ dir. Teorem 2. 2. 21. den (x) asaldır. Bundan dolayı $M = (x)$ temel idealdir. Buradan bir çelişki elde ettik. Öyleyse $(0: x) \nsubseteq M^2$ olsun. $y \in (0: x) - M^2$ olsun. Buradan $M^2 = (y^2) \subset (y) \subseteq (0: x)$ dir. Böylece $x^2 \in M^2 \subseteq (0: x)$ ise $x^3 = 0$ dır. O zaman $xM^2 = x(x^2) = 0$ olur. Şimdi de $(z) \subset M^2 = (x)^2$ olsun. $(x)^2$ temel ideal dolayısıyla çarpım ideali olduğundan $(z) \subseteq M(x)^2$ dir. Buradan $M(x)^2 \subseteq xM^2 = 0$ dır. Dolayısıyla $M^3 = 0$ olur.

(⇐): $M = (m)$ olacak şekilde M temel ideal ise her biri asal ideallerin çarpımı olan $(m), \dots, (m^k), \dots$ tek has ideallerdir. M temel ideal olmasın. 1) ve 2) nin geçerli olduğunu varsayalım. O zaman 0 ve M^2 arasında hiçbir has ideal yoktur. $I \subset M^2$ ise M^2 temel ve çarpım ideali olduğundan $I \subseteq MM^2 = M^3 = 0$ dır. $I \not\subset M^2$ olacak şekilde has ideal olsun. $x \in I - M^2$ olsun. O zaman $I \supseteq (x) \supseteq (x^2) = M^2$ dir. $I = M^2$ ise asal ideallerin bir çarpımıdır. Bundan dolayı $I \supset M^2$ olduğunu varsayalım. $(x) \subseteq I$ olur. O zaman $M^2 = (x)^2 \subseteq I^2$ dır. Buradan $M^2 \subseteq I^2$ olur. $I \subseteq M$ olduğundan $I^2 \subseteq M^2$ ve $I^2 = M^2$ dir. Önerme 2. 2. 24. ten I hemen hemen asaldır.

Tanım 2. 2. 1. 18. R bir quasi-lokal halka ise ve aşağıdaki iki durumu sağlıyorsa

1) Bir $x \in M - M^2$ için $(x^2) = M^2$,

2) $M^3 = 0$

R ye hemen hemen asal ideallerin özel çarpım halkası ($SPAP$ −halka) denir.

Lemma 2. 2. 1. 19. R_1 ve R_2 iki değişmeli halka olsun. R_1 ve R_2 nin her has idealleri hemen hemen asal ideallerin bir çarpımı ise $R_1 \times R_2$ nin her has ideali hemen hemen asal ideallerin bir çarpımıdır.

İspat: Her A_i ve B_j için $I = A_1 \dots A_n$ ve $J = B_1 \dots B_m$ olacak şekilde I ideali R_1 in ve J ideali ve R_2 nin has idealleri olsunlar. $R_1 \times R_2$ nin has ideali $I \times R_2$ formunda ise Lemma 2. 2. 19. dan hemen hemen asal ideallerin bir çarpımı olan

$$I \times S = (A_1 \times R_2) \dots (A_n \times R_2$$

yazabiliriz. Has ideal $R_1 \times J$ formunda ise benzer bir yolda hemen hemen asal ideallerin bir çarpımı olarak yazabiliriz. Has ideal $I \times J$ formunda ise

$$A_1 \dots A_n \times B_1 \dots B_m = (A_1 \dots A_n \times R_2)(B_1 \dots B_m \times R_1) =$$
$$(A_1 \times R_2) \dots (A_n \times R_2)(R_1 \times B_1) \dots (R_1 \times B_m)$$

olarak yazabiliriz. Böylece hemen hemen asal ideallerin bir çarpımını elde ederiz.

Şimdi de $M^2 = 0$ olacak şekilde (R, M) quasi-lokal halkasının bir $SPAP$ −halka olmasını inceleyelim.

Teorem 2. 2. 1. 20. R bir Noetherian halka olsun. Her has idealinin hemen hemen asal ideallerin bir çarpımı olmasının gerek ve yeter koşulu R nin $SPAP$ −halkaların $SPIR$ in ve Dedekind bölgelerinin doğrudan sonlu bir çarpımı olmasıdır.

İspat: (⇐): $R_1, \dots, R_n$ her has ideali hemen hemen asal ideallerin çarpımı olan halkalar olsun. O zaman Lemma 2. 2. 1. 19. dan $R_1 \times \dots \times R_n$ aynı özelliğe sahip olur. Dedekind bölgeleri ve $SPIR$ in bu özelliğe sahip olduğu açıktır. Teorem 2. 2. 1. 17. den benzer şekilde $SPAP$ −halka da bu özelliğe sahip olur.

(⇒): R Noetherian olduğundan R_1 sıfır boyutlu halka ve R_2 her maksimal ideali en az bir boyutlu olan bir halka olmak üzere Lemma 2. 2. 1. 16. dan $R = R_1 \times R_2$ olur. R nin her has ideali hemen hemen asal ideallerin çarpımıdır ve bu durum R_1 ve R_2 için de geçerlidir. R_1 sıfır boyutlu yerel halkaların sonlu doğrudan çarpımıdır(Bakınız, Teorem 8. 5 ve Teorem 8. 7 [6]). Dahası bu yerel halkaların her biri her has ideali hemen hemen asal ideallerin çarpımı özelliğine sahiptir. Teorem 2. 2. 1. 17. den bu yerel halkaların her biri $SPAP$ −halka veya $SPIR$ dir. M ideali R_2 nin maksimal ideali olsun. Bu durumda $rankM \geq 1$ dir. R_{2_M} her has ideali hemen hemen asal ideallerin çarpımı olan bir yerel halkadır. $dimR_{2_M} \geq 1$ olduğundan R_{2_M} Teorem 2. 2. 1. 17. den ayrık değer halkasıdır. R_2 Lemma 2. 2. 1. 15. den Dedekind bölgelerinin sonlu doğrudan çarpımıdır.

$M \neq 0$ ve M nin temel ideal olmadığı bir durum için bir $SPAP$ −halkanın örneğini verelim.

Örnek 2. 2. 1. 21. K gerçek kapalı bir cisim ve $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ belirsiz boş olmayan bir küme olsun. $R = K[[\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}]]$, $M = (\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ ve $I = (\{X_\alpha X_\beta, X_\alpha^2 - X_\beta^2\}_{\alpha\neq\beta}, \{X_\alpha^3\}_{\alpha\in\Lambda}$ tanımlayalım. Her $\alpha \neq \beta$ için $\overline{X_\alpha}\overline{X_\beta} = 0$ ve her α, β için $\overline{X_\alpha}^2 = \overline{X_\beta}^2$ olduğundan her $\alpha \in \Lambda$ için $\overline{M}^2 = (\overline{X_\alpha}^2)$ dir. Buradan $\overline{M}^3 = 0$ olur. $\bar{g} \in \overline{M} - \overline{M}^2$ olsun. O zaman $\bar{f} \in \overline{M}^2$ ve a_i sıfırdan farklı bir eleman olmak üzere $\bar{g} = a_1\overline{X_{\alpha_1}} + \cdots + a_n\overline{X_{\alpha_n}} + \bar{f}$ dir. Buradan $\bar{g}^2 = {a_1}^2\overline{X_{\alpha_1}}^2 + \cdots + {a_n}^2\overline{X_{\alpha_n}}^2 = ({a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2)\overline{X_{\alpha_1}}^2$ dir. K gerçek kapalı bir cisim olduğundan ${a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2 \neq 0$ olur. O zaman $\bar{g}^2 = \overline{M}^2$ dir. Dolayısıyla $\overline{R}$ bir $SPAP$ −halkadır. $\overline{M}^2 \neq 0$ ve $\overline{M}$ ideali $|\Lambda| > 1$ için temel değildir.

Teorem 2. 2. 1. 22. R halkası 1 −boyutlu quasi-lokal bölge olsun. R nin her has temel ideali hemen hemen asal ideallerin çarpımı ise R ayrık değer halkasıdır.

İspat: I hemen hemen asal ideallerin çarpımı olan bir has temel ideal olsun. Bir R bölgesinde her has temel ideal terslenebilirdir. Terslenebilir idealin çarpanı da terslenebilirdir. R quasi-lokal halka olduğundan terslenebilir bir ideal temeldir. Dolayısıyla I temel hemen hemen asal ideallerin bir çarpımıdır. Sonuç 2. 2. 1. 10. dan I asal ideallerin bir çarpımıdır. O zaman R bir $TAÇ$ bölgedir. Bir boyutlu yerel $TAÇ$ bölge, ayrık bir değer halkasıdır.

Teorem 2. 2. 1. 23. V değer bölgesi olsun. Bu durumda V nin I idealinin hemen hemen asal olmasının gerek ve yeter koşulu I nın asal olmasıdır.

İspat: (⇒): $xy \in I$ olsun. $x, y \notin I$ olsun. Buradan $(x), (y) \supset I$ olur. O zaman $(xy) \supseteq I^2$ dir. $(xy) \supset I^2$ ise $xy \in I - I^2$ dir. I hemen hemen asal olduğundan $x \in I$ veya $y \in I$ dır. O zaman $(xy) = I^2$ olsun. I temel idealin bir çarpanı olduğundan I ideali temeldir. Sonuç 2. 2. 1. 10. dan I asal ideal olur.

(⇐): Bu herhangi bir halka için geçerlidir.

Sıradaki örnek bir R Prüfer bölgesinde bir hemen hemen asal idealin asal olmak zorunda olmadığını gösterir.

Örnek 2. 2. 1. 24. R bütün cebirsel tamsayıların halkası olsun. O zaman R Bezout bölgesidir ve R nin her radikal ideali idempotenttir. $M \neq N$ olmak üzere R nin maksimal idealleri olsun. Bu durumda $MN = M \cap N$ ve $(MN)^2 = MN$ dir. Dolayısıyla MN idempotent ve hemen hemen asal idealdir. Fakat MN asal ideal değildir.

Bu bölümün sonunda hemen hemen asal elemanlar, zayıf asal elemanlar ve indirgenemez elemanlar arasında bir ilişki elde edeceğiz.

Tanım 2. 2. 1. 25. $a, b \in R$ olmak üzere $a|b$ ve $b|a$ ise a ve b ilgilidir. $a \sim b$ şeklinde gösterilir. a elemanı R nin sıfırdan farklı birim olmayan bir elemanı olmak üzere $a = bc$ iken $a \sim b$ veya $a \sim c$ oluyorsa a ya indirgenemez denir. $a_i \sim a$ ise $a = a_1 \dots a_n$ dir(D. Anderson ve S. Valdes-Leon [5]).

Zayıf asal eleman kavramı (diğer bir deyişle, pR zayıf asal ideal olacak şekilde bir p elemanı) S. Galovich tarafından tanımlanmıştır[8]. Aynı şekilde hemen hemen asal eleman kavramını tanımlayabiliriz (diğer bir deyişle pR hemen hemen asal ideal olacak şekilde bir p elemanı).

Teorem 2. 2. 1. 26. R için;

1) x birim olmayan ve sıfırdan farklı bir eleman olsun. x asal ise zayıf asaldır. Dolayısıyla hemen hemen asaldır.

2) P R nin has ideali olsun. Varsayalım ki P nin her sıfırdan farklı elemanı indirgenemezdir. O zaman P zayıf asal ve dolayısıyla hemen hemen asaldır.

İspat: 1): Açıktır.

2): $ab \in P - \{0\}$ olsun. Dolayısıyla ab indirgenemezdir. Buradan $(ab) = (a)$ veya $(ab) = (b)$ dir. Bu durumda $a \in P$ veya $b \in P$ olur.

Teorem 2. 2. 1. 16. 1) de bahsedildiği gibi her sıfırdan farklı birim olmayan asal elemanın bir zayıf asal eleman olduğu ve her sıfırdan farklı birim olmayan zayıf asal elemanın indirgenemez olduğu doğrudur. Fakat bir hemen hemen asal eleman indirgenemez olmak zorunda değildir.

Örnek 2. 2. 1. 27. $R = Z/6Z \times Q$ olsun. $e = (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})(\bar{0}, \bar{1})$ ele alalım. O zaman $e = e^2$ dir. Burada (e) hemen hemen asal ideal olmak üzere e idempotenttir. $(\bar{3}, \bar{1})(\bar{2}, \bar{1}) = e$ olduğundan e indirgenemez değildir.

Sonuç 2. 2. 1. 28. (R, M) $0-$boyutlu quasi-lokal halka olsun. $0 \neq x \in M$ olsun. x indirgenemez ve $xM = 0$ ise Rx zayıf asal dolayısıyla hemen hemen asaldır.

İspat: Varsayalım ki x indirgenemezdir ve $xM = 0$ dır. O zaman Rx in sıfırdan farklı her elemanı x in ilgilisidir, dolayısıyla indirgenemezdir. Teorem 2. 2. 1. 26. 2) den Rx zayıf asaldır[13].

2. 2. 2. Örnekler

İdealleştirme Metodu ile ilgili olarak daha çok hemen hemen asal ideallerle ilgili örnekler verebiliriz(Nagata [12]).

Örnek 2. 2. 2. 1. A bir R $-$modül olsun. O zaman $R(A) = R\oplus A$ ve

$$(a, m)(b, n) = (ab, an + bm)$$

çarpımı, birimli değişmeli bir halkadır. $(0\oplus A)^2 = 0$ olmak üzere $0\oplus A$ $R(A)$ nın bir idealidir. P R nin asal ideali olmak üzere $R(A)$ nın asal idealleri $P\oplus A$ formundadır. Bundan dolayı $0\oplus A$ ideali $R(A)$ nın her P' asal idealinde kapsanır. Dolayısıyla Via the Correspondence teoremine göre $R(A)/(0\oplus A) \cong R$ olduğundan R nin bir P asal ideali için $P' = P\oplus A$ dır. $P' = P\oplus A$ nın $R(A)$ nın zayıf asal ideali olmasının gerek ve yeter koşulu P nin zayıf asal olması ve $a, b \in R$, $a \notin P$ ve $b \notin P$ olmak üzere $ab = 0$ için $a \in ann(A)$ ve $b \in ann(A)$ şartının sağlanmasıdır(D. D. Anderson ve E. Smith, [4]). Buna göre $P\oplus A$ $R(A)$ nın hemen hemen asal ideali olduğunu inceleyeceğiz. R nin bir I ideali için ve $n \geq 1$ doğal sayısı için $(I\oplus A)^n = I^n \oplus I^{n-1}A$ dır.

Teorem 2. 2. 2. 2. A bir R $-$modül olsun. I R nin has ideali olsun. O zaman $I' = I\oplus A$ idealinin $R(A)$ nın hemen hemen asal ideali olmasının gerek ve yeter koşulu $a, b \notin R$ olmak üzere $ab \in I^2$ için I nın hemen hemen asal olmasıdır. Buradan $n, m \in A$ olmak üzere $an + bm \in IA$ dır.

İspat: (⇐): Varsayalım ki $(a, m)(b, n) \in (I\oplus A) - (I\oplus A)^2$ dır. O zaman

$$(ab, an + bm) \in (I\oplus A) - (I^2\oplus IA)$$

dır. Buradan $ab \in I$ olur. $ab \notin I^2$ ise $a \in I$ veya $b \in I$ olduğundan I hemen hemen asaldır. Dolayısıyla $a, m \in I'$ veya $b, n \in I'$ dır. $ab \in I^2$ ve $a, b \notin I$ olsun. Hipotezden $an + bm \in IA$ dır. Buradan $(a, m)(b, n) \in I\oplus IA = (I\oplus A)^2$ olur. Bu bir çelişkidir.

(⇒): Varsayalım ki $I' = I\oplus A$ hemen hemen asaldır. $a, b \in R$ olacak şekilde $ab \in I - I^2$ olsun. O zaman $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \in (I\oplus A) - (I\oplus A)^2$ dır. Buradan $(a, 0) \in (I\oplus A)$ veya $(b, 0) \in (I\oplus A)$ dır. Dolayısıyla $a \in I$ veya $b \in I$ dır. Bundan dolayı I hemen hemen asaldır. $a, b \in I$ ve $ab \in I^2$ ve $an + bm \notin IA$ olduğunu varsayalım. O zaman $(a, m)(b, n) \notin I'$ ve $(a, m)(b, n) = (ab, an + bm) \in I' - I'^2$ olur. Bu bir çelişkidir.

Sonuç 2. 2. 2. 3. A bir R $-$modül olsun. $PA = A$ olacak şekilde P R nin has ideali olsun. Bu durumda $P\oplus A$ $R(A)$ nın hemen hemen asal ideali olmasının gerek ve yeter koşulu P nin hemen hemen asal olmasıdır.

İspat: (⇒): $ab \in P - P^2$ olsun. Bu durumda

$$(a,0)(b,0) = (ab,0) \in (P \oplus A) - (P \oplus A)^2$$

dir. Buradan $(a,0) \in (P \oplus A)$ veya $(b,0) \in (P \oplus A)$ olur. Dolayısıyla $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(⇐): $(a,m)(b,n) \in (P \oplus A) - (P \oplus A)^2$ olsun. $PA = A$ olduğundan

$$(a,m)(b,n) \in (P \oplus A) - (P^2 \oplus A)$$

dır. O zaman $ab \in P - P^2$ dir. Dolayısıyla $a \in P$ veya $b \in P$ dir. Buradan $(a,m) \in (P \oplus A)$ veya $(b,n) \in (P \oplus A)$ olur.

Asal ideallerin aksine $R(A) = R \oplus A$ nın hemen hemen asal ideali veya zayıf asal ideali $I \oplus A$ formunda olmak zorunda değildir.

Örnek 2. 2. 2. 4. K bir cisim ve V K $-$vektör uzayı olsun. $M = 0 \oplus V$ maksimal ideal ve $M^2 = 0$ olmak üzere $K(V) = K \oplus V$ quasi-lokal halkadır. Dolayısıyla $K(V)$ nin her ideali zayıf asal ve hemen hemen asaldır. Buradan V' V nin has alt uzayı ise $0 \oplus V'$ zayıf asaldır dolayısıyla hemen hemen asaldır.

Örnek 2. 2. 2. 5. K bir cisim olsun. $R = K[X,Y]/(X,Y)^2$, $I = (X,Y^2)/(X,Y)^2$ ve $M = (X,Y)/(X,Y)^2$ tanımlayalım. M maksimal ideal ve $M^2 = 0$ olmak üzere R quasilokal halka olduğundan I R nin hemen hemen asal idealidir. Buradan herhangi bir R $-$modül A için Teorem 2. 2. 2. 2. den $ab \in I^2$ ve $a,b \notin I$ olmak üzere $I' = I \oplus A$ hemen hemen asaldır.

Sıradaki iki örnekte asal olmayan hemen hemen asal ideallerin sıfırdan daha büyük boyutlu Krulla nasıl oluşturulabildiğini inceleyelim.

Örnek 2. 2. 2. 6. (R,M) quasi-lokal halka, $x \in M$ indirgenemez olsun ve $\bar{R} = R/xM$ olsun. O zaman $\bar{x}\bar{R}$ ideali $\bar{R}$ de hemen hemen asaldır. Ayrıca $\bar{x}\bar{R}$ nin asal olmasının gerek ve yeter koşulu x in R de asal olmasıdır. $x \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\bar{x}\bar{R}$ nin sıfırdan farklı her elemanı Teorem 2. 2. 1. 26. 2) den $\bar{x}$ in bağlantılısı olduğundan $\bar{x}$ indirgenemezdir. Varsayalım ki $a,b \in R$ olacak şekilde $\bar{x} = \bar{a}\bar{b}$ dir. Buradan $x - ab \in xM$ olur. Bundan dolayı $ab \in xM$ olur. Buradan

$$xR = xR + xM = abR + xM$$

dir. Nakayama lemmadan $xR = abR$ dir. x indirgenemez olduğundan a elemanı x in ilgilisidir. Dolayısıyla $\bar{a}$ elemanı $\bar{x}$ in ilgilisidir. $\bar{x}$ indirgenemezdir.

Sıradaki örnek, asal olmayan hemen hemen asal elemanla ilgilidir.

Örnek 2. 2. 2. 7. K bir cisim olacak şekilde, $R = K[[X^2, X^3, Y]]$ olsun. O zaman X^2 asal değildir fakat indirgenemez olacak şekilde bir R yerel bölgedir. $M = (X^2, X^3, Y)$ ideali R nin maksimal idealidir. O zaman $\overline{X^2}$ asal değil, zayıf asal elemandır. Dolayısıyla $\bar{R} = R/(X^2M)$ nin hemen hemen asal elemanıdır ve $\bar{R}$ nin boyutu 1 dir[13].

Sıradaki teorem S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma'ya aittir[7].

Teorem 2. 2. 2. 8. R Noetherian bölgesindeki her hemen hemen asal ideal asalımsıdır.

İspat: Her asal idealin hemen hemen asal olduğu ve Noetherian bölgedeki her hemen hemen asal idealin asalımsı olduğu Teorem 2. 2. 2. 8. den açıktır.

Örnek 2. 2. 2. 10. da S. M. Bhatwadekar ve P. K. Sharma tarafından teoremin tersinin doğru olmadığı gösterilmiştir[7]. Örneği belirtmeden önce Teorem 2. 2. 2. 9. u verelim[7].

Teorem 2. 2. 2. 9. J ve K kümeleri R tamlık bölgesinde sonlu üretilmiş sıfırdan farklı idealler olsun. Bu durumda JK hemen hemen asal ideal değildir.

Örnek 2. 2. 2. 10. $M \neq 0$ olacak şekilde (R, M) Noetherian quasilokal halka olsun. O zaman M^2 asalımsıdır. Teorem 2. 2. 2. 9. dan M^2 hemen hemen asal değildir. Dolayısıyla asalımsı ideal hemen hemen asal olmak zorunda değildir. Şimdi de X kümesi K cisminde belirsiz olsun. $R = K[[X^3, X^4, X^5]]$ Noetherian tamlık bölgesini düşünelim. $M = (X^3, X^4, X^5)$ ideali R nin maksimal ideali olmak üzere R nin yerel olduğu açıktır. Buradan $I = (X^3, X^4)$ ideali M −asalımsıdır fakat asal ideal değildir. Ayrıca $I^2 = M^2$ dir. Önerme 2. 2. 24. ten I hemen hemen asaldır. Buradan hemen hemen asal idealin asal olmak zorunda olmadığı sonucuna ulaşırız[13].

Aşağıdaki örnek Victoria Camillo'a aittir.

Örnek 2. 2. 2. 11. (R, M) quasi-lokal halka olsun. $I \cap M^2 = 0$ olacak şekilde I R nin ideali olsun. Buradan $(I \cap M^2 \subseteq I^2)$ olur. O zaman I zayıf asal dolayısıyla hemen hemen asaldır. $ab \in I - \{0\}$ olsun. Burada $ab \in I - I^2$ dır. O zaman $ab \notin M^2$ dir. Buradan $a \notin M$ veya $b \notin M$ dir. Yani a veya b bir birimdir. O zaman $b = a^{-1}(ab) \in I$ veya $a = b^{-1}(ab) \in I$ olur.

Örnek 2. 2. 2. 12. (R, M) halkası $M^2 = 0$ olacak şekilde quasi-lokal halka olsun. $I \subseteq M$ ideali olsun. O zaman I ideali M −asalımsıdır. $I[X]$ i düşünelim. $I[X]$ ideali $M[X]$ −asalımsıdır. Varsayalım ki $0 \neq fg \in I[X]$ dir. $fg \neq 0$ olduğundan f ve g fonksiyonları $M[X]$ de değildir. O zaman $I[X]$ ideali $M[X]$ −asalımsı olduğundan $f \in I[X]$ dir. Dolayısıyla $I[X]$ zayıf asaldır ve hemen hemen asaldır. Ayrıca $I[X]$ in asal olmasının gerek ve yeter koşulu $I = M$ olmasıdır.

P nin R de asal olmasının gerek ve yeter koşulu $P[X]$ in $R[X]$ de asal ideal olmasıdır. $P[X]$ $R[X]$ in zayıf asal veya hemen hemen asal ideali ise P R nin zayıf asal veya hemen hemen asal idealidir. Ancak tersi doğru olmayabilir. Örnek 2. 2. 2. 12. bu durumu açıklar[13].

3. ASALIMSI İDEALLER

Tanım 3. 1. P R nin has ideali olmak üzere $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken bir n pozitif tamsayı için $a \in P$ veya $b^n \in P$ ise P ye asalımsı denir[21, sayfa, 168-206].

Önerme 3. 2.

1) I R nin bir ideali olsun. I nın asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul R/I nın trivial olamaması ve R/I daki her sıfır bölenin nilpotent olmasıdır.
2) R ve S iki halka ve $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. P S nin asalımsı ideali ise $P^c = f^{-1}(Q)$ da R nin bir asalımsı idealidir.

3. 1. Zayıf Asalımsı İdealler

Zayıf asalımsı idealler, sıfırdan farklı birimli değişmeli bir halkada D. D. Anderson ve E. Smith tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır[4]. Bu kısımda değişmeli halkanın zayıf asalımsı idealleri anlatılacaktır. Zayıf asal ideal ve zayıf asalımsı ideal farklı kavramlardır. Sonuçlarımızın bazıları daha önce yapılmış bir çalışmanın sonucuyla benzerdir[4]. Uyuşan sonuçlar değiştirilerek elde edilmiştir. Burada zayıf asalımsı ideallerin ve zayıf asalımsı alt modüllerin bir sayısını vereceğiz.

R bir halka ve N kümesi R −modül M nin alt modülü olmak üzere

$$(N: M) = \{r \in R: rM \subseteq N\}$$

ideali tanımlanır. O zaman $(0: M)$ kümesi M nin sıfırlayıcısıdır. $0 \neq M$ ve bir $r \in R$ için M nin R −endomorfizması ya örten ya da nilpotent olan r nin çarpımından üretiliyorsa R −modül M ye ikincil denir. $Nilrad(M) =\ P$ R nin asal idealidir. Bu durumda M ye P −ikincil denir. R nin bir ikincil ideali R −modül R nin ikincil alt modülüdür[15]. N M nin bir R −altmodülü olsun. M de çözülebilir N nin herhangi sonlu sistem eşitliği N de çözülebilir ise N alt modülü M de soyuttur. Öyleyse R nin bir I ideali için $IN = N \cap IM$ olur. Bir R −modülün alt modülü dahil her modülü soyut ise R −modül soyuttur. Regüler halkaların önemli bir özelliği bütün modüllerinin soyut olmasıdır[16].

Tanım 3. 1. 1. $0 \neq pq \in P$ iken $p \in P$ veya $q \in \sqrt{P}$ şartı sağlanıyorsa R nin P has idealine zayıf asalımsı ideal denir. Dolayısıyla bir asalımsı ideal zayıf asalımsı idealdir. Ancak zayıf asalımsı ideal her zaman asalımsı ideal olmayabilir. Örneğin; 0 tanımdan her zaman bir zayıf asalımsı idealdir. Ancak asalımsı ideal değildir. Ayrıca her zayıf asal ideal zayıf asalımsı ideal olduğundan $P^2 = 0$ olacak şekilde (R, P) quasilokal halkasının her has ideali zayıf asalımsı idealdir[4].

Önerme 3. 1. 2. P R nin bir has ideali olmak üzere aşağıdaki iddialar birbirine denktir.

1) P R nin zayıf asalımsı idealidir.

2) $a \in R - \sqrt{P}$ olmak üzere $(P: Ra) = P \cup (0: Ra)$ dır.

3) $a \in R - \sqrt{P}$ olmak üzere $(P: Ra) = P$ veya $(P: Ra) = (0: Ra)$ dır.

İspat: 1) ⇒ 2): $a \in R - \sqrt{P}$ olsun. $P \cup (0: Ra) \subseteq (P: Ra)$ olduğu açıktır. Diğer içerme için $b \in (P: Ra)$ olduğunu varsayalım. Buradan $ab \in P$ olur. P zayıf asalımsı ideal olduğundan $ab \neq 0$ ise $b \in P$ dir. $ab = 0$ ise $b \in (0: Ra)$ dır. Buradan eşitlik elde ederiz.

2) ⇒ 3): Açıktır.

3) ⇒ 1): $a \notin \sqrt{P}$ olacak şekilde $0 \neq ab \in P$ olsun. O zaman 3) ten

$$b \in (P: Ra) = P \cup (0: Ra)$$

dır. Buradan $ab \neq 0$ olduğundan $b \in P$ dir. P nin R nin zayıf asalımsı ideali olduğu sonucuna varırız.

Teorem 3. 1. 3. P ideali R nin asalımsı olmayan zayıf asalımsı ideali olsun. Bu durumda $\sqrt{P} = \sqrt{0}$ dır.

İspat: İlk olarak $P^2 = 0$ ifadesini ispatlayacağız. $P^2 \neq 0$ olsun. P nin asalımsı ideal olduğunu gösterelim. $p, q \in R$ olacak şekilde $pq \in P$ olsun. $pq \neq 0$ ise P zayıf asalımsı ideal olduğundan ya $p \in P$ ya da $q \in \sqrt{P}$ dir. $pq = 0$ olduğunu varsayalım. $pP \neq 0$ ise $pp' \neq 0$ olacak şekilde P nin bir p' elemanı vardır. Buradan $0 \neq pp' = p(p' + q) \in P$ olur. Ya $p \in P$ ya da $(p' + q) \in \sqrt{P}$ olduğundan P nin zayıf asalımsı ideal olduğunu elde ederiz. $p' \in P \subseteq \sqrt{P}$ olduğundan ya $p \in P$ ya da $q \in \sqrt{P}$ olur. $pP = 0$ olsun. Benzer şekilde $qP = 0$ olsun. $P^2 \neq 0$ olduğundan $cd \neq 0$ olacak şekilde $c, d \in P$ vardır. O zaman $(p + c)(q + d) = cd \in P$ olur. Buradan ya $p + c \in P$ ya da $q + d \in \sqrt{P}$ dir. Dolayısıyla ya $p \in P$ ya da $q \in \sqrt{P}$ olur. Buradan P nin asalımsı ideal olduğunu elde ederiz.

$\sqrt{0} \subseteq \sqrt{P}$ olduğu açıktır. $P^2 = 0$ olduğundan $P \subseteq \sqrt{0}$ olur. Dolayısıyla $\sqrt{P} \subseteq \sqrt{0}$ olur.

Genelde asalımsı idealler ailesinin kesişimi asalımsı değildir. Ancak aşağıdaki sonucumuz bu durumdan farklıdır.

Teorem 3. 1. 4. $\{P_i\}_{i\in I}$ kümesi R nin asalımsı olmayan zayıf asalımsı ideallerinin bir ailesi olsun. O zaman $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ R nin bir zayıf asalımsı bir idealidir.

İspat: İlk olarak $\sqrt{P} = \bigcap_{i\in I}\sqrt{P_i}$ olduğunu göstereceğiz. $\sqrt{P} \subseteq \bigcap_{i\in I}\sqrt{P_i}$ olduğu açıktır. Diğer içerme için $r \in \bigcap_{i\in I}\sqrt{P_i}$ olduğunu varsayalım. Teorem 3. 1. 3. ten

$$\bigcap_{i\in I}\sqrt{P_i} = \sqrt{0}$$

olduğundan bir m için $r^m = 0$ dır. Buradan bir $i \in I$ için $r^m \in P_i$ olur. Dolayısıyla $r \in \sqrt{P}$ dir.

$\sqrt{P} = \sqrt{0} \neq R$ olduğundan P R nin bir has idealidir. $b \notin P$ olacak şekilde $0 \neq ab \in P$ için $a, b \in R$ olduğunu varsayalım. $b \notin P_j$ ve $ab \in P_j$ olacak şekilde bir $j \in I$ vardır. P_i zayıf asalımsı ideal olduğundan $a \in \sqrt{P_j} = \sqrt{P}$ dir.

Sonuç 3. 1. 5. $\{P_i\}_{i\in I}$ kümesi R nin asal olmayan zayıf asal ideallerinin bir ailesi olsun. O zaman $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ ideali R nin zayıf asal idealidir.

İspat: $i \in I$ olacak şekilde ${P_i}^2 = 0$ dır. Buradan her $i \in I$ için $\sqrt{P_i} = \sqrt{0}$ olur. [1,Teorem 1] $\sqrt{P} = \sqrt{0} \neq R$ olduğundan P R nin bir has idealidir. Buradan P nin R nin zayıf asal ideal olduğunu görebiliriz.

Sıradaki bilinen lemmayı referanslar için vereceğiz.

Lemma 3. 1. 6. R_1 ve R_2 birimli değişmeli halkalar olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar geçerlidir:

1) I_1 R_1 in bir ideali ise $\sqrt{I_1 \times R_2} = \sqrt{I_1} \times R_2$ dir.
2) I_2 R_2 in bir ideali ise $\sqrt{R_1 \times I_2} = R_1 \times \sqrt{I_2}$ dir.

Teorem 3. 1. 7. R_1 ve R_2 birimli değişmeli halkalar olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar geçerlidir:

1) P_1 R_1 in bir asalımsı ideali ise $P_1 \times R_2$ ideali R nin asalımsı idealidir.
2) P_2 R_2 in bir asalımsı ideali ise $R_1 \times P_2$ ideali R nin asalımsı idealidir.
3) P R nin bir zayıf asalımsı ideali ise ya $P = 0$ ya da P asalımsı idealdir.

İspat: 1): $(a,b),(c,d) \in R$ olacak şekilde $(a,b)(c,d) = (ac,bd) \in P_1 \times R_2$ olsun. P_1 asalımsı ideal olduğundan ya $a \in P_1$ ya da $c \in \sqrt{P_1}$ dir. Lemma 3. 1. 6 dan ya $(a,b) \in P_1 \times R_2$ ya da $(c,d) \in \sqrt{P_1} \times R_2 = \sqrt{P_1 \times R_2}$ olur. Buradan $P_1 \times R_2$ asalımsı idealdir. Aynı şekilde $R_1 \times P_2$ de asalımsı ideal olur.

2): Bunun ispatı 1) de yapılan ispata benzerdir dolayısıyla bunu atlayacağız. **3):** $P = P_1 \times P_2$ R nin bir zayıf asalımsı ideali olsun. $P \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $(a, b) \neq (0,0)$ olacak şekilde P nin bir (a, b) elemanı vardır. Buradan

$$(0,0) \neq (a, 1)(1, b) \in P$$

olur. O zaman ya $(a, 1) \in P$ ya da $(1, b) \in \sqrt{P}$ olur. $(a, 1) \in P$ ise $P = P_1 \times R_2$ dir. P_1 in asalımsı ideal olduğunu göstereceğiz. Dolayısıyla P 1) den asalımsı idealdir.

$c, d \in R_1$ olacak şekilde $cd \in P_1$ olsun. O zaman $(0,0) \neq (c, 1)(d, 1) = (cd, 1) \in P$ dir. Lemma 3. 1. 6. dan ya $(c, 1) \in P$ ya da $(d, 1) \in \sqrt{P} = \sqrt{P_1} \times R_2$ olur. Dolayısıyla ya $c \in P_1$ ya da $d \in \sqrt{P_1}$ olur. $(1, b) \in \sqrt{P}$ ise bir n için $(1, b^n) \in P$ olur. Buradan $P = R_1 \times P_2$ dir. Benzer bir tartışmadan $R_1 \times P_2$ asalımsı idealdir.

Teorem 3. 1. 8. I R nin ikincil ideali olsun. Bu durumda Q R nin zayıf asalımsı ideali (Zayıf asal ideal için de ayrıca geçerlidir) ise $I \cap Q$ ikincil idealdir.

İspat: I R nin P −ikincil ideali olsun. $a \in R$ olsun. $a \in P$ ise bir n tam sayısı için $a^n(I \cap Q) \subseteq a^n I = 0$ dır. $a \notin P$ ise $aI = I$ dır. $a(I \cap Q) = I \cap Q$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $I \cap Q \subseteq a(I \cap Q)$ göstermek yeterlidir. $c \in I \cap Q$ olduğunu varsayalım. $c \neq 0$ olsun. $aI = I$ olduğundan $0 \neq c = ab \in Q$ olacak şekilde $b \in I$ vardır. Dolayısıyla ya $a \in \sqrt{Q}$ ya da $b \in Q$ dur. $a \in \sqrt{Q}$ ise bir k tam sayısı için $a^k \in Q$ dur. Buradan $a^k I = I \subseteq Q$ dur. Dolayısıyla $a(I \cap Q) = aI = I = I \cap Q$ dur. Aksi takdirde $c = ab \in a(I \cap Q)$ dır.

Önerme 3. 1. 9. P ve Q R nin zayıf asalımsı idealleri olsunlar. $\sqrt{P} \cap S = \emptyset$ olacak şekilde S R nin çarpımsal kapalı kümesi olsun. O zaman $S^{-1}P$ $S^{-1}R$ nin zayıf asalımsı idealidir. Özel olarak P asalımsı ideal değil ise $(S^{-1}P)^2 = 0$ dır.

İspat: $\sqrt{P} \cap S = \emptyset$ olduğundan $S^{-1}P \neq S^{-1}R$ dir. $r, a \in R$ ve $s, t \in S$ olmak üzere $a/t \notin S^{-1}P$ olacak şekilde $0 \neq (r/s)(a/t) = (ra)/st \in S^{-1}P$ olduğunu varsayalım. O zaman $(ra)/st = b/u$ olacak şekilde $b \in P$ ve $u \in S$ elemanları vardır. Buradan bir $v \in S$ için $0 \neq rauv = stbv \in P$ olur. $0 \neq uva \in P$ için $a \notin P$ ve P zayıf asalımsı ideal ise $uv \in \sqrt{P} \cap S$ dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $uav \notin P$ olduğunu varsayabiliriz. Buradan $r \in \sqrt{P}$ olur. Böylece $r/s \in S^{-1}\sqrt{P} = \sqrt{S^{-1}P}$ elde ederiz. Son olarak $(S^{-1}P)^2 = S^{-1}P^2 = 0$ dır.

Teorem 3. 1. 10. I R nin ikincil ideali olsun. Bu durumda Q I nın bir has zayıf asalımsı alt ideali (Zayıf asal ideal için de ayrıca geçerlidir.) ise Q ikincil idealdir.

İspat: I P $-$ikincil ideal olsun. $a \in R$ olsun. $a \in P$ ise $a^m Q \subseteq a^m I = 0$ olacak şekilde bir m tam sayısı vardır. $a \notin P$ ise $aI = I$ dır. Buradan her k tam sayısı için $a^k I = I$ olur. $aQ = Q$ ifadesini göstermek istiyoruz. $aQ \subseteq Q$ olduğu açıktır. Diğer gerektirme için $q \in Q$ olduğunu varsayalım. $q \neq 0$ ifadesini varsayabiliriz. O zaman $0 \neq q = ab \in Q$ olacak şekilde $b \in I$ vardır. Buradan Q zayıf asalımsı ideal ise ya $a \in \sqrt{Q}$ ya da $b \in Q$ olur. $a \in \sqrt{Q}$ ise bir n için $a^n \in Q$ dur. Buradan $a^n I = I \subseteq Q$ dur. Bu bir çelişkidir. O zaman $b \in Q$ doğru olur. Dolayısıyla $q = ab \in aQ$ olur.

Önerme 3. 1. 11. $I \subseteq P$ olacak şekilde I ve P R nin has idealleri olsunlar. Bu durumda aşağıdaki şartlar geçerlidir:

1) P zayıf asalımsı ideal ise P/I zayıf asalımsı idealdir.
2) I ve P/I zayıf asalımsı idealler ise (Zayıf asal ideal için de ayrıca geçerlidir) P zayıf asalımsı idealdir (Zayıf asal ideal için de ayrıca geçerlidir).

İspat: 1): $a, b \in R$ olacak şekilde $0 \neq (a + I)(b + I) = ab + I \in P/I$ olsun. Buradan $ab \in P$ olur. $ab = 0 \in I$ ise $(a + I)(b + I) = 0$ olur. Bu bir çelişkidir. O zaman P zayıf asalımsı ideal ise ya $a \in P$ ya da $b \in \sqrt{P}$ olur. Dolayısıyla ya $a + I \in P/I$ ya da bir n tam sayısı için $b^n + I = (b + I)^n \in P/I$ olur.

2): $a, b \in R$ olacak şekilde $0 \neq ab \in P$ olsun. O zaman $(a + I)(b + I) \in P/I$ olur. $ab \in I$ için I zayıf asalımsı ideal ise ya $a \in I \subseteq P$ ya da $b \in \sqrt{I} \subseteq \sqrt{P}$ olur. Dolayısıyla $ab \notin I$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda bir m tam sayısı için ya $a + I \in P/I$ ya da $b^m + I \in P/I$ dır. Buradan ya $a \in P$ ya da $b \in \sqrt{P}$ elde edilir.

Teorem 3. 1. 12. P ve Q R nin asalımsı olmayan zayıf asalımsı idealleri olsunlar. Bu durumda $P + Q$ R nin zayıf asalımsı idealidir. Özel olarak $\sqrt{P + Q} = \sqrt{P}$ dir.

İspat: Teorem 3. 1. 3 ten $\sqrt{P} + \sqrt{Q} = \sqrt{0} \neq R$ dir. Buradan $P + Q$ R nin bir has ideali olur[14, sayfa 53]. $(P + Q)/Q \cong Q/(P \cap Q)$ olduğundan Önerme 3. 1. 11. 1) den $(P + Q)/Q$ nun zayıf asalımsı ideal olduğunu elde ederiz. Önerme 3. 1. 11. 2) bu durumu takip eder. Sonuç olarak $\sqrt{P + Q} = \sqrt{\sqrt{P} + \sqrt{Q}} = \sqrt{\sqrt{0}} = \sqrt{0}$ elde ederiz[14, sayfa 53].

Şimdi Nakayama lemmanın bir versiyonunu gösterelim ve ispatlayalım.

Teorem 3. 1. 13. P R nin asalımsı olmayan zayıf asalımsı ideali olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar geçerlidir:

1) $J(R)$ R nin Jacobson radikali olmak üzere $P \subseteq J(R)$ dir.

2) M bir R −modül ve $PM = M$ ise $M = 0$ dır.

3) M bir R −modül ve $PM + N = M$ olacak şekilde N M nin alt modülü ise $M = N$ dir.

İspat: 1): $a \in P$ olsun. $a \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Her $b \in R$ için $1 - ba$ elemanının R nin birim elemanı olduğunu göstermek yeterlidir. $P^2 = 0$ olduğundan $1 = 1 - b^2a^2 = (1 - ba)(1 + ba)$ dır. Buradan $a \in J(R)$ olur.

2): $PM = M$ olduğundan $M = PM = P^2M = 0$ olur.

3): 2) den ispatlanabilir.

Sonuç 3. 1. 14. R için aşağıdaki şartlar geçerlidir:

1) P R tamlık bölgesinin sıfırdan farklı bir has ideali olsun. Bu durumda P nin zayıf asalımsı ideal olmasının gerek ve yeter koşulu P nin asalımsı ideal olmasıdır.

2) P R nin asalımsı olmayan pür zayıf asalımsı ideali ise $P = 0$ dır.

3) R regüler halka ise R nin asalımsı olmayan zayıf asalımsı idealleri sadece 0 olabilir.

İspat: 1): P ideali R nin zayıf asalımsı ideali olsun. $p, q \in R$ olacak şekilde $pq \in P$ olsun. $pq \neq 0$ için P bir zayıf asalımsı ideal ise ya $p \in P$ ya da $q \in \sqrt{P}$ dir. $pq = 0$ ise R bir bölge olduğundan $p = 0 \in P$ veya $q = 0 \in \sqrt{P}$ dir.

2): P R nin asalımsı olmayan zayıf asalımsı ideali olsun. P pür ideal olduğundan Teorem 3. 1. 3. ten $P = P^2 = 0$ elde ederiz.

3) R üzerindeki her ideal pür ideal olduğundan bunun ispatı 2) den yapılabilir.

Tanım 3. 1. 15. N R üzerinde M modülünün bir has alt modülü olmak üzere bir $r \in R$ ve $m \in M$ için $0 \neq rm \in N$ iken $m \in N$ veya bir n için $r^nM \subseteq N$ oluyorsa N ye zayıf asalımsı alt modül denir.

Bir modülün her asalımsı alt modülünün zayıf asalımsı alt modül olduğu açıktır. Fakat her zayıf asalımsı alt modül asalımsı alt modül olmak zorunda değildir.

$r_i \in R_i$ ve $m_i \in M_i$ olacak şekilde $(r_1, r_2)(m_1, m_2) = (r_1m_1, r_2m_2)$ şeklinde tanımlayalım.

Teorem 3. 1. 16. R_1 ve R_2 birimli değişmeli bir halkalar olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ olsun ve her $i = 1,2$ için M_i ler için R_i −modül olsun. O halde $M = M_1 \times M_2$ kümesi R −modül olur.

1) P_1 M_1 in asalımsı alt modülü ise $P_1 \times M_2$ M nin alt modülüdür.

2) P_2 M_2 in asalımsı alt modülü ise $M_1 \times P_2$ M nin alt modülüdür.

3) P M nin zayıf asalımsı alt modülü ise ya $P = 0$ dır ya da P bir asalımsı idealdir.

İspat: 1): $(a, b) \in R$ ve $(m_1, m_2) \in M$ olacak şekilde

$$(a, b)(m_1, m_2) = (am_1, bm_2) \in (P_1 : M_2)$$

olsun. Dolayısıyla ya bir n için $a^n \in (P_1 : M_1)$ ya da P_1 asalımsı olduğundan $m_1 \in P_1$ dir. Buradan ya bir n için $(P_1 \times M_2 : M)$ ya da $(m_1, m_2) \in (P_1 \times M_2)$ dir.

2): Bu ispat 1) in benzeridir.

3): $P = P_1 \times P_2$ M nin zayıf asalımsı alt modülü olsun. $P \neq 0$ olduğunu varsayalım. Buradan ya $P_1 \neq 0$ ya da $P_2 \neq 0$ olur. $P_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda P_2 nin sıfırdan farklı bir p_2 elemanı vardır. $r \in (P_1 : M_1)$ ve $c \in M_1$ olsun. O zaman $(0,0) \neq (r, 1)(c, p_2) \in P$ olsun. P zayıf asalımsı ideal ise ya bir m için $(r, 1)^m = (r^m, 1) \in (P : M) = (P_1 : M_1) \times (P_2 \times M_2)$ ya da $(c, p_2) \in P = P_1 \times P_2$ dir. Buradan ya $1 \in (P_2 \times M_2)$ ya da $c \in P_1$ olur. Bu durumda ya $0 \times M_2 \subseteq P$ dolayısıyla $P = P_1 \times M_2$ ya da $M_1 \times 0 \subseteq P$ dolayısıyla $P = M_1 \times P_2$ dir. $P = P_1 \times M_2$ olduğunu varsayalım. P_1 idealinin M_1 in asalımsı alt modülü olduğunu göstereceğiz. Buradan P ideali 1) den asalımsı idealdir. $t \in R_1$ ve $p \in M_1$ olacak şekilde $tp \in P_1$ olsun. O zaman $(0,0) \neq (t, 1)(p, p_2) \in P$ dir. Buradan bir k için ya $(t^k, 1) \in (P_1 : M_1) \times (P_2 \times M_2)$ ya da $(p, p_2) \in P$ olur. Böylece bir k için $t^k \in (P_1 : M_1)$ ya da $m \in P_1$ dir. Bu durumda P_1 asalımsı idealdir. Bu durum $P = M_1 \times P_2$ için benzer şekilde geçerlidir.

Şimdi zayıf asalımsı alt modüllerin iki karakterizasyonunu verelim.

Teorem 3. 1. 17. M bir R −modül ve P M nin bir has ideali olsun. Bu durumda asağıdaki şartlar birbirine denktir:

1) P M nin zayıf asalımsı alt modülüdür.

2) $m \in M - P$ için $\sqrt{P : Rm} = \sqrt{P : M} \cup (0 : Rm)$.

3) $m \in M - P$ için $\sqrt{P : Rm} = \sqrt{P : M}$ ya da $(0 : Rm) = \sqrt{N : Rm}$.

İspat: 1) ⇒ 2): $m \in M - P$ için $a \in \sqrt{P : Rm}$ olsun. O zaman bir k için $a^k m \in P$ olur. $a^k m \neq 0$ ise P zayıf asalımsı ideal olduğundan $a^k \in (P : M)$ dir. Buradan $a \in \sqrt{N : M}$ olur. $a^k m = 0$ ise $a^s m$ olacak şekilde s nin en küçük tam sayı olduğunu varsayalım. $s = 1$ ise $a \in (0 : Rm)$ olur. Aksi takdirde $a \in \sqrt{P : M}$ dir. Dolayısıyla $\sqrt{P : Rm} \subseteq \sqrt{P : M} \cup (0 : Rm) = H$ dir. Diğer içerme için $b \in H$ olduğunu varsayalım. $b \in (0 : Rm)$

ise $b \in \sqrt{P: Rm}$ olduğu açıktır. $b \in \sqrt{P: M}$ ise bir t için $b^t \in (P: M) \subseteq \sqrt{P: Rm}$ dir. Buradan $b \in \sqrt{P: Rm}$ olur.

2) ⇒ 3): Açıktır.

3) ⇒ 1): $r \in R$ ve $m \in M - P$ olacak şekilde $0 \neq rm \in P$ olduğunu varsayalım. O zaman $r \in (P: Rm) \subseteq \sqrt{P: Rm}$ ve $r \notin (0: Rm)$ dir. 3) ten $r \in \sqrt{N: Rm} = \sqrt{N: M}$ olur[25].

3. 2. Hemen Hemen Asalımsı İdealler

Bu kısımda değişmeli halkalarda yeni tip idealler tanımlanmıştır. Bu idealleri hemen hemen asalımsı idealler olarak adlandırılmıştır. Bu ideallerin bazı özellikleri açıklanmış ve bazı karakterizasyonları verilmiştir.

A ve B kümeleri R nin boş olmayan alt kümeleri olmak üzere $A: B = \{x \in R: xB \subseteq A\}$ olarak tanımlanır[13].

Tanım 3. 2. 1. $1 \leq i \leq m$ olacak şekilde her $a_i \in R$ için $I = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ ise I ya sonlu üretilmiş ideal denir[19, sayfa 182].

Tanım 3. 2. 2. R nin her ideali idempotent ise R ye tam idempotent halka denir. [23, sayfa 14] Her $a \in R$ için $a^2 = a$ ise R ye Bool halkası denir[23, sayfa 25].

Tanım 3. 2. 3. R tek maksimal ideale sahip bir halka ise R ye yerel halka denir[19, sayfa 226].

Tanım 3. 2. 4. S R nin boş olmayan alt kümesi olmak üzere $0 \notin S$ ve $a, b \in S$ için $ab \in S$ ise S ye çarpımsal küme denir[22, sayfa 230]. R nin S lokalizasyonu R_S olarak gösterilir. S R nin bütün sıfırdan farklı bölenlerinin kümesi olmak üzere A R nin bir ideali ise $A^{-1} = \{x \in R_S: xA \in R\}$ kümesini tanımlarız. $AA^{-1} = R$ ise A ya R nin terslenebilir ideali denir[17].

Lemma 3. 2. 5. S R nin çarpımsal kümesi olsun. O zaman her $a \in R$ ve $m \in S$ için $\langle a \rangle_S = \langle \frac{a}{m} \rangle$ dir.

İspat: $a \in R$ ve $m \in S$ olsun. $x \in \langle a \rangle$ ve $n \in S$ olacak şekilde $\frac{x}{n} \in \langle a \rangle_S$ olsun. O zaman bir $r \in R$ için $x = ra$ olur. Buradan $\frac{x}{n} = \frac{ra}{n}\frac{m}{m} = \frac{rm}{n}\frac{a}{m} \in \langle \frac{a}{m} \rangle$ dir. Dolayısıyla $\langle a \rangle_S \subseteq \langle \frac{a}{m} \rangle$ olur.

Tersine $\frac{x}{n} \in \langle \frac{a}{m} \rangle$ olsun. O zaman $\frac{x}{n} = \frac{r}{s}\frac{a}{m} = \frac{ra}{sm} \in \langle a \rangle_S$ olacak şekilde $\frac{r}{s} \in R_S$ vardır.

Buradan $\langle \frac{a}{m} \rangle \subseteq \langle a \rangle_S$ olur. İki sonuçtan $\langle a \rangle_S = \langle \frac{a}{m} \rangle$ elde edilir.

Tanım 3. 2. 6. A R nin bir has ideali olmak üzere $a, b \in R$ için $ab \in A - A^2$ iken n pozitif bir tamsayı olmak üzere $a \in A$ veya $b^n \in A$ ise A ya hemen hemen asalımsı ideal denir.

Her asalımsı idealin, her hemen hemen asal idealin ve R nin her idempotent idealinin dolayısıyla idempotent halkaların ve Bool halkalarının bütün has ideallerinin hemen hemen asalımsı ideal olduğu açıktır. Ancak bahsedilen durumlar için genelde tersi doğru değildir.

Örnek 3. 2. 7. Z_{30} da $\langle 6 \rangle$ ideali hemen hemen asalımsı fakat asalımsı ideal değildir.

Örnek 3. 2. 8. Tek sıfırdan farklı maksimal ideali M olan bir Noetherian halkada M^2 asalımsı ideal dolayısıyla hemen hemen asalımsı idealdir. Ancak hemen hemen asal ideal değildir[13].

Örnek 3. 2. 9. Z_8 de $\langle 4 \rangle$ ideali hemen asalımsıdır ancak idempotent değildir.

Buradan hemen hemen asalımsı idealleri; asalımsı, hemen hemen asal ve idempotent ideallerin genelleştirmesi olarak düşünebiliriz.

3. 2. 1. Temel Sonuçlar

İlk olarak hemen hemen asalımsı ideallerin bazı temel özelliklerini vereceğiz.

Önerme 3. 2. 1. 1. I R nin ideali ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

1) $I \subseteq P$ olacak şekilde P R nin hemen hemen asalımsı ideali ise $\frac{P}{I}$ $\frac{R}{I}$ nın hemen hemen asalımsı idealidir.

2) $\frac{R}{I}$ da I hemen hemen asalımsı ideal ve P' zayıf asalımsı ideal ise $I \subseteq P$ için $P' = \frac{P}{I}$ olacak şekilde R nin hemen hemen asalımsı bir P ideali vardır.

İspat: 1): $(a + I)(b + I) \in \frac{P}{I} - (\frac{P}{I})^2$ ve $(a + I) \notin \frac{P}{I}$ olsun. O zaman $ab \in P$, $ab + I \notin (\frac{P}{I})^2$ ve $a \notin P$ elde ederiz. $ab \in P^2$ ise bir $n \in Z^+$ için $a_i, b_i \in P$ olacak şekilde her i için $ab = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ deriz. Buradan

$$ab + I = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + I = \sum_{i=1}^{n} (a_i + I)(b_i + I) \in \frac{P}{I}\frac{P}{I} = (\frac{P}{I})^2$$

elde ederiz. Bu bir çelişki olur. Buradan $ab \notin P^2$ ve dolayısıyla bir $m \in Z^+$ için $b^m \in P$

olur. Buradan $(b+I)^m \in \frac{P}{I}$ dır. $\frac{P}{I}$ nın $\frac{R}{I}$ nın bir hemen hemen asalımsı ideali olduğu sonucunu elde ederiz.

2): $P' = \frac{P}{I}$ olacak şekilde $I \subseteq P$ için R nin bir P ideali vardır. $ab \in P - P^2$ olacak şekilde $a, b \in R$ olsun. Buradan iki durum ortaya çıkar:

1) $ab \in I$ ise bir $n \in Z^+$ için $a \in I$ veya $b^n \in I$ olur. Buradan $a \in P$ veya $b^n \in P$ olur.

2) $ab \notin I$ ise $(a+I)(b+I) \in \frac{P}{I} - 0$ dır. Böylece bir $n \in Z^+$ için $(a+I) \in \frac{P}{I}$ veya $(b+I)^n \in \frac{P}{I}$ elde ederiz. Buradan $a \in P$ veya $b^n \in P$ olur. Dolayısıyla P hemen hemen asalımsı idealdir.

Şimdi çekirdeği olan hemen hemen asalımsı idealin homomorf görüntüsünün de hemen hemen asalımsı ideal olduğunu ispatlayalım.

Önerme 3. 2. 1. 2. f fonksiyonu R den R' halkasına bir homomorfizma olsun. $P \supseteq kerf$ olacak şekilde P R nin hemen hemen asalımsı ideali ise $f(P)$ $f(R)$ nin hemen hemen asalımsı idealidir.

İspat: P R nin has ideali olduğundan $f(P)$ de $f(R)$ nin has idealidir. $x, y \in f(R)$ olacak şekilde $xy \in f(P) - (f(P))^2$ olsun. O zaman $a, b \in R$ için

$$f(ab) = f(a)f(b) = xy \in f(P) - (f(P))^2$$

olacak şekilde $x = f(a)$ ve $y = f(b)$ olur. Buradan bir $p \in P$ için $f(ab) = f(p)$ elde ederiz. Böylece $ab - p \in kerf \subseteq P$ elde ederiz. Buradan $ab \in P$ olur. $ab \in P^2$ ise $xy = f(ab) \in f(P^2) = (f(P))^2$ dır. Bu çelişki olur. O zaman $ab \notin P^2$ dir. Dolayısıyla bir $n \in Z^+$ için $a \in P$ veya $b^n \in P$ olur. Buradan $x \in f(P)$ veya $y^n \in f(P)$ olur.

Hemen hemen asalımsı idealin sıfır bölenlerle ilgili bir özelliğini verelim.

Önerme 3. 2. 1. 3. I R nin hemen hemen asalımsı ideali olsun ve $b + I$ $\frac{R}{I}$ da sıfır bölen olsun. O zaman bir $n \in Z^+$ için $b^n I \subseteq I^2$ dir.

İspat: $b + I$ $\frac{R}{I}$ da sıfır bölen olduğundan $bc \in I$ olacak şekilde $c \notin I$ vardır. Bir $n \in Z^+$ için $b^n \in I$ ise $b^n I \subseteq I^2$ dir. Her $n \in Z^+$ için $b^n \notin I$ ise $bc \in I^2$ dir. $bc \notin I^2$ olduğundan $c \in I$ olur. Bu bir çelişkidir. Bir $x \in I$ için $x + c \notin I$ ve $(x+c)b \in I$ deriz. I hemen hemen asalımsı ideal olduğundan $(x+c)b \in I^2$ olmalıdır. Burada $bc \in I^2$ olduğundan $bx \in I^2$ olur. $bI \subseteq I^2$ elde ederiz.

Hemen hemen asalımsı ideallerin bazı karakterizasyonlarını verelim.

Lemma 3. 2. 1. 4. c Z tamsayılar halkasının sıfırdan farklı birim olmayan bir elemanı olsun. Her $n \in Z^+$ için p elemanı $c \neq p^n$ olacak şekilde bir asal sayı ise $a \notin Zc$ her $m \in Z^+$ için $b^m \notin Zc$ ve $ab \in Zc - Zc^2$ olacak şekilde $a\,, b \in Z$ vardır.

İspat: Z nin asalımsı idealleri 0 ve $i \in Z^+$ için Z_{p^i} olduğundan ve p asal sayı olduğundan Zc asalımsı ideal değildir. Bundan dolayı $a \notin Zc$ ve her $m \in Z^+$ için $d^m \notin Zc$ olmak üzere $ad \in Zc$ olacak şekilde $a, d \in Z$ vardır. $ad \notin Zc^2$ ise $b = d$ olduğundan $ab \in Zc - Zc^2$ elde ederiz. $ad \in Zc^2$ ise $d + c \notin Zc$ ve $a(d + c) \in Zc$ dir. $a(d + c) \in Zc^2$ ise $ad \in Zc^2$ olduğundan $ac \in Zc^2$ elde ederiz. Buradan $a \in Zc$ olur. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $a(d + c) \notin Zc^2$ sonucuna varırız. Bu durumda $b = d + c$ olur.

Lemma 3. 2. 1. 4. ün yardımıyla tam sayılar halkasının sıfırdan farklı birim olmayan üreteçlere sahip asalımsı ve hemen hemen asalımsı ideallerin denk olduğunu ispatlayalım.

Önerme 3. 2. 1. 5. c Z de sıfırdan farklı birim olmayan bir eleman ise Zc nin hemen hemen asalımsı olmasının gerek ve yeter koşulu Zc nin asalımsı olmasıdır.

İspat: Lemma 3. 2. 1.4. ten ispatlanır.

Önerme 3. 2. 1. 5. in sonuçlarını belirli şartlar altında ispatlayalım. Bu herhangi bir değişmeli birimli halka için genişletilebilir.

Teorem 3. 2. 1. 6. c R de sıfırdan farklı birim olmayan bir eleman olsun. $0{:}\langle c\rangle \subseteq \langle c\rangle$ ise $\langle c\rangle$ nin R nin hemen hemen asalımsı ideali olmasının gerek ve yeter koşulu $\langle c\rangle$ nin R nin asalımsı ideali olmasıdır.

İspat: (⇒): $\langle c\rangle$ nin hemen hemen asalımsı ideal olduğunu ancak asalımsı ideal olmadığını varsayalım. O zaman her $n \in Z^+$ için $xy \in \langle c\rangle$, $x \notin \langle c\rangle$ ve $y \notin \langle c\rangle$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. $\langle c\rangle$ hemen hemen asalımsı ideal olduğundan $xy \in \langle c^2\rangle$ elde ederiz. $x(y + c) \in \langle c\rangle$ deriz. $(y + c) \notin \langle c^2\rangle$ ise bir $m \in Z^+$ için $x \in \langle c\rangle$ veya $(y + c)^m \in \langle c\rangle$ deriz. Yani $x \in \langle c\rangle$ veya $y^m \in \langle c\rangle$ dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x(y + c) \in \langle c^2\rangle$ dir. Buradan $xc \in \langle c^2\rangle$ olur. Bir $r \in R$ için $xc = rc^2$ deriz. O zaman $c(x - cr) = 0$ olur. $0{:}\langle c\rangle \subseteq \langle c\rangle$ olduğundan $x - cr \in \langle c\rangle$ dir. Dolayısıyla $x \in \langle c\rangle$ olur. Bu bir çelişkidir. Buradan $\langle c\rangle$ nin R nin asalımsı ideali olması gerektiği sonucuna varırız.

(⇐): Tersinin ispatı benzer şekilde olur.

Teorem 3. 2. 1. 7. R nin I has idealinin hemen hemen asalımsı olmasının gerek ve yeter koşulu her $x \in R - I$ için $I: x = I^2$ veya $x \subseteq \sqrt{I}$ olmasıdır.

İspat: I R nin hemen hemen asalımsı ideali ve $x \in R - I$ olsun. $y \in I: x$ olsun. O zaman $xy \in I$ olur. $xy \in I^2$ ise $y \in I^2$ olur. Buradan $I: x \subseteq I^2: x$ olur. $I: x = I^2: x$ elde ederiz. $xy \notin I^2$ ise $x \notin I$ olduğundan bir $n \in Z^+$ için $y^n \in I$ elde ederiz. Buradan $y \in \sqrt{I}$ dır. $I: x \subseteq \sqrt{I}$ sonucuna ulaşırız.

Tersine $xy \in I - I^2$ ve $x \notin I$ olsun. O zaman $y \in I: x$ olur. Buradan $y \in I^2: x$ veya $y \in \sqrt{I}$ elde ederiz. $y \in I^2: x$ ifadesi $xy \notin I^2$ ile çeliştiğinden $y \in \sqrt{I}$ olur. Bir $n \in Z^+$ için $y^n \in I$ sonucuna varırız.

Teorem 3. 2. 1. 8. P R nin has ideali ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1) P R nin hemen hemen asalımsı idealidir.
2) $a \in R - \sqrt{P}$ için $(P: a) = P \cup (P^2: a)$ dır.
3) $a \in R - \sqrt{P}$ için $(P: a) = P$ veya $(P: a) = (P^2: a)$ dır.

İspat: 1) ⇒ 2): $a \in R - \sqrt{P}$ olsun. $P \cup (P^2: a) \subseteq (P: a)$ olduğu açıktır. $b \in (P: a)$ olduğunu varsayalım. Buradan $ab \in P$ dir. $ab \in P^2$ ise $b \in (P^2: a)$ dır. $ab \notin P^2$ ise $b \in P$ dir. Dolayısıyla $(P: a) = P \cup (P^2: a)$ elde ederiz.

2) ⇒ 3): $(P: a) = P \cup (P^2: a)$ olacak şekilde $a \in R - \sqrt{P}$ olsun. P, $(P: a)$ ve $(P^2: a)$ Lemma 3. 2. 5. ten R nin idealleri olduğundan $(P: a) = P$ veya $(P: a) = (P^2: a)$ elde ederiz.

3) ⇒ 1): $b \notin \sqrt{P}$ olmak üzere $ab \in P - P^2$ olsun. Buradan her $n \in Z^+$ için $b^n \notin P$ dir. O zaman $a \in (P: a)$ olur. $(P: b) = (P^2: b)$ ise $ab \in P^2$ olur. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $(P: b) = P$ dır. Buradan $a \in P$ olur.

Aşağıdaki lemmayı, vereceğimiz hemen hemen asalımsı ideallerin karakterizasyonların birincisi olarak ele alalım.

Lemma 3. 2. 1. 9. $\{\mathfrak{A}_i : 1 \leq i \leq m\}$ R nin sol ideallerinin sonlu kümesi olsun(R burada değişmeli olmak zorunda değildir). $\mathfrak{A}_i$ nin bir kuvveti R nin I idealinde kapsanıyorsa $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_m$ in bir kuvveti I idealinde kapsanır.

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için matematiksel tümevarım metodunu kullanacağız. Bunun için $m = 2$ ye kadar işlem yapmak yeterlidir. $\mathfrak{A}_1$ ve $\mathfrak{A}_2$ nin bir kuvveti I idealinde kapsansın. O zaman n kuvveti $\mathfrak{A}_1$ ve $\mathfrak{A}_2$ nin maksimum kuvvetleri olmak üzere ${\mathfrak{A}_1}^n \subseteq I$ ve ${\mathfrak{A}_2}^n \subseteq I$ elde ederiz. $(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)^{2n} \subseteq I$ olduğunu varsayalım.

$a_i \in \mathfrak{A}_1$ ve $b_i \in \mathfrak{A}_2$ olmak üzere $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_{2n} + b_{2n})$ çarpımı $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ nin $2n$ elemanları olsun. Bu çarpım genişletildiğinde bu çarpımın her bir terimi biri $\mathfrak{A}_1$ den diğeri $\mathfrak{A}_2$ den olmak üzere $2n$ elemanlarının çarpımıdır. Bu terimlerin birinde $\mathfrak{A}_1$ den veya $\mathfrak{A}_2$ den en az n katsayısı olmalıdır. $\mathfrak{A}_1$ ve $\mathfrak{A}_2$ sol idealler olduğundan ${\mathfrak{A}_1}^n \subseteq I$ ve ${\mathfrak{A}_2}^n \subseteq I$ dır. Bunun üzerine çarpım I nın içindedir. Dolayısıyla $(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)^{2n} \subseteq I$ dır.

Teorem 3. 2. 1. 10. B sonlu üretilmiş ideal olmak üzere A ve B R nin has idealleri olsun. I nın hemen hemen asalımsı olmasının gerek ve yeter koşulu bir $n \in Z^+$ için $A \subseteq I$ veya $B^n \subseteq I$ olacak şekilde $AB \subseteq I - I^2$ olmasıdır.

İspat: I idealinin hemen hemen asalımsı olduğunu varsayalım. B sonlu üretilmiş olduğundan her $1 \leq i \leq k$ ve $b_i \in B$ için $B = \langle b_1 \rangle + \langle b_2 \rangle + \cdots + \langle b_k \rangle$ olacak şekilde $k \in Z^+$ vardır. $A \nsubseteq I$ ise $a \notin I$ için $a \in A$ vardır. Her $1 \leq i \leq k$ için $ab_i \in AB \subseteq I - I^2$ ve I hemen hemen asalımsı olduğundan ${b_i}^{l_i} \in I$ olacak şekilde $l_i \in Z^+$ vardır. Lemma 3. 2. 1. 9. dan $\langle b_i \rangle^{l_i} \subseteq I$ dır. Buradan bir $n \in Z^+$ için $B^n \subseteq I$ olur.

Tersine $ab \in I - I^2$ olacak şekilde $a, b \in R$ olsun. O zaman $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq I - I^2$ olur. Buradan bir $n \in Z^+$ için $\langle a \rangle \subseteq I$ veya $\langle b \rangle^n \subseteq I$ dır. $a \in I$ veya $b^n \in I$ sonucunu elde ederiz.

Not 3. 2. 1. 11. Z_{30} da $\langle 6 \rangle$ idealini düşünelim. $4 \times 9 \in \langle 6 \rangle^2$ dir. Şu halde $4 \notin \langle 6 \rangle$ ve $9 \notin \langle 6 \rangle$ dır. Buradan $a, b \in R$ için $ab \in I^2$ iken $a \in I$ veya $b \in I$ şartına uymayan hemen hemen asalımsı ideal elde ederiz. Z_8 in $\langle 4 \rangle$ ideali bu şartı sağlar fakat asal ideal değildir. Yukarıdaki şartı sağlayan ideallere $2-$potent asal ideal denir.

Şimdi bütün $2-$potent asal idealler kümesinin, asalımsı idealler kümesinin ve hemen hemen asalımsı idealler kümesinin denk olduğunu ispatlayacağız.

Önerme 3. 2. 1. 12. I ideali R nin $2-$potent asal ideali iken I nın hemen hemen asalımsı olması için gerek ve yeter koşul I nın asalımsı olmasıdır.

İspat: I hemen hemen asalımsı ideal olsun. $a \notin I$ için $ab \in I$ olacak şekilde $a, b \in R$ olsun. $ab \in I^2$ ise $b \in I$ elde ederiz. $ab \notin I^2$ ise I hemen hemen asalımsı ideal olduğundan bir $n \in Z^+$ için $b^n \in I$ olur. Buradan I asalımsı ideal olur.

Tersi benzer şekilde ispatlanabilir.

Önerme 3. 2. 1. 13. $\sqrt{I} = I$ olacak şekilde I R nin bir ideali olsun. I nın hemen hemen asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul I nın hemen hemen asal ideal olmasıdır.

İspat: I nın hemen hemen asalımsı ideal olduğunu varsayalım. $ab \in I - I^2$ olacak şekilde $a, b \in R$ olsun. $a \notin I$ ise bir $n \in Z^+$ için $b^n \in I$ olur. Dolayısıyla $b \in \sqrt{I} = I$ dır. Buradan I nın hemen hemen asal ideal olduğu sonucuna ulaşırız.

Tersi benzer şekilde ispatlanabilir.

Şimdi terslenebilir hemen hemen asalımsı ideallerin asalımsı ideal olduklarını ispatlayalım.

Teorem 3. 2. 1. 14. I ideali R nin terslenebilir bir ideali iken I nın hemen hemen asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul I nın asalımsı ideal olmasıdır.

İspat: I hemen hemen asalımsı ideal olsun. $xy \in I$ olacak şekilde $x, y \in R$ olsun. $x \notin I$ ise $y + I$ $\frac{R}{I}$ da bir sıfır bölendir. Dolayısıyla Teorem 3. 2. 1. 3. ten bir $n \in Z^+$ için $y^n I \subseteq I^2$ elde ederiz. I bir terslenebilir ideal olduğundan

$y^n R = y^n I I^{-1} \subseteq I^2 I^{-1} = IR \subseteq I$ olur. Buradan $y^n \in I$ elde ederiz.

Tersi benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 3. 2. 1. 15. R nin I has idealinin hemen hemen asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul $AB \subseteq I - I^2$ olmak üzere R nin herhangi A ve B idealleri için $A \subseteq I$ veya $B \subseteq \sqrt{I}$ olmasıdır.

İspat: (⇒): I hemen hemen asalımsı ideal olsun. $B \nsubseteq \sqrt{I}$ ise $b \notin \sqrt{I}$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. a elemanı A nın bir keyfi elemanı ise $ab \in I - I^2$ dir. $b \notin \sqrt{I}$ olduğundan $a \in I$ elde ederiz. Dolayısıyla $A \subseteq I$ dır.

(⇐): $ab \in I - I^2$ olsun. O zaman $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq I - I^2$ olur. Dolayısıyla $\langle a \rangle \subseteq I$ veya $\langle b \rangle \subseteq \sqrt{I}$ dır. Buradan bir $n \in Z^+$ için $a \in I$ veya $b^n \in I$ elde ederiz.

Teorem 3. 2. 1. 16. R nin I has idealinin hemen hemen asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul $\frac{I}{I^2}$ nin $\frac{R}{I^2}$ de zayıf asalımsı ideal olmasıdır.

İspat: (⇒): I hemen hemen asalımsı ideal olsun. $a + I^2$, $b + I^2 \in \frac{R}{I^2}$ olmak üzere $(a + I^2)(b + I^2) \in \frac{I}{I^2} - 0$ olsun. O zaman $ab \in I$ ve $ab \notin I^2$ olur. I hemen hemen asalımsı ideal olduğundan bir $n \in Z^+$ için $a \in I$ veya $b^n \in I$ dır. $a \in I$ ise $a + I^2 \in \frac{I}{I^2}$ ve $b^n \in I$ ise $(b^n + I^2) = (b + I^2)^n \in \frac{I}{I^2}$ dir.

(⇐): $\frac{I}{I^2}$ $\frac{R}{I^2}$ nin zayıf asalımsı ideali olsun. $a, b \in R$ olacak şekilde $ab \in I - I^2$ olsun. O zaman $ab + I^2 \in \frac{I}{I^2}$ dir ve $ab + I^2 \neq I^2$ dir. Buradan $(a + I^2)(b + I^2) \in \frac{I}{I^2} - 0$ elde ederiz. Dolayısıyla bir $n \in Z^+$ için ya $(a + I^2) \in \frac{I}{I^2}$ ya da $(b + I^2)^n \in \frac{I}{I^2}$ dır. Bunun sonucunda $a \in I$ veya $b^n \in I$ olur.

En son olarak belirli tip halkalarda hemen hemen asalımsı ideallerin birkaç karakterizasyonunu verelim.

S R nin çarpımsal kümesi olmak üzere $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde P R nin asal ideali ise;

1) P_S R_S nin asal idealidir.

2) $P_S \cap R = \{x \in R; xs \in P$, bir $s \in S$ için$\}$ olacak şekilde $P_S \cap R = P$ dir[13].

Şimdi 1) i hemen hemen asalımsı idealler üzerinde genişletelim. Fakat ilk durum ikinci durumun genelde tutarlı olmayan bir örneğini verir.

Örnek 3. 2. 1. 17. Z_6 halkasını ve $S = \{1,2,4\}$ kümesini düşünelim. Z_6 da $P = \{0\}$ hemen hemen asalımsı idealini alırsak

$$P_S \cap Z_6 = \{x \in Z_6\,; xs = 0, \text{ bir } s \in S \text{ için}\} = \{0,3\} \neq P$$

elde ederiz.

Teorem 3. 2. 1. 18. P R nin hemen hemen asalımsı ideali ve $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde S R nin çarpımsal kümesi ise P_S R_S nin hemen hemen asalımsı idealidir.

İspat: $P_S = R_S$ ise $S \neq \emptyset$ olduğundan $s \in S$ alırız. Bu durumda $\frac{s}{s} \in P_S$ olur. Aslında $\frac{s}{s}$ R_S nin birim elemanıdır. O zaman bir $p \in P$ ve $t \in S$ için $\frac{s}{s} = \frac{p}{t}$ dir. O zaman

$$kst = ksp \in P \cap S$$

olacak şekilde $k \in S$ vardır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $P_S \neq R_S$ dir. $\frac{p}{s} \notin P_S$ olacak şekilde $\frac{p}{s}\frac{q}{t} \in P_S - (P_S)^2$ olsun. Buradan $\frac{pq}{st} \in P_S$, $\frac{pq}{st} \notin (P_S)^2$ ve $p \notin P$ sonuçlarını elde ederiz. O zaman bir $z \in P$ ve $u \in S$ için $\frac{pq}{st} = \frac{z}{u}$ olur. Dolayısıyla $vupq = vstz \in P$ olacak şekilde $v \in S$ vardır. $vupq \in P^2$ ise

$$\frac{pq}{st} = \frac{vu}{vu}\frac{pq}{st} = \frac{vupq}{vust} \in (P_S)^2$$

olur. Bu bir çelişki olur. O zaman $vupq \notin P^2$ dir. Buradan $vupq \in P - P^2$ elde ederiz. $puv \in P$ ise $puv \in P - P^2$ dir. Buradan bir $m \in Z^+$ için $(uv)^m \in P$ olur. $P \cap S = \emptyset$ olduğundan bu bir çelişki olur. O zaman $puv \notin P$ dir. Buradan bir $n \in Z^+$ için $q^n \in P$ sonucu çıkar. Dolayısıyla $(\frac{q}{t})^n = \frac{q^n}{t^n} \in P_S$ elde ederiz.

Şimdi yerel halkalardaki temel ideallerin hemen hemen asalımsı olma özelliklerini tek maksimal idealin lokalizasyonları altında koruduklarını ispatlayalım.

Teorem 3. 2. 1. 19. R tek maksimal ideali M olan bir yerel halka olsun. $a \in R$ iken $\langle a \rangle$ nın R de hemen hemen asalımsı olması için gerek ve yeter koşul $\langle a \rangle_M$ idealinin R_M de hemen hemen asalımsı olmasıdır.

İspat: (⇒): $\langle a \rangle$ hemen hemen asalımsı ideal olsun. $\langle a \rangle$ ideali R de bir has ideal olduğundan $\langle a \rangle \subseteq M$ olur. Buradan $\langle a \rangle \cap (R - M) = \emptyset$ dır. Dolayısıyla Teorem 3. 2. 1. 18. den $\langle a \rangle_M$ nin R_M de hemen hemen asalımsı ideal olduğu sonucuna varırız.

(⇐): $\langle a \rangle_M$ R_M de hemen hemen asalımsı ideal olsun. $xy \in \langle a \rangle - \langle a \rangle^2 = \langle a \rangle - \langle a^2 \rangle$ olacak şekilde $x, y \in R$ olsun. Buradan $\frac{x}{1}\frac{y}{1} = \frac{xy}{1} \in \langle a \rangle_M$ dir. $\frac{x}{1}\frac{y}{1} = \frac{xy}{1} \in \langle a^2 \rangle_M$ ise bir $z \in \langle a^2 \rangle$ ve $v \notin M$ olmak üzere $\frac{xy}{1} = \frac{z}{v}$ elde ederiz. Bu durumda $uvxy = uz \in \langle a^2 \rangle$ olacak şekilde $u \notin M$ vardır. $uv \notin M$ olduğundan u elemanı R halkasında bir birim elemandır. Dolayısıyla $xy = (uv)^{-1}(uvxy) \in \langle a^2 \rangle$ elde ederiz. Bu bir çelişkidir. Buradan $\frac{x}{1}\frac{y}{1} = \frac{xy}{1} \notin \langle a^2 \rangle_M$ olur. $\langle a \rangle_M$ hemen hemen asalımsı ideal olduğundan ya $\frac{x}{1} \in \langle a \rangle_M$ ya da bir $n \in Z^+$ için $\frac{y^n}{1} = (\frac{y}{1})^n \in \langle a \rangle_M$ olur. $\frac{x}{1} \in \langle a \rangle_M$ ise $x \in \langle a \rangle$ olur. $\frac{y^n}{1} \in \langle a \rangle_M$ ise $y^n \in \langle a \rangle$ olur. Buradan $\langle a \rangle$ nın R de hemen hemen asalımsı ideal olduğu sonucuna varırız.

Sonuç 3. 2. 1.20. R tek maksimal ideali M olan bir yerel halka olsun. $a \in R$ iken $\langle a \rangle$ nın R de hemen hemen asalımsı ideal olmasının gerek ve yeter koşulu her $m \notin M$ için $\langle \frac{a}{m} \rangle$ nin R_M de hemen hemen asalımsı ideal olmasıdır.

İspat: (⇒): $\langle a \rangle$ R de hemen hemen asalımsı ideal olsun. $m \notin M$ olsun. O zaman Teorem 3. 2. 1. 19. dan $\langle a \rangle_M$ R_M de hemen hemen asalımsı ideal olur. Lemma 3. 2. 6. dan $\langle a \rangle_M = \langle \frac{a}{m} \rangle$ elde ederiz. Buradan $\langle \frac{a}{m} \rangle$ nin R_M de hemen hemen asalımsı ideal olduğu sonucuna varırız.

(⇐): Her $m \notin M$ için $\langle \frac{a}{m} \rangle$ nin R_M de hemen hemen asalımsı ideal olsun. Buradan $\langle \frac{a}{1} \rangle$ nin R_M de hemen hemen asalımsı ideal olur. Lemma 3. 2. 6 dan $\langle a \rangle_M = \langle \frac{a}{1} \rangle$ elde ederiz. O zaman $\langle a \rangle_M$ R_M de hemen hemen asalımsı ideal olur. Teorem 3. 2. 1. 19. dan $\langle a \rangle$ R de hemen hemen asalımsı ideal olur.

Şimdi direkt çarpımlı iki halkada hemen hemen asalımsı idealleri tanımlayalım.

Teorem 3. 2. 1. 21. R_1 ve R_2 birimli değişmeli iki halka olsun.

1) R_1 nin A has idealinin hemen hemen asalımsı ideal olmasının gerek ve yeter koşulu $A \times R_2$ nin $R_1 \times R_2$ de hemen hemen asalımsı ideal olmasıdır.

2) R_2 nin B has idealinin hemen hemen asalımsı ideal olmasının gerek ve yeter koşulu $R_1 \times B$ nin $R_1 \times R_2$ de hemen hemen asalımsı ideal olmasıdır.

İspat: 1): (⇒): A R_1 de hemen hemen asalımsı ideal olsun. A R_1 nin has ideali olduğundan $A \times R_2$ $R_1 \times R_2$ nin has idealidir. $a, b \in R_1$ ve $s, t \in R_2$ olmak üzere $(a,s)(b,t) \in A \times R_2 - (A \times R_2)^2$ ve $(a,s) \notin A \times R_2$ için $(a,s),(b,t) \in R_1 \times R_2$ olsun. O zaman $(ab, st) \in A \times R_2 - (A \times R_2)^2 = (A - A^2) \times R_2$ ve $a \notin A$ olur. Buradan $ab \in A - A^2$ dir. Dolayısıyla bir $n \in Z^+$ için $b^n \in A$ olur. Böylece

$$(b,t)^n = (b^n, t^n) \in A \times R_2$$

elde ederiz.

(⇐): $A \times R_2$ $R_1 \times R_2$ de hemen hemen asalımsı ideal olsun. $a \notin A$ olmak üzere $ab \in A - A^2$ için $a, b \in R_1$ olsun. Bu durumda

$$(a, 1_{R_2}),(b, 1_{R_2}) = (ab, 1_{R_2}) \in (A - A^2) \times R_2 = A \times R_2 - (A \times R_2)^2$$

elde ederiz. $A \times R_2$ hemen hemen asalımsı ideal olduğundan bir $n \in Z^+$ için $(b, 1_{R_2})^n \in A \times R_2$ olur. Buradan $(b^n, 1_{R_2}) = (b, 1_{R_2})^n \in A \times R_2$ olur. Böylece $b^n \in A$ elde ederiz.

2): Aynı yöntemle ispatlanabilir.

Sonuç 3. 2. 1. 22. R_1 ve R_2 birimli değişmeli iki halka olsun. Bir K idealinin $R_1 \times R_2$ de hemen hemen asalımsı ideal olmasının gerek ve yeter koşulu K nın aşağıdaki verilen formlardan birini sağlamasıdır.

1) I R_1 in hemen hemen asalımsı ideali olmak üzere $K = I \times R_2$ ideali.

2) J R_2 nin hemen hemen asalımsı ideali olmak üzere $K = R_1 \times J$ ideali.

3) I R_1 in idempotent ideali ve J R_2 nin idempotent ideali olmak üzere $K = I \times J$ ideali.

İspat: Bunun ispatında Teorem 3. 2. 1. 21. den ve I R_1 in J R_2 nin idealleri olmak üzere $R_1 \times R_2$ nin her K idealinin $I \times J$ formunda olduğu bilgisinden yararlanılır[24].

4. SONUÇ

Tezimiz üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde ideal ve birimli değişmeli halka kavramları için temel bilgiler verilmiştir. Modül kavramından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde asal ideallerden bahsedilerek bu başlık altında zayıf asal ideal ve hemen hemen asal ideal yapıları tanımlanmıştır. Bu ideal yapılarının özellikleri anlatılmış bazı genelleştirmeleri verilmiştir.

Hemen hemen asal idealler bazı özel halka yapıları altında incelenmiştir. İdealleştirme Metodu kullanılarak bu tip idealler ile ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise ikinci bölümde bahsedilen azayıf asal ideal ve hemen hemen asal ideal yapılarının asalımsı versiyonları tanımlanmıştır. Zayıf asalımsı ideal ve hemen hemen asalımsı ideal olarak adlandırılan bu idealler asalımsı idealler başlığı altında özellikleriyle incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1]. Çallıalp F., Tekir Ü., Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul 2009.

[2]. Çallıalp F., Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul 2011.

[3]. A. G. Ağargün, D. D. Anderson and S. Valdes-Leon, Factorization in commutative rings with zero divisors, III. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 31(1):1-20, 2001.

[4]. D. D. Anderson and E. Smith, Weakly Prime Ideals, *Houston Journal of Mathematics,* 29(4):831-840, 2003.

[5]. D. D. Anderson and S. Valdes-Leon, Factorization in commutative rings with zero divisors, *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 26(1):439-480, 1996.

[6]. M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[7]. S. M. Bhatwadekar and P. K. Sharma, Unique factorization and birth of almost primes, Communications in Algebra, 33:43-49, 2005.

[8]. S. Galovich, Unique factorization rings with zero divisors, *Math Magazine*, 51:276-283, 1978.

[9]. R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 90, Kinston, Ontario, 1992.

[10]. T. Hungerford, *Algebra, Graduate Texts in Mathematics*. Springer – Verlag, New York / Heidelberg / Berlin, 1964.

[11]. Irving Kaplansky, *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, New York, 1970.

[12]. M. Nagata, Local Rings, Publishers, New York/ London/ Sydney, 1962.

[13]. M. Bataineh and D. D. Anderson, Generalization of Prime Ideals, Ph. D. Thesis, Graduate College of the University of Iowa, 2006.

[14]. M. D. Larsen and P. J. Mccarthy, Multiplicative theory of ideals, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43. Academic Press,1971.

[15]. I. G. Macdonald, Secondary representation of modules over a commutative ring, Symposia Mathematica, Vol. 11. 23-43 Academic Press, 1973.

[16]. M. Prest, Modern theory and modules, London Mathematical Society Lecture Note Series 130, Cambridge University Press, 1988.

[17]. M. M. Ali and D. J. Smith, Generalized GCD Rings II, Contributions to Algebra and Geometry, Vol.44 (1), 75-98, 2003.

[18]. S. E. Atani and F. Farzalipour, On Weakly Primary Ideals, Georgian Mathematical Journal, Vol.12 (3), 423-429, 2005.

[19]. P. B. Bhattarcharya, S. K. Jain and S. R. Nagpaul, Basic Abstract Algebra Second Edition, Transferred to digital printing, Cambridge University Press, 1999.

[20]. D. S. Dummit and R. M. Foote, Abstract Algebra, Third Edition, John Wiley ve Sons, Inc, 2004.

[21]. T. Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, Springer-Verlag, 1991.

[22]. S. Singh and Q. Zameeruddin, Modern Algebra, Seventh Revised Edition Third Reprint, Vikas Publishing House PVT LTD, 2004.

[23]. R. Wisbauer, Foundations of Module and Ring Theory, A Handbook for Study and Research, University of Dusseldorf Gordon and Breach Science Publishers, 1991.

[24]. Adil Kadir Cabbar and Chwas Abas Ahmed, On Almost Primary Ideals, International Journal of Algebra, Vol. 5, no. 13, 627-636, 2011.

[25]. Shahabaddin Ebrahimi Atani and Farkhondeh Farzalipour, On Weakly Primary Ideals, Georgion Mathematical Journal, Vol. 12, No:3, 423-429, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

24 Kasım 1991 tarihinde Çerkezköy, Tekirdağ'da doğdu. İlk ve orta öğretimini Pınarça Köyü İlköğretim Okulu'nda, lise eğitimini Tekirdağ Anadolu Öğretmen Lisesi'nde yatılı olarak tamamladı. 2009'da Marmara Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne kayıt yaptırdı ve 2013'te mezun oldu. Aynı yıl Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Uygulamalı Matematik programını kazandı. 2014'te Van Erciş Yatılı Bölge Orta Okulu'nda matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2015'te YLSY programını kazandı. Şu an bu program çerçevesinde eğitilmektedir.

Tiyatro, tekvando, halk oyunları gibi faaliyetlerde bulundu. Osmanlıca ve gitar çalmak hobileri arasındadır.