

**MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Yüksek Lisans Tezi

**YÜZEYLER TEORİSİNDE BAZI FORMÜLLERİN
DOĞRU KONGRÜANSLARINDAKİ BENZERLERİ
VE BUNLARIN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

**Danışman
Prof. Dr. Lutfi BİRAN**

**Hazırlayan
Orhan Melih SERMUTLU
Öğretim Görevlisi**

1984

510
S 486
1984



Marmara Üniversitesi
Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı



T00219

Bu çalışmanın hazırlanmasında, her türlü yardımlarını esir-
gemiyen sayın hocamız danışman Prof. Dr Lutfi Biran a minnet ve
şükran duygularımı arzederim.



K O N G R Ü A N S L A R

1. - Bu çalışmamızda düal uzaydan ($a + \xi a_0$, $\xi^2 = 0$) faydalanarak, yüzeyler teorisine ait bazı formüllerin, doğru kongrüanslarında benzerlerini inceliyeceğiz. Bu ilk paragrafta, bazı tanımlar ve formüllere kısaca işaret etmek istiyoruz.

Bir X doğrusu tarafından oluşturulan bir $[X]$ regle yüzeyi gözönüne alalım. $[X]$ yüzeyini belirlemek için, X doğrusunun düal birim vektörü, bir reel t parametresine bağlı olarak verilebilir.

$$(1,1) \quad \vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \xi \vec{x}_0(t) \quad (\xi^2 = 0)$$

Burada \vec{x} , X doğrusuna paralel bir serbest birim vektör, \vec{x}_0 ise, X doğrusu tarafından taşınan \vec{x} kayan vektörünün sabit bir O noktasına göre momentidir.

$$(1,2) \quad P = p + \xi p_0 = \sqrt{\vec{X}'^2}$$

$$Q = q + \xi q_0 = \frac{(\vec{X} \wedge \vec{X}') \cdot \vec{X}''}{\vec{X}'^2} = \frac{(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'')}{\vec{X}'^2}$$

eşitlikleri ile tanımlanan P ve Q düal büyüklüklerinin ilkine, düal eğrilik, ikincisine düal burulma denir. $\vec{X}^2(t) = 1$ olmasından, $[X]$ regle yüzeyi, birim düal kürenin bir eğrisi olarak, düşünülebilir ve (1,2) nin ilk formülünden, düal yay elemanı için,

$$(1,3) \quad ds = \sqrt{\vec{X}'^2(t)} dt = P dt$$

ve düal yay uzunluğu için,

$$S = \int \sqrt{\vec{X}'^2(t)} dt = \int P dt$$

yazılır.

$$dS = ds + \xi ds_0$$

koyarak, (1,2) nin ilk bağıntısı da gözönüne alınarak, $[X]$ in dağılma parametresi

$$(1,4) \quad \int \frac{ds_0}{ds} = \frac{p_0}{p}$$

ile verilmiştir.

$$(1,5) \quad \omega = \frac{Q}{P}$$

dual büyüklüğüne $[X]$ regle yüzeyinin dual küresel eğriliği denir.

(1,2) ve (1,3) bağıntılarından (1,5) formülü

$$(1,6) \quad \omega = \frac{(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'')}{(\vec{X},^2)^{3/2}} = \left(\vec{X}, \frac{d\vec{X}}{ds}, \frac{d^2\vec{X}}{ds^2} \right)$$

yazılır.

2.- Bir $\{X\}$ doğrular kongrüansını belirlemek için $\{X\}$ in herhangi bir X doğrusunun birim dual vektörü μ ve ν gibi iki reel parametreye bağlı olarak verilebilir.

$$(2,1) \quad \vec{X} = \vec{X}(\mu, \nu) = \vec{x}(\mu, \nu) + \xi \vec{x}_0(\mu, \nu)$$

ve arasındaki her bağıntı kongrüansın bir regle yüzeyini tanımlar. Özel olarak $\mu = \text{st.}$ $\nu = \text{st.}$ yüzeylerine koordinat yüzeyleri denir.

$\{X\}$ in her regle yüzeyi için,

$$d\vec{X} = \vec{X}_\mu d\mu + \vec{X}_\nu d\nu$$

dır. Kongrüansın dual yay elemanı

$$(2,2) \quad ds^2 = d\vec{X}^2 = \vec{X}_\mu^2 d\mu^2 + 2\vec{X}_\mu \cdot \vec{X}_\nu d\mu d\nu + \vec{X}_\nu^2 d\nu^2$$

ifadesi ile verilmiştir. (2,2) bağıntısında

$$(2,3) \quad E = e + \xi e_0 = \vec{X}_\mu^2, \quad F = f + \xi f_0 = \vec{X}_\mu \cdot \vec{X}_\nu, \quad G = g + \xi g_0 = \vec{X}_\nu^2$$

koyalım. Burada reel ve dual kısımları ayırarak,

$$(2,4) \quad \begin{aligned} e &= \vec{x}_\mu^2 & f &= \vec{x}_\mu \cdot \vec{x}_\nu & g &= \vec{x}_\nu^2 \\ e_0 &= 2\vec{x}_\mu \cdot \vec{x}_{0\mu} & f_0 &= \vec{x}_\mu \cdot \vec{x}_{0\nu} + \vec{x}_{0\mu} \cdot \vec{x}_\nu & g_0 &= 2\vec{x}_\nu \cdot \vec{x}_{0\nu} \end{aligned}$$

ve buradan (2,2) için

$$(2,5) \quad ds^2 = e d\mu^2 + 2f d\mu d\nu + g d\nu^2 + \xi (e_0 d\mu^2 + 2f_0 d\mu d\nu + g_0 d\nu^2)$$

yazılır. (2,5) de

$$(2,6) \quad [1] = e d\mu^2 + 2f d\mu dv + g dv^2 \quad [11] = e_0 d\mu^2 + 2f_0 d\mu dv + g_0 dv^2$$

$dS = ds + \xi ds_0$ koyarak, (2,5) bağıntısı

$$ds^2 + 2 \xi ds ds_0 = [1] + \xi [11]$$

yazılabilir. (1,4) eşitliği gözönüne alınır, $\{X\}$ kongrüansının bir Xdoğrusundan geçen ve doğuranları $\{X\}$ e ait olan bir regle yüzeyinin δ dağılma parametresi için,

$$(2,7) \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{e_0 d\mu^2 + 2f_0 d\mu dv + g_0 dv^2}{e d\mu^2 + 2f d\mu dv + g dv^2}$$

bulunur. (2,6) bağıntıları ile kongrüansların birinci ve ikinci kuadratik formları tanımlanır. İncelamelerimizde silindirik kongrüanslara tekabül eden hali gözönüne almayacağız. Daima

$$(\vec{x} \wedge \vec{x})^2 = eg - f^2 \neq 0$$

farzedeceğiz.

$\{X\}$ kongrüansının açılabilir yüzeyleri ($\delta = 0$)

$$(2,8) \quad e_0 d\mu^2 + 2f_0 d\mu dv + g_0 dv^2 = 0$$

diferansiyel denklemi ile tanımlanmıştır. Şu halde bir kongrüansın açılabilir yüzeyleri, yüzeyler teorisinde asimptotik çizgilere tekabül eder.

Diğer taraftan, yüzeyler teorisinde normal kesitlerin eğriliklerinin maksimum ve minimum değerlerini veren bağıntı ile, (2,7) bağıntısının benzerliğine işaret edelim. Benzer düşünce ve hesaplarla $\frac{d\mu}{dv}$ nün fonksiyonu olan δ nın maksimum ve minimum değerlerini veren denklem için,

$$(2,9) \quad \begin{vmatrix} e d\mu + f dv & f d\mu + g dv \\ e_0 d\mu + f_0 dv & f_0 d\mu + g_0 dv \end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Kongrüansımızın, (2,9) denklemi ile tanımlanan, regle yüzeylerine, asal yüzeyler denir. Daima reel olan bu yüzeyler, yüzeyler teorisinde eğrilik çizgisine tekabül eder.

Bundan böyle $\{X\}$ kongrüansının izotrop olmadığını, yani $\{X\}$ in

bir X doğrusundan geçen ve kongrüansa ait olan tüm regle yüzeylerin X doğrusunda aynı dağılıma parametresine malik olmaları farzediyoruz.

$$e : f : g \neq e_0 : f_0 : g_0$$

Diğer taraftan $\mu = st.$ ve $\nu = st.$ koordinat yüzeyleri kongrüansın asal yüzeyleri olsunlar. Bu halde (2,9) denklemi

$$(2,10) \quad f = 0 \quad , \quad f_0 = 0 \quad (F = 0)$$

verir.

3.- Bu paragrafta, hesaplarımızda asal yüzeylerin düal yay uzunluklarını kullanacağız. Kongrüanslar teorisinde Mannheim ve Hamilton formülleri adı ile bilinen, iki formülü elde edeceğiz.

Bir $\{X\}$ kongrüansını gözönüne alalım. Koordinat yüzeylerinin asal yüzeyler olduğunu farzedelim. Kongrüansımız

$$\vec{X} = \vec{X}(\mu, \nu)$$

olsun. Hipoteze göre (2,10) ve (2,3) formüllerinden

$$(3,1) \quad F = \vec{X}_\mu \cdot \vec{X}_\nu = 0$$

olacaktır. Kongrüansın her $[X]$ regle yüzeyi için ,

$$(3,2) \quad d\vec{X} = \vec{X}_\mu d\mu + \vec{X}_\nu d\nu$$

dır. X den geçen iki asal yüzey $[X]_\mu$ ve $[X]_\nu$ olsun. Bu regle yüzeylerin düal yay elemanlarını sıra ile

$$(3,3) \quad dU = du + \xi du_0 \quad dV = dv + \xi dv_0$$

ile gösterirsek, (2,3) ifadeleri gözönüne alınarak

$$(3,4) \quad dU = \sqrt{E} d\mu \quad dV = \sqrt{G} d\nu$$

dir.

$$(3,5) \quad \vec{X}_1 = \frac{\vec{X}_\mu}{\sqrt{E}} \quad , \quad \vec{X}_2 = \frac{\vec{X}_\nu}{\sqrt{G}}$$

koyarak, (3,2) bağıntısı

$$(3,6) \quad d\vec{X} = \vec{X}_1 dU + \vec{X}_2 dV$$

yazılır. Önce şu hususlara işaret edelim. \vec{X}_1 ve \vec{X}_2 düal birim vektörlerdir. Sırayla $[X]_\mu$ ve $[X]_\nu$ asal yüzeylerinin merkez normallerini gösterirler. Bu yüzeyler (3,1) dolayısıyla X doğurunu üzerinde aynı x boğaz noktasına maliktirler. Bu x noktası X doğrusunun merkez noktası, başka deyimle, odak noktalarının orta noktasıdır. X, X_1 , X_2 doğruları aynı x merkez noktasında dik olarak kesişirler ve bu doğruların yönlerini (\vec{X} , \vec{X}_1 , \vec{X}_2) bir doğru yönlü üçyüzlü olacak şekilde seçildiğini varsayıyoruz.

Burada bir de şu hususa işaret edelim. (3,3) ve (3,4) eşitlikleri gözönüne alınarak

$$(3,7) \quad \begin{aligned} du &= \sqrt{e} d\mu & du_0 &= \frac{e_0}{2\sqrt{e}} d\mu \\ dv &= \sqrt{g} d\nu & dv_0 &= \frac{g_0}{2\sqrt{g}} d\nu \end{aligned}$$

ve asal yüzeylerin dağılıma parametreleri δ_1 ve δ_2 ile gösterilerek ve (1,4) e göre

$$(3,8) \quad \delta_1 = \frac{du_0}{du}, \quad \delta_2 = \frac{dv_0}{dv}$$

olacağından, (3,7) den

$$(3,9) \quad \delta_1 = \frac{1}{2} \frac{e_0}{e}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \frac{g_0}{g}$$

elde edilir.

Şimdi $\{X\}$ kongrüansının bir X doğrusundan geçen ve doğuranları kongrüansa ait olan bir $[X]$ regle yüzeyi gözönüne alalım.

$$d\vec{X} = \vec{X}_\mu d\mu + \vec{X}_\nu d\nu$$

ve

$$\sqrt{d\vec{X}^2} = ds$$

koyarak ve $[X]$ in merkez normalinin düal birim vektörünü \vec{Y} ile gösterirsek,

$$\vec{Y} = \frac{d\vec{X}}{ds} = \vec{X}_\mu \frac{d\mu}{ds} + \vec{X}_\nu \frac{d\nu}{ds}$$

yahut, (3,4) ve (3,5) ifadelerini gözönüne alarak,

$$(3,10) \quad \vec{Y} = \vec{X}_1 \frac{dU}{dS} + \vec{X}_2 \frac{dV}{dS}$$

yazılır. Burada

$$(3,11) \quad ds^2 = du^2 + dv^2$$

dir. $[X]$ yüzeyinin Y merkez normal X doğrusunu bir y noktasında keser. y noktası $[X]$ in X e ait boğaz noktasıdır. Y doğrusunun, asal yüzeylerden birinin merkez normali ile, örneğin X_1 ile yaptığı düal açığı $\phi = \varphi + \varepsilon \varphi_0$ ile gösterelim. Burada φ , Y ve X_1 doğrularının reel açısı, φ_0 ise X merkez noktasının $[X]$ in y boğaz noktasına olan uzaklığıdır.

\vec{Y} vektörü $(\vec{X}, \vec{X}_1, \vec{X}_2)$ üçüzlüsüne göre yazılırsa,

$$(3,12) \quad \vec{Y} = \vec{X}_1 \cos \phi + \vec{X}_2 \sin \phi$$

yazılır. (3,10) bağıntısı gözönüne alınarak,

$$\frac{dU}{dS} = \cos \phi, \quad \frac{dV}{dS} = \sin \phi$$

ve son olarak

$$\frac{dV}{dU} = \text{Tg } \phi$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte reel ve düal kısımları ayıralım.

$$(3,13) \quad \text{Tg } \varphi = \frac{dv}{du}$$

$$(3,14) \quad \varphi_0 = \frac{du dv_0 - dv du_0}{du^2 + dv^2}$$

(3,11) bağıntısında da reel ve düal kısımları ayıralım.

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \quad ds ds_0 = du du_0 + dv dv_0$$

bulunur. (3,4) gözönüne alınarak, $[X]$ yüzeyinin δ parametresi için

$$\delta = \frac{du du_0 + dv dv_0}{du^2 + dv^2}$$

ve (3,8), (3,13) bağıntıları gözönüne alınarak,

$$(3,15) \quad \delta = \delta_1 \cos^2 \varphi + \delta_2 \sin^2 \varphi$$

bulunur. Mannheim formülü denilen bu formül, yüzeyler teorisindeki Euler formülünün benzeri olup, bir $\{X\}$ kongrüansının bir X doğrusundan geçen bir regle yüzeyin, bu X doğrusundaki dağılma parametrelerini verir.

Son olarak (3,14) ifadesinden (3,8) ve (3,15) eşitliklerini gözönüne alarak

$$(3,16) \quad \varphi_0 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \sin 2\varphi$$

elde edilir. Kongrüansın bir X doğrusundan geçen bir regle yüzeyin X deki boğaz noktasının, merkez noktasına uzaklığını veren bu bağıntı, Hamilton formülüdür.

(3,16) formülünde $2\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ olması halinde y boğaz noktası x merkez noktasından en uzak konumda bulunur. y nin bu konumlarına y_1 ve y_2 ile gösterelim. y_1 ve y_2 ye limit noktaları denir. Limit noktalarının x boğaz noktasına uzaklığı

$$d = \pm \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}$$

dır. Kongrüansın X doğrusundan geçen ve doğuranları kongrüansa ait olan tüm regle yüzeylerin X doğrusuna ait boğaz noktaları, $y_1 y_2$ doğru parçası içinde olacaklardır..

(3,15) ve (3,16) formülleri arasında φ yok edilirse,

$$(3,17) \quad \varphi_0 = \sqrt{-(\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)}$$

bulunur. X üzerindeki odak noktaları F_1 ve F_2 olsun. $x_{F_1} = x_{F_2} = 1$ koyarak, (3,17) de $\delta = 0$ yapılırsa,

$$1 = \sqrt{-\delta_1 \delta_2}$$

bulunur.

4.- Şimdi invariant türevler kullanarak kongrüanslar için Frenet formüllerine formüller tesis edeceğiz. Şimdiye kadar olduğu gibi, burada da koordinat yüzeyleri olarak asal yüzeyleri alıyoruz. ($F = 0$)

Önce $\vec{X}(\mu, \nu)$ nün ikinci mertebeden türevlerini, \vec{X} , \vec{X}_μ , \vec{X}_ν vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edelim.

$$(4,1) \quad \vec{X}_{\mu\mu} = \frac{E_\mu}{2E} \vec{X}_\mu - \frac{E_\nu}{2G} \vec{X}_\nu - E \vec{X}$$

$$\vec{X}_{\mu\nu} = \frac{E_\nu}{2E} \vec{X}_\mu + \frac{G_\mu}{2G} \vec{X}_\nu$$

$$\vec{X}_{\nu\nu} = -\frac{G_\mu}{2E} \vec{X}_\mu + \frac{E_\nu}{2G} \vec{X}_\nu - G \vec{X}$$

Diğer taraftan, asal yüzeylerin σ_1 ve σ_2 düal küresel eğrilikleri

(1,6) ya göre

$$(4,2) \quad \sigma_1 = \frac{(\vec{X}, \vec{X}_\mu, \vec{X}_{\mu\mu})}{(\vec{X}_\mu^2)^{3/2}} \quad \sigma_2 = \frac{(\vec{X}, \vec{X}_\nu, \vec{X}_{\nu\nu})}{(\vec{X}_\nu^2)^{3/2}}$$

yahut, (2,3) ve (4,1) formülleri gözönüne alınarak,

$$(4,3) \quad \sigma_1 = -\frac{E_\nu}{2E\sqrt{G}} \quad \sigma_2 = \frac{G_\mu}{2G\sqrt{E}}$$

yazılır. Son olarak şu eşitlikleri yazalım.

$$(4,4) \quad \begin{aligned} \vec{X}_{11} &= \frac{1}{\sqrt{E}} (\vec{X}_1)_\mu = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\vec{X}_\mu}{\sqrt{E}} \right)_\mu \\ \vec{X}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{G}} (\vec{X}_1)_\nu = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\vec{X}_\mu}{\sqrt{E}} \right)_\nu \\ \vec{X}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{E}} (\vec{X}_2)_\mu = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\vec{X}_\nu}{\sqrt{G}} \right)_\mu \\ \vec{X}_{22} &= \frac{1}{\sqrt{G}} (\vec{X}_2)_\nu = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\vec{X}_\nu}{\sqrt{G}} \right)_\nu \end{aligned}$$

(4,1), (4,3), (4,4) bağıntıları gözönüne alınarak,

$$(4,5) \quad \vec{X}_{11} = -\vec{X} + \sigma_1 \vec{X}_2$$

$$\vec{X}_{12} = \sigma_2 \vec{X}_2$$

$$\vec{X}_{21} = -\sigma_1 \vec{X}_1$$

$$\vec{X}_{22} = -\vec{X} - \sigma_2 \vec{X}_1$$

bulunur. Paragraf başında da söylediğimiz gibi, doğru kongrüansları için, eğriler teorisinin Frenet formüllerine benzer, bir formüller sistemi elde ettik. Bu formüllerden

$$(4,6) \quad \tilde{G}_1 = (X, X_1, X_{11}) , \quad \tilde{G}_2 = (X, X_2, X_{22})$$

yazılır.

5. - Bu son paragrafta J. Liouville e ait olan yüzeyler teorisinin bir formülünü doğru kongrüanslarına genelleştireceğiz. Önce J. Liouville nin bu formülünün ifadesini verelim.

Bir $[X]$ yüzeyi gözönüne alalım ve bu yüzey üzerinde $u = st.$, $v = st.$ koordinat eğrilerinin, bir dik şebeke oluşturduklarını farzedelim. $[X]$ yüzeyinin bir X noktasında koordinat eğrilerinin jeodezik eğrilikleri ρ_1 ve ρ_2 olsun. Diğer taraftan yüzeyin, x noktasından geçen ve u ($v = st.$) koordinat eğrisi ile φ açısı yapan bir (x) eğrisi gözönüne alalım. (x) in x noktasındaki jeodezik eğriliğini ρ_g ile gösterelim. J. Liouville

$$(4,7) \quad \rho_g = \frac{d\varphi}{ds} + \rho_1 \cos \varphi + \rho_2 \sin \varphi$$

olduğunu göstermiştir.

Şimdi bi $\{X\}$ kongrüansını gözönüne alalım. $\mu = st.$, $\nu = st.$ koordinat yüzeyleri asal yüzeyler olsun ($F = 0$) . Kongrüansın bir X doğrusundan geçen ve doğuranları $\{X\}$ e ait olan bir $[X]$ regle yüzeyi için 3 üncü paragrafta olduğu gibi, (3,12) formülü yazılır.

$$(4,8) \quad \frac{d\vec{X}}{dS} = \vec{Y} = \vec{X}_1 \cos \phi + \vec{X}_2 \sin \phi$$

yazılır. (4,8) in S düal yay uzunluğuna göre türevini alalım. (3,4) , (4,4) ve

$$\frac{dU}{dS} = \cos \phi , \quad \frac{dV}{dS} = \sin \phi$$

ifadeleri gözönüne alınarak ,

$$(4,9) \quad \frac{d^2 \vec{X}}{dS^2} = \vec{X}_{11} \cos^2 \phi + (\vec{X}_{12} + \vec{X}_{21}) \sin \phi \cos \phi + \vec{X}_{22} \sin^2 \phi + \\ (-\vec{X}_1 \sin \phi + \vec{X}_2 \cos \phi) \frac{d\phi}{dS}$$

bulunur. Son olarak (1,6) , (4,6) , (4,8) ve (4,9) bağıntılarından,

$$\sigma = \frac{d\phi}{dS} + \sigma_1 \cos \phi + \sigma_2 \sin \phi$$

elde edilir. Bu formül, (4,7) formülünün doğru kongrüanslarındaki benzeridir.



Kaynaklar :

- 1) W. Blaschke : Diferensiyel Geometri Dersleri. 1 Cilt. (K. Erim)
- 2) L. Biran : İ.Ü. Fen Fakültesi mecmuası. Seri A. Cilt XVIII
Sayı 1.
- 3) L. Biran : Sur quelques formules relatives aux congruences
de droites. Avusturya matematikçiler kongresi
Viyana.
- 4) K. Erim. : İ.Ü. Fen Fakültesi mecmuası. Seri A. Cilt X.
Sayı 1 - 4 .

