

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
ATATÜRK EĞİTİM FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

**TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK
KAVRAMI**

FİLİZ SİĞİNÇ
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Asuman ILGAZ

İSTANBUL, 1996

511
S 576
1986

Kaynak gösterilerek fotokopi çekilip kullanılabilir.



Marmara Üniversitesi
Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı



T03367

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında, sonsuz yardımlarını benden esirgemeyen, gerek yorumları ile gerekse cesaretlendirmeleri ile her an yanımda olduğunu hissettiren çok değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Asuman ILGAZ'a ve beni her zaman destekleyen sevgili aileme en içten teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca, üniversitemizde aldığım eğitimin süresince bana yardımcı olan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

İstanbul, 1996

Filiz SİĞİNÇ



İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

ABSTRACT

i

iii

BÖLÜM 1: ÖN BİLGİLER

1

1. REEL SAYILAR

Cisim, Pozitif Sınıf, Sıralama, Archimedean Cisim, Açık Aralık, Üst Sınır ve Alt Sınır, Supremum ve Infimum, Supremum Prensipli

2. KARTEZYEN UZAYLAR

2

Kartezyen Çarpımı, n-Boyutlu Reel Kartezyen Uzay, Açık Kümeler ve Özellikleri, Kapalı Kümeler, Komşuluklar, İç İç Geçmiş Aralıklar Teoremi, Bolzano-Weierstrass Teoremi

A- R^n de DİZİLER

6

Yakınsak Dizi, Alt Dizi, Bolzano-Weierstrass Teoremi

B. SÜREKLİ FONKSİYONLAR

7

Süreklilik

3. METRİK UZAYLAR

8

Açık Küreler, İç Nokta Tanımı, Kapalı Kümeler, Bir Kümenin Kapanışı, Süreklilik, Düzgün Süreklilik

4. TOPOLOJİK UZAYLAR

13

Topolojik Uzay, Baz, Alt Baz, Komşuluk, Yığılma Noktası, Kapalı Kümeler, Bir Kümenin Kapanışı, Yoğun Küme, Yakınsaklık, Sürekli Fonksiyonlar, Açık Fonksiyonlar, Kapalı Fonksiyonlar, Homeomorfizm, Alt Uzay ve Alt Uzay Topolojisi, Çarpım Uzayı, İzdüşüm Fonksiyonu, Çarpım Topolojisi

A. AYIRIM AKSİYOMLARI

18

To-Uzayı, T1-Uzayı, Hausdorff Uzayı, T3-Uzayı, Regüler Uzay, T4-Uzayı, Normal Uzay

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| B. ÖRTÜ | 21 |
| Açık Örtü, Alt Örtü, Refinement, Lindelöf Uzayı, $[C_1]$ Uzayı, $[C_2]$ Uzayı, Ayrılabilirlik, Heine-Borel Teoremi | |

BÖLÜM 2: KOMPAKT UZAYLAR VE ÖZDEŞ TANIMLAR

1. KOMPAKT UZAYLAR

Kompakt Uzay, Kompakt Küme

1.3. TEOREM: (X, τ) topolojik uzayında $A \subset X$ alt kümesi kompakttır $\Leftrightarrow A$ nın topolojik uzaydaki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır.

Sonlu Arakesit Özelliğinin Tanımı

1.5. TEOREM: (X, τ) kompakttır. $\Leftrightarrow X$ in arakesitleri boş olan kapalı kümeler ailesi boş olan sonlu alt aileye sahiptir.

1.6. TEOREM: (X, τ) kompakttır \Leftrightarrow sonlu arakesit özelliğine sahip X in her kapalı kümeler ailesinin arakesiti boş küme değildir.

1.7. TEOREM: Kompaktlık komşuluk cinsinden karakterize edilebilir.

1.8. TEOREM: (X, τ) uzayının baz elemanları ile oluşturulan her açık örtüsü sonlu alt örtüye sahipse, (X, τ) kompakttır.

1.9. TEOREM: Kompakt uzayın her kapalı alt kümesi kompakttır.

1.10. TEOREM: Bir X kümesi üzerinde τ ve τ^* gibi verilen iki topolojiden τ^* daha ince ve (X, τ) kompakt ise (X, τ) da kompakttır.

1.1..TEOREM: (X, τ) bir kompakt uzay olsun. X in sonsuz elemanlı her alt kümesinin X de en az bir yığılma noktası vardır.

29

BÖLÜM 3: DİZİSEL KOMPAKT UZAYLAR; SAYILABİLİR KOMPAKT UZAYLAR; METRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK, SAYILABİLİR KOMPAKTLIK VE DİZİSEL KOMPAKTLIK KAVRAMLARININ İLİŞKİSİ

1. DİZİSEL KOMPAKT UZAYLAR:

30

Dizisel kompakt uzay, dizisel kompakt küme.

2. SAYILABİLİR KOMPAKT UZAYLAR:

Sayılabılır Kompakt Uzay Tanımı

30

2.2. TEOREM: T_2 -uzaylarında kompaktlık ve sayılabılır kompaktlık eşdeğerdir.

30

2.3. TEOREM: $[C_2]$ aksiyomunu gerçekleyen uzaylarda kompaktlık ve sayılabılır kompaktlık eşdeğerdir.

31

2.4. TEOREM: X deki her dizinin X de en az bir yığılma noktası var ise (X, τ) sayılabılır kompakttır.

31

2.5. TEOREM: Dizisel her kompakt uzay sayılabılır kompakttır.

32

2.6. TEOREM: $[C_1]$ aksiyomunu gerçekleyen sayılabılır kompakt bir uzay dizisel kompakttır.

32

3. Metrik Uzaylarda Kompaktlık, Sayılabılır Kompaktlık ve Dizisel Kompaktlık Kavramlarının İlişkisi:

33

Bir Kümenin Çapı, Lebesgue Sayısı

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3. TEOREM: Bir metrik uzay dizisel kompakt uzay ise uzayın her açık örtüsünün bir Lebesgue sayısı vardır. | 34 |
| 3.4. TEOREM: Bir metrik uzayda kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramları eşdeğerdir. | 34 |
| Bolzano - Weierstrass Özelliği Tanımı | |
| 3.6. TEOREM: Her kompakt metrik uzay Bolzano-Weierstrass özelliğine sahiptir. | 35 |
| 3.7. TEOREM: Metrik Uzaylarda dizisel kompakt uzay \Leftrightarrow Bolzano-Weierstrass özelliğine sahiptir. | 36 |
| ϵ - Ağ ve Total Sınırlılık Tanımları | |
| 3.9. TEOREM: Her dizisel kompakt metrik uzay tam sınırlıdır. | 37 |
| 3.10. TEOREM: Her sayılabilir kompakt metrik uzay tam sınırlıdır. | 37 |
| 3.11. TEOREM: Her dizisel kompakt metrik uzay kompakttır. | 38 |
| BÖLÜM 4: KOMPAKT ALT UZAYLAR, KOMPAKT UZAYLAR VE AYIRIM AKSİYOMLARI, KOMPAKT UZAYLAR VE SÜREKLİLİK, KOMPAKT UZAYLARIN ÇARPIMI | |
| 1. KOMPAKT ALT UZAYLAR | 39 |
| 1.1. TEOREM: Kompakt topolojik bir uzayın her kapalı alt kümesi kompakttır. | 39 |
| 1.2. TEOREM: SONUÇ TEOREM: Sayılabilir kompakt bir uzayın her kapalı alt kümesi sayılabilir kompakttır. | 39 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.3. TEOREM: SONUÇ TEOREM: Bir Lindelöf uzayının her kapalı alt kümesi Lindelöftür. | 39 |
| 2. KOMPAKT UZAYLAR VE AYIRIM AKSİYOMLARI | 39 |
| 2.1. TEOREM: Hausdorff uzayında kompakt alt kümeler kapalıdır. | 40 |
| 2.2. TEOREM: Bir Hausdorff uzayında, kompakt bir alt küme ve bu kümeye ait olmayan bir nokta aldığımızda, kümeyi ve noktayı içine alan ayrık açık kümeler vardır. | 40 |
| 2.3. SONUÇ TEOREM: Her kompakt Hausdorff uzayı regülerdir. | 40 |
| 2.4. TEOREM: Bir Hausdorff uzayında ayrık kompakt iki alt kümeyi içeren ayrık iki açık küme bulabiliriz. | 41 |
| 2.5. SONUÇ TEOREM: Her kompakt Hausdorff uzayı normaldir. | 41 |
| 2.6. TEOREM: Bir Hausdorff uzayında sonlu sayıdaki kompakt alt kümelerin birleşimi ile herhangi sayıdaki kompakt alt kümelerin arakesiti kompaktır. | 41 |
| 3. KOMPAKT UZAYLAR VE SÜREKLİLİK | 42 |
| 3.1. TEOREM: Kompaktlık süreklilik fonksiyonlarla taşınır. | 42 |
| 3.2. TEOREM: $f : T_1 \rightarrow T_2$ T_1 uzayı kompakt ise $f(T_1)$ de kompaktır. | 42 |
| 3.3. TEOREM: Dizisel kompaktlık sürekli fonksiyonlarla taşınır. | 43 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.4. TEOREM: Kompakt bir uzaydan Hausdorff uzayına tanımlanan 1:1 örten ve sürekli olan her fonksiyon bir homeomorfizmdir. | 43 |
| Sınırlı Alt Küme | |
| 3.6. YARDIMCI TEOREM: $A \subset \mathbb{R}$ de kompakt bir alt küme ise o zaman A kapalı ve sınırlıdır. | 44 |
| 3.7. SONUÇ TEOREM: Reel sayılar kümesinin bir alt kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır. | 44 |
| Sınırlı Fonksiyon Tanımı | |
| 3.9. TEOREM: f, R üzerinde doğal topolojik uzaydan kompakt topolojik bir uzaya tanımlı sürekli bir fonksiyon ise sınırlıdır. | 44 |
| 3.10. TEOREM: Kompakt bir topolojik uzaydan \mathbb{R} ye tanımlanan sürekli bir fonksiyon maksimum ve minimum değerlerini alır. | 44 |
| 3.11. TEOREM: \mathcal{U} doğal topolojisi ile verilsin. \mathbb{R}^n nin kompakt bir alt kümesinin \mathbb{R} ye tanımlı sürekli bir fonksiyon düzgün süreklidir. | 45 |
| 3.12. TEOREM: Kompakt bir metrik uzaydan metrik uzaya tanımlı sürekli ve içine bir f fonksiyonu aynı zamanda düzgün süreklidir. | 46 |
| 4. KOMPAKT UZAYLARIN ÇARPIMI | 46 |
| 4.1. TEOREM: İki kompakt uzayın çarpım uzayı da kompaktır. | 46 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2. SONUÇ TEOREM: (TYCHONOFF'S THEOREM) | 48 |
| Kapalı Kutuların tanımı | |
| 4.4. GENELLEŞTİRİLMİŞ HEİNE-BOREL TEOREMİ | 48 |
| 4.5. TEOREM: X kümesi üzerinde d metriği ile kurulan topoloji ile X in çarpım topolojisi özdeştir. | 51 |
| 4.6. YARDIMCI TEOREM | 52 |
| Hilbert Kübünün Tanımı | |
| 4.8. SONUÇ TEOREM: Hilbert Kübü, metrik topolojisi çarpım topolojisine özdeş olan kompakt bir metrik uzaydır. | 53 |
| SONUÇ | iv |
| SEMBOL LİSTESİ | v |
| KAYNAKLAR | vii |



ÖNSÖZ

Bu çalışmada Kompakt Topolojik Uzaylar üzerine başlıca bilgiler değişik kaynaklardan derlenerek anlaşılır bir düzen içinde sunulmaya çalışılmıştır.

Bilindiği gibi "Kompakt Topolojik Uzay" kavramı ilk defa 1923'de PS. Alexandroff ve Paul Urysohn tarafından bugünkü anlamda, fakat "Bicompakt" adı ile tanımlanır. 1940 yılında Nicolas Bourbaki bu ismi değiştirip "Kompakt Uzaylar" olarak tanımlamıştır.

Kompakt Uzayların tanımının bu kadar yakın bir tarihte olmasına karşın, aslında bu kavram Topolojiye Analizin temel teoremlerinden olan Heine - Borel teoremi ile 1872 - 1895 senelerinde girmiştir.

Klasik analizdeki önemli teoremlerin pek çoğu KAPALI ve SINIRLI aralıklar için gösterilmiştir. Örneğin kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı olan sürekli bir fonksiyonun bu aralıkta maximum değerini alması yada bir başkası kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyon düzgün sürekli. Bu tip teoremlerin temelinde Bolzano -Weierstrass ve Heine - Borel teoremleri bulunmaktadır.

Genel Topolojideki önemli kavramların pek çoğu metrik uzaydaki kavramların genelleştirilmesi ile elde edilir. Bu nedenle :

I. Bölümde, reel sayılar, kartezyen uzay, metrik uzay ve örtü kavramları kısaca derlenmiş ve konumuz ile ilgili teoremler verilmiştir.

Ancak birinci bölümde ispatını verdiğimiz Bolzano-Weierstrass teoreminde kapalılık koşulunun herhangi bir topolojik uzayda karşılığını bulabilmemize karşın sınırlılık koşulunun karşılığını bulamıyoruz. Bu koşulu, her hangi bir topolojik uzayda "KOMPAKTLIK" kavramı ile sağlayabiliyoruz.

Böylece II. bölümde kompaktlık kavramı, kompaktlık kavramına denk olan tanımlar ve teoremler verilmiştir. III. bölümde çok çeşitli olan kompaktlık kavramlarından yalnızca ikisi " dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık " kavramları ele alınmıştır. Yalnızca bu iki uzayı ele alışımızın nedenlerinden biri örneğin dizisel kompakt uzayların, çok daha önceden (1906 senesinde) Frechet tarafından kompakt uzay kavramı olarak kullanılmış olmasıdır. Bir diğer nedeni ise metrik uzaylarda, kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlığın birbirine denk olmasıdır. Bu nedenle III. Bölümde bu uzayların özellikleri, aralarındaki ilişkiler ve metrik uzay ile olan ilişkileri incelenmiştir.

IV. bölümün I. kısmında kompakt uzaylarda ayırım aksiyomları ele alınmış, ikinci kısımda da kompakt uzaylarda tanım bölgeleri yada değer bölgeleri olan sürekli fonksiyonlarda elde edilen sonuçların belli başlıcaları ele alınmıştır. Son olarak da Kompakt Uzayların çarpımları ile ilgili teoremlere yer verilmiştir.



ABSTRACT

TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK KAVRAMI

SİĞİNÇ, Filiz

Yüksek Lisans Öğrencisi

Tez Danışması : Prof. Dr. Asuman ILGAZ

8, Mart , 1996, 53 sayfa

In this work, we deal with the notion of compactness in topological spaces. Particular attention is given to the basic properties and theorems of the related subject. However, we have stated earlier, namely in the first section, the important properties of the system of real numbers, cartesian spaces, metric spaces and topological spaces. A topological property called compactness is developed for general topological space. For subsets of the space (R, U) compactness turns out to be equivalent to the property of being "closed" and "bounded". Since these concepts can not be used to define compactness in a general topological space, we need the concept of "open covering" of a topological space. This concept is introduced in the last part of the first section.

Indeed compactness is a topological analog of finiteness. That means instead of considering of all points of a space, we consider only finitely many points to study the entire space. That's why many theorems in calculus involve closed and bounded intervals in R , which are all compact spaces.

Since the earlier definitions of compactness are related to sequentially compactness and countably compactness, we also deal with them. Furthermore, in metric spaces, we proved that compactness \Leftrightarrow sequential compactness \Leftrightarrow countable compactness. In the latter section we concern compact spaces in general; equivalent definitions of them, their separation properties, continuous functions on them and their subspaces. Finally we work with the product topology of compactness.

BÖLÜM 1.

REEL SAYILAR KÜMESİ KARTEZYEN UZAYLAR, METRİK UZAYLAR, TOPOLOJİK UZAYLAR

1. REEL SAYILAR KÜMESİ

1.1. TANIM :(CİSİM)

Aşağıdaki özellikleri taşıyan (+) ve (-) şeklinde gösterilen iki binary işleme sahip bir F kümesine bir cisimdir denir:

$$(1) a+b = b+a, \forall a, b \in F$$

$$(2) (a+b)+c=a+(b+c), \forall a, b, c \in F$$

$$(3) \exists \theta \in F, \theta \text{ bir ve tek: } \theta+a=a \text{ ve } a+\theta = a \text{ dir } \forall \theta \in F (\theta=0)$$

$$(4) \forall a \in F \text{ için } \exists \bar{a} \in F : a+\bar{a} = \theta \text{ ve } \bar{a}+a = \theta (\bar{a}=-a)$$

$$(5) a.b = b.a, \forall a, b \in F$$

$$(6) (a.b).c = (a.(b.c)), \forall a, b, c \in F$$

$$(7) \exists \text{ bir ve birtek } e \neq \theta, e \in F : e.a = a, a.e=e, \forall a \in F$$

$$(8) \forall a \in F, a \neq \theta, \exists a' \in F : a.a'=e \text{ ve } a'.a=e (a'=a^{-1})$$

$$(9) a.(b+c) = (a.b)+(a.c) \text{ ve } (b+c).a=(b.a)+(c.a), \forall a, b, c \in F$$

θ ya F cismin sıfır elemanı ve e ye F kümesinin birim elemanı denir.

1.2. TANIM :(POZİTİF KÜME)

Eğer $P \subset F$ ve $P \neq \emptyset$ alt kümesine aşağıdaki özellikler gerçekleşirse pozitif kümedendir.

$$(1) \text{ Eğer } a, b \in P \Rightarrow a+b \in P$$

$$(2) \text{ Eğer } a, b \in P \Rightarrow a.b \in P$$

(3) Eğer $a \in F \Rightarrow$ vereceğimiz bağıntılardan mutlaka biri vardır: $a \in P, a=0, -a \in P$

1.3. TANIM (SIRALI OLMA)

Eğer $P \subset F$, P kümesi F içinde bir pozitif küme ise F,P aracılığı ile sıralanmıştır denir ve F kümesine sıralanmış bir cisim denir.

1.4 TANIM :(ARCHIMEDEAN CİSİM)

Eğer $\forall x \in F$ için $x < n$ olacak şekilde bir sıralanmış bir $n \in N$ varsa F cismine Archimedean cisim denir.

1.5. TANIM (ARALIKLAR)

F sıralanmış bir küme, $a, b \in F : a \leq b \Rightarrow$

$\{x : x \in F \text{ ve } a < x < b\}$ kümesine (a,b) ile gösterilen ailenin belirlediği açık aralık denir. $a, b \in F$ ve $\{x : x \in F \text{ ve } a \leq x \leq b\}$ kümesine, a ile b nin belirlediği kapalı aralık denir ve $[a, b]$ ile gösterilir.

1.6. TANIM: (ALT SINIR, ÜST SINIR)

$S \subset \mathbb{R}$ olsun. $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall s \in S$ için $s \leq u$ ise, u ya S alt kümesinin bir üst sınırı denir. Benzer şekilde $\exists u \in \mathbb{R}$ varsa : $\forall s \in S$ için $w \leq s$ ise, w ya S alt kümesinin alt sınırı denir. Bir küme alt sınırı varsa alttan sınırlı, üst sınırı varsa üstten sınırlıdır. Alttan ve üstten sınırlı küme sınırlıdır.

1.7. TANIM: (SUPREMUM, INFIMUM)

$S \subset \mathbb{R}$ alt kümesi sınırlı olsun. S kümesinin üst sınırından biri, diğer bütün üst sınırlardan daha küçük ise, bu üst sınıra S kümesinin supremumu denir. Benzer şekilde S nin alt sınırlarından bir en büyüğü varsa, buna S nin infimumu denir.

SUPREMUM PRENSİBİ: Reel sayıların boştan farklı bir alt kümesinin bir üst sınırı varsa, supremumu da vardır.

2. KARTEZYEN UZAYLAR

2.1. TANIM (KARTEZYEN ÇARPIM)

Eğer A ve B iki boştan farklı küme ise, kartezyen çarpım $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ dir. Benzer şekilde boştan farklı A, B, C gibi üç kümenin kartezyen çarpım $A \times B \times C = \{(a, b, c): a \in A, b \in B, c \in C\}$ dir.

O halde $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p = \{(a_1, a_2, \dots, a_p): a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_p \in A_p\}$ özel olarak ($A_1 = A_2 = \dots = A_p$) ise $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p = A^p$ gösterilir.

2.2. TANIM (n- BOYUTLU REEL KARTEZYEN UZAY)

Özel olarak $A = \mathbb{R}$ alırsak n defa kartezyen çarpımı $\mathbb{R}^n = n$ -boyutlu reel kartezyen uzay olarak isimlendirilir.

2.3. TEOREM:

Eğer $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ deki herhangi bir eleman ise, o zaman $|\xi_j| \leq |x| \leq \sqrt{n} \sup \{ |\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_n| \}$ dir.

İspat:

$|x|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$ olduğundan $|\xi_1| \leq |x|$ dir.

Benzer şekilde eğer $M = \sup \{ |\xi_1|, \dots, |\xi_n| \}$ ise, o zaman $|x|^2 \leq n M^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{n} M$ sonucu elde edilir

2.4. TANIM: (AÇIK KÜME)

\mathbb{R}^n de bir alt küme G olsun. $\forall x \in G$ için $|x-y| < r$ eşitsizliğini $r > 0$ için $y \in G$ oluyorsa G ye açık küme denir.

Örnek:

\mathbb{R}^n kümesi açıktır. Çünkü $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $n = 1$ alırsak.

2.5. AÇIK KÜMELERİN ÖZELLİKLERİ

- (a) Boş küme \emptyset ve bütün uzay \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^n de açıktır..
- (b) \mathbb{R}^n deki herhangi iki açık kümenin ara kesiti de \mathbb{R}^n de açıktır.
- (c) \mathbb{R}^n deki herhangi sayıdaki kümelerin birleşimi de \mathbb{R}^n açıktır.

İspat:

\emptyset küme hiçbir eleman içermediğinden yukardaki şartlar trivial olarak gerçekleşir. ise (Örnek 2.4'den) açıktır.

(b) $G_1, G_2 \in \mathbb{R}^n$ açık kümeler olsun ve $G_3 = G_1 \cap G_2$ kümesinin de açık olacağını göstereceğiz. $x \in G_3$ olsun $\Rightarrow x \in G_1$ ve $x \in G_2$ dir. G_1 açık olduğundan o halde $\exists r_1 > 0 \mid |x-z| < r_1$ dir. Buradan $z \in G_1$ bulunur. Benzer şekilde G_2 açık olduğundan $\exists r_2 > 0 \mid |x-w| < r_2$ dir. Buradan $w \in G_2$ bulunur. $r_3 = \min \{r_1, r_2\}$ diyelim \Rightarrow Eğer $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $|x-y| < r_3$ ise $y \in G_2$ olur $\Rightarrow y \in G_3 = G_1 \cap G_2$.

(c) $\{G_\alpha, G_\beta, \dots\}$ açık kümelerin bir ailesi olsun ve G ile bu açık kümelerin birleşimini gösterelim. G nin açık olduğunu görmek için bir $x \in G$ alalım. G birleşim kümesinin oluşumundan x merkezli G_λ tarafından tamamen kapsanacak şekilde açık küme vardır. O halde bu küme tamamen G nin içine düşer $\Rightarrow G \in \mathbb{R}^n$ de açıktır.

2.6. KAPALI KÜMELER

\mathbb{R}^n de tümleyeni açık olan \mathbb{R}^n in bir alt kümesine kapalıdır denir.

2.7. KOMSULUKLAR

$x \in \mathbb{R}^n$ de bir nokta olsun. x i içine alan bir açık kümeyi içeren her kümeye x in \mathbb{R}^n deki komşuluğu denir. $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $x \in A$ noktasına A kümesinin iç noktasıdır denir. A kümesi x noktasının komşuluğu ve eğer x in her bir komşuluğu A kümesinin x den farklı bir noktasını içeriyor ise x noktasına A kümesinin yığılma noktasıdır denir .

2.8. TANIM (SINIRLILIK)

\mathbb{R}^n de bir J açık aralığı, \mathbb{R}^n nin alt kümesi olan açık aralıklarının n defa kartezyen çarpımı ile verilir:

$$J = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < \xi_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Benzer şekilde \mathbb{R}^n de I kapalı aralığı reel sayıların kapalı aralıklarının p defa kartezyen çarpımı ile elde edilir:

$$I = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq \xi_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ nin bir alt kümesi bir aralık tarafından kapsanıyorsa, bu kümeye sınırlıdır denir.

2.9. TEOREM (İÇ İÇE GEÇMİŞ ARALIKLAR TEOREMİ)

$\langle I_k \rangle, \mathbb{R}^n$ nin boştan farklı kapalı aralıklar dizisi olsun. Bu dizi $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_k \dots$ şeklinde iç içe yuvalanmış aralıklardan meydana gelmiş olsun. O zaman $\exists p \in \mathbb{R}^n : p \in \{ I_k \}$

İspat:

Bir I_k aralığımızı açık olarak gösterirsek

$$I_k = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : a_{k_1} \leq \xi_1 \leq b_{k_1}, \dots, a_{k_n} \leq \xi_n \leq b_{k_n}\}$$

Buradan $\{ [a_{k_1}, b_{k_1}] : k \in \mathbb{N} \}$ reel sayıların kapalı aralıklarından oluşmuş, boştan farklı, yuvalanmış bir dizi oluşturduklarına görürüz ve öyle bir η_1 reel sayısı vardır ki bütün bu aralıkların içine girer. Bu işlemi her bir koordinata uygulayacak olursak bu $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ noktasını elde ederiz. Öyle ki $y \in \mathbb{R}^n$ ve eğer $j, j= 1, 2, \dots, n$ ise $\eta_j \in \{ [a_{k_1}, b_{k_1}] : k \in \mathbb{N} \}$ olur. Yani y bütün $\langle I_k \rangle$ aralıklarının ortak noktası olur.

2.10. BOLZANO - WEIERSTRASS TEOREMİ

\mathbb{R}^n nin her sınırlı ve sonsuz elemanlı alt kümesinin yığılma noktası vardır.

İspat: B sonsuz elemanlı ve sınırlı bir alt küme ve $B \subset I_1$ olacak şekilde I_1 kapalı aralığını her bir kenarını iki eşit parçaya bölerek 2^n tane kapalı alt aralığa bölelim. I_1 , B nin sayılamayacak kadar çok elemanını içerdiğinden, bu alt aralıklardan en az biri B nin sayılamayacak kadar çok elemanını içerir. Eğer 2^n alt aralıklarının her biri B nin sonlu sayıda elemanını içermiş olsa idi, B nin sonlu küme olması gerekirdi ki bu da hipotezle çelişir. Öyleyse bu 2^n alt aralıklardan en az birisi B nin sayılamayacak kadar çok elemanını içerecektir. B nin sayılamayacak kadar çok elemanını içeren bu alt aralığına I_2 diyelim. Şimdi de I_2 aralığının her bir kenarını iki eşit kapalı aralığa bölelim. Yine bu alt aralıklardan en az birisi B nin sayılamayacak kadar çok elemanını içerecektir. Aksi takdirde I_2 sonlu olurdu ve bu da I_2 nin oluşturulması biçimiyle çelişirdi. I_2 nin sonsuz çoklukta elemanını içeren bu alt aralığına I_3 diyelim.

Bu şekilde devam ederek \mathbb{R}^n nin iç içe geçmiş $\langle I_k \rangle$ kapalı aralıklar dizisini elde ederiz. İç içe geçmiş aralıklar teoremine göre I_k , ($k = 1, 2, \dots$) aralıklarına ait bir y noktası vardır. Şimdi de bu y noktasının B nin yığılma noktası olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak, eğer $I_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ $a_k < b_k$ olmak üzere ve eğer $L(I_1) = \sup \{ b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n \}$ ise $L(I_1) > 0$ değeri I_1 in en geniş parçasının uzunluğudur. $\langle I_k \rangle$ dizisinin oluşturulma şekliyle dolay

$$0 < L(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}} L(I_1), k \in \mathbb{N} \text{ dir.}$$

Diyelim ki V , ortak nokta y nin bir komşuluğu ve $|y-z| < r$ koşulunu sağlayan V komşuluğuna ait olsun.

Şimdi k indisini öyle geniş seçeriz ki $I_k \subseteq V$ olur. Böyle bir k indisi seçmek mümkün. Çünkü eğer $w \in I_k$ ise Bölüm 1 de verilen Teorem 2.3. den dolayı

$$|y - w| \leq \sqrt{n} L(I_k) = \frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} L(I_1) \text{ olur.}$$

\mathbb{R} nin Archimedean düzenlenmiş cisim olma özelliğinden dolayı k indisi yeterince büyük seçilmiş ise

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} L(I_1) < r \text{ olur.}$$

k nin böyle bir değeri içinde $I_k \subseteq V$ gerçekleşir. I_k kapalı aralığı B nin sayılamayacak

kadar çok elemanını içerdiğinden V komşuluğu da B nin y den farklı en az bir elemanını içermiş olur. Sonuç olarak y , B nin yığılma noktasıdır.

A. \mathbb{R}^n de DİZİLER

A.1. TANIM : (DİZİ)

\mathbb{R}^n de dizi tanım kümesi $N = \{1, 2, \dots\}$ pozitif tamsayılar olan ve değer kümesi içinde bulunan bir fonksiyondur.

A.2. TANIM (YAKINSAK DİZİ)

$S = \langle s_n \rangle$ \mathbb{R}^n de bir dizi olsun. Eğer $s \in \mathbb{R}^n$ nin her bir V komşuluğu için $n > K_v$ için $s_n \in V$ olacak şekilde bir K_v sayısı varsa s noktasına S nin limit noktası denir. Eğer $S \rightarrow s$, yani s , S nin limit noktası ise S , s e yakınıyor diyebiliriz. Diziye de yakınsak dizi denir.

A.3. TEOREM: \mathbb{R}^n de bir dizinin en fazla bir limit noktası vardır.

İspat: $\langle s_n \rangle$ dizisinin birden fazla limit noktasının bulunduğunu varsayalım. s', s'' , bir $S = \langle s_n \rangle$ dizisinin farklı limit noktaları $s' \neq s''$ olsun. V' ve V'' , s' ve s'' nin ortak noktaları olmayan iki komşuluğu olsun ve K' ve K'' öyle iki pozitif tamsayı olsun. Öyle ki $n \geq K'$ için $s_n \in V'$ ve $n \geq K''$ için $s_n \in V''$ olsun. $K = \sup \{K', K''\}$ diyelim. Böylece $s_k \in V'$ ve $s_k \in V''$ olur. Yani $s_k \in V' \cap V''$, bu ise V' ve V'' nün ayrık olma hipotezimize ters düşer.

A.4. TANIM (ALT DİZİ)

Eğer \mathbb{R}^n de bir dizi $S = \langle s_n \rangle$ ise ve eğer $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ pozitif tam sayıların tam (strictly) olarak artan bir dizisi ise, o zaman \mathbb{R}^n de oluşan

$$S' = \langle s_{r_1}, \dots, s_{r_n}, \dots \rangle$$

dizisine S dizisinin bir alt izisi denir.

A.5. YARDIMCI TEOREM:

Eğer \mathbb{R}^n de bir $S = \langle s_n \rangle$ dizisi bir $s \in \mathbb{R}^n$ elemanına yakınıyorsa, o zaman

S dizisinin herhangi bir alt dizisi de s noktasına yakınsar.

İspat: V, limit s noktasının bir komşuluğu olsun. Dizinin tanımından öyle bir K_v pozitif tam sayı bulabiliriz, $n \geq K_v$ için $s_n \in V$ nin içine düşer. $m \geq n$ kaldıkça $r_n \geq K_v$ ve $s_{r_n} \in V$ olacak şekilde bir

$$S' = \langle s_{r_1}, \dots, s_{r_n}, \dots \rangle$$

dizisini kurabiliriz. $S' \rightarrow s$ olacaktır.

A.6. BOLZANO - WEIERSTRASS TEOREMİ:

R^n deki sınırlı bir dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

İspat: $\langle x_n \rangle$, R^n nin sınırlı bir dizisi olsun. Eğer dizide sadece sonlu sayıda eleman var ise, içlerinden en az biri sonsuz defa tekrarlanacaktır. Eğer $\langle x_n \rangle$ dizisinin alt dizisi, sonsuz defa tekrar eden bu elemanı seçerek oluşturursak, $\langle x_n \rangle$ nin yakınsak bir alt dizisini elde etmiş oluruz.

Diğer taraftan, $\langle x_n \rangle$, R^n deki sonsuz sayıda birbirinden farklı elemanları içermiş olsun. Bu noktalar sınırlı olduğundan Bölüm 1 de verilen teorem 2.10. dan dolayı en az bir yığılma noktası vardır. Bu noktayı x^* ile gösterelim.

$$x_{n_1} \in \langle x_n \rangle \text{ ve } |x_{n_1} - x^*| < 1 \text{ olsun.}$$

Bir $V_2 = \{ y : |y - x^*| < \frac{1}{2} \}$ komşuluğu alalım. x^* , $S_1 = \{ x_m : m \geq 1 \}$ kümesinin yığılma noktası olduğundan S_1 kümesinin sonlu sayıda noktalarını çıkararak oluşturduğumuz $S_2 = \{ x_m : m > n_1 \}$ kümesinin de yığılma noktasıdır. Bu takdirde $n_2 > n_1$ olmak üzere V_2 ye ait $x_{n_2} \in S_2$ vardır. $V_3 = \{ y : |y - x^*| < \frac{1}{3} \}$ komşuluğu ve $S_3 = \{ x_m : m > n_2 \}$ kümesi alalım. x^* , S_3 kümesinin yığılma noktası olduğundan, $n_3 > n_2$ olmak üzere V_3 komşuluğuna ait $x_{n_3} \in S_3$ vardır.

Bu şekilde devam ederek $\langle x'_n \rangle \subset \langle x_n \rangle$ elde ederiz.

$$\langle x'_n \rangle = \langle x_{n_1}, x_{n_2}, \dots \rangle \text{ öyle ki } |x_{n_r} - x^*| < \frac{1}{r} \text{ olur.}$$

Sonuç olarak $\langle x'_n \rangle \rightarrow x^*$ dir.

B. SÜREKLİ FONKSİYONLAR

B.1. TANIM :(SÜREKLİLİK)

Tanım kümesi R^n de ve değer kümesi R^n da olan bir f fonksiyonunu göz önüne

alalım. $a \in D$, tanım kümesinde bir nokta olsun. f fonksiyonuna a noktasından süreklidir denir, eğer $f(a)$ 'nın her komşuluğu için a 'nın bir U komşuluğu bulunabiliyorsa, öyle ki $x \in D \cap U$ içinde ise $f(x) \in V$ dir. $D_1 \subset D$ olduğu takdirde f fonksiyonu D_1 kümesinde süreklidir denir, eğer D_1 kümesinin her noktasında sürekli ise.

B.2. TEOREM:

Bir f fonksiyonu bir $a \in D$ kümesinde süreklidir $\Leftrightarrow f(a)$ 'nın her V komşuluğu için a noktasının $V_1 \cap D = f^{-1}(V)$ olacak şekilde V_1 komşuluğu vardır.

İspat:

Eğer V_1 , a noktasının bu eşitliği sağlayan bir komşuluğu ise, o zaman süreklilik tanımından $U = V_1$ almamız yeterlidir. Tersine eğer süreklilik tanımını gerçekleştiriyorsa, o zaman $V_1 = U \cup f^{-1}(V)$ alabiliriz.

3. METRİK UZAYLAR:

Bir metrik uzay noktaların birbirine olan uzaklığı tanımlanmış bir kümedir.

3.1. TANIM (METRİK UZAY)

$X \times X$ üzerinde tanımlanmış aşağıdaki şartları sağlayan pozitif f reel değerli d fonksiyonuna X kümesi üzerinde metrik denir, $\forall x, y, z \in X$ için :

- i) $d(x, y) \geq 0$
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iii) $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$
- iv) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

d metriği ile birlikte bu X kümesine bir "metrik uzay" denir ve (X, d) ile gösterilir.

Örnek 1:

\mathbb{R} , reel sayılar kümesi olsun. \mathbb{R} üzerinde tanımlı $|x|$ reel değerli fonksiyonunu düşünelim. Mutlak değer fonksiyonunun üç temel özelliği vardır:

- 1) $|x| \geq 0$ ve $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $|-x| = |x|$;
- 3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

şimdi \mathbb{R} üzerinde bir metrik tanımlayabiliriz:

$$d(x,y) = |x-y|$$

Buna \mathbb{R} üzerinde tanımlı doğal metrik denir.

Örnek 2:

\mathbb{R}^2 de yine herhangi bir metrik olarak, daha sonra kullanacağımız hepimizin bildiği "Pythagor" metriğini vereceğiz. (x_1, y_1) ve $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ de iki nokta ise, \mathbb{R}^2 de şöyle bir metrik tanımlayabiliriz:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

3.2. TANIM: (AÇIK KÜRE)

(X, d) metrik uzay olsun. $x_0 \in X$, $r > 0$ reel bir sayı olmak üzere x_0 merkezli r yarıçaplı $S(x_0, r)$ açık küresi X in bir alt kümesidir ve $S(x_0, r) = \{x : d(x, x_0) < r\}$ şeklinde tanımlanır.

3.3. TEOREM:

(X, d) metrik uzay olsun. \emptyset ve uzayın kendisi açık kümelerdir.

İspat:

\emptyset nin açık olduğunu göstermek için, boş kümeye ait her noktanın \emptyset tarafından içerilen açık kürelerin merkezleri olduğunu göstermemiz gerekir. Fakat \emptyset nun hiç bir elemanı olmadığından bu şart trivial olarak gerçekleşir. X , açıkça görülüyor ki açık kümedir. Çünkü X in her noktasını merkez kabul eden açık küreler X in içindedir.

3.4. TEOREM:

(X, d) metrik uzay olsun. Metrik uzaydaki her açık küre açık bir kümedir.

İspat:

$S(x_0, r)$, X de bir açık küre olsun. $x \in S(x_0, r)$ alalım. Açık bir kürenin açık bir küme olduğunu göstermemiz için x merkezli, tamamen $S(x_0, r)$ açık küresinin içinde kalan bir açık küre bulmamız gerekir. $d(x, x_0) < r$ olduğundan $r_1 = r - d(x, x_0)$ pozitif reel sayıdır. $S(x, r_1) \subseteq S(x_0, r)$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $y \in S(x, r_1)$ ise $d(y, x) < r_1$ olur.

Öyleyse $d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r + d(x, x_0) = |r - d(x, x_0)| + d(x, x_0) = r$ yazabiliriz. Bu da y noktası $S(x_0, r)$ açık küresinin içindedir demektir.

3.5. TEOREM : (X, d) metrik uzay olsun. $G \subset X$ alt kümesi açıktır ancak ve ancak G , açık kürelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa.

İspat:

(\Rightarrow) : G nin açık olduğunu kabul edelim. G nin açık kürelerin birleşimi şeklinde yazılabileceğini göstereceğiz. Eğer $G = \emptyset$ ise, G , boş açık küreler sınıfının birleşimi biçiminde yazılır. Eğer $G \neq \emptyset$ ise, G açık olduğundan G nin her noktası, tamamen G nin içinde kalan açık kürelerin merkezleridir ve G nin içerdiği bütün açık kürelerin birleşimidir.

(\Leftarrow) : S , açık küreler sınıfını göstermek üzere $G = \cup S$ olduğunu kabul edelim. G nin açık olduğunu göstereceğiz. Eğer $S = \emptyset$ ise $G = \emptyset$ dir ve Bölüm 1 de verilen Teorem 3.3. den dolayı G açık olur. $S \neq \emptyset$ olsun. $G \neq \emptyset$ olur. $x \in G$ alalım. G, S deki açık kürelerin birleşimi olduğundan $\exists S(x_0, r) \in S : x \in S(x_0, r)$.

Bölüm 1 de verilen Teorem 3.4. den dolayı $x, S(x, r_1) \subseteq S(x_0, r)$ açık küresinin merkezidir. $S(x_0, r) \subseteq G$ ve $S(x, r_1) \subseteq G$ olduğundan, G nin içerdiği x merkezli açık küre bulabildik. Dolayısıyla G açıktır.

3.6.SONUC TEOREM:

(X, d) metrik uzay olsun.

- 1) X in herhangi bir sayıdaki açık kümelerinin birleşimi de açıktır.
- 2) X in sonlu sayıdaki açık kümelerinin ara kesiti de açıktır.

3.7 TANIM: (BİR KÜMENİN İÇ NOKTASI)

(X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. $A \subset X$ alalım. Eğer $a \in A$ noktası A kümesinin içerdiği bir açık kürenin merkezi oluyorsa, bu noktaya A kümesinin iç noktası denir. A kümesinin içi ise bütün iç noktalarının birleşiminden meydana gelir ve $\text{Int}(A)$ veya $\overset{\circ}{A}$ şeklinde gösterilir. Kısaca,

$\text{Int}(A) = \{ x : x \in A \text{ ve } S(x, r) \subset A, \text{ bazı } r \text{ ler için} \}$ yazılabilir.

3.8 TANIM: (KAPALI KÜME)

(X, d) metrik uzayında $F \subset X$ alt kümesi bütün limit noktalarını içeriyor ise kapalıdır.

3.9 TEOREM: (X, d) metrik uzay olsun. Boş küme, \emptyset ve uzayın kendisi, X kapalıdır.

İspat:

\emptyset nin hiç bir limit noktası yoktur, dolayısıyla bütün hepsini içerir ve kapalıdır. Bütün uzay X , bütün noktalarını içerdiğinden trivial olarak kendi limit noktalarını da içerecektir dolayısıyla kapalı olur.

3.10 TEOREM:

(X, d) metrik uzay olsun. $F \subset X$ alt kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow F$ kümesinin tümleyeni, yani F^c kümesi açık ise.

İspat:

(\Rightarrow) F kapalı olduğunu kabul edelim. F^c in açık olduğunu göstereceğiz. Eğer $F^c = \emptyset$ ise Bölüm 1 de verilen Teorem 3.3 den dolayı açık olacaktır. $F^c \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $x \in F^c$ alalım. F kapalı ve $x \notin F$ olduğundan x , F kümesinin limit noktası değildir. $x \notin F$ ve x in F kümesinin limit noktası olmamasından dolayı F kümesi ile ara kesiti boş küme olacak şekilde $S(x, r)$ açık küresi vardır. $S(x, r)$, x merkezli ve F^c kümesinin içerdiği açık bir küredir ve $x \in F^c$ bu koşulu sağlayan herhangi bir nokta olduğundan F^c açıktır

(\Leftarrow) : F^c açık olduğunu kabul edelim. F in kapalı olduğunu göstereceğiz. F in kapalı olmasını engelleyecek tek olay F^c kümesinin F de bir limit noktasının olmasıdır. Bu gerçekleşmez çünkü F^c açık olduğundan, F^c in her bir noktası F ile arakesiti boş olan açık kürelerin merkezleridir ve böyle bir nokta F in limit noktası olamaz.

3.11. TANIM: (BİR KÜMENİN KAPANIŞI)

(X, d) bir metrik uzay olsun. $A \subset X$ alt kümesinin kapanışı \bar{A} ile gösterilir ve A kümesi ile limit noktaların kümesinin birleşiminden meydana gelir.

3.12. TEOREM:

(X, d) metrik uzay olsun. Metrik uzaydaki yakınsak bir dizinin sayılamayacak kadar çok birbirinden farklı noktaları var ise bu dizinin limiti dizinin noktalarının oluşturduğu kümenin limit noktasıdır.

İspat:

(X, d) bir metrik uzay $\langle x_n \rangle \rightarrow x$ olan X de bir dizi olsun. x in dizinin noktalarından oluşan kümenin limit noktası olmadığını kabul edelim. Buradan dizinin sadece sonlu çoklukta birbirinden farklı noktalarının olabileceğini göstereceğiz. Kabulümüzden dolayı, x merkezli r yarıçaplı, X 'in bir $S(x, r)$ açık küresi vardır öyle ki bu açık küre dizinin x den başka hiç bir noktasını içermez. Bununla birlikte x , dizinin limit noktası olduğundan hemen hemen bütün x_n ler $S(x, r)$ açık küresinin içinde olmalıdır. O zaman bütün noktalar x noktası ile çakışır. Buradan görüyoruz ki limit noktası olmadığında dizinin yalnızca sonlu sayıda birbirinden farklı noktaları olabilir.

3.13. TANIM: (SÜREKLİLİK)

$f: (X, d) \rightarrow (X', d')$ bir metrik uzaydan diğer bir metrik uzaya tanımlanmış bir fonksiyon olsun. f ye bir $x_0 \in X$ noktasında süreklidir diyebilmemiz için aşağıdaki iki özdeş şarttan birinin gerçekleşmesi yeterlidir:

1. $\forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ olsun.

2. $f(x_0)$ merkezli ve ϵ yarıçaplı $S(f(x_0), \epsilon)$ açık küresi için bir x_0 merkezli ve δ yarıçaplı $S(x_0, \delta)$ açık küresi bulunabiliyorsa: $f(S(x_0, \delta)) \subseteq S(f(x_0), \epsilon)$ sağlasın.

f eğer uzayın $\forall x \in X$ noktası için sürekli ise, f fonksiyonuna süreklidir denir.

3.14. TANIM: (DÜZGÜN SÜREKLİLİK)

$f: (X, d) \rightarrow (X', d')$ bir metrik uzaydan diğer bir metrik uzaya tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0$ sayısı için $d(x, y) < \delta$ kaldıkça $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ sağlanacak şekilde $\exists \delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna düzgün süreklidir denir.

4. TOPOLOJİK UZAYLAR

4.1. TANIM (TOPOLOJİK UZAY)

$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir τ ailesi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa τ nun elemanlarına τ - açık yada sadece açık kümeler denir ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

[O₁] Boş küme ve X kümesi τ ailesine aittir.

[O₂] τ ailesine ait herhangi sonlu kümenin arakesiti de τ ailesine aittir.

[O₃] τ ailesinin herhangi bir ailesinin birleşimi de τ ailesine aittir.

Örnek 1:

$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\tau = \{ X, \emptyset \}$, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye İndiskret Topoloji adı verilir.

Örnek 2:

$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $P(X)$, X in kuvvet kümesi olmak üzere $\tau = P(X)$ alırsak, X üzerinde bir topolojidir, Diskret Topolojik Uzay diye adlandırılır.

Örnek 3:

$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \}$ n - boyutlu öklid uzayını göz önüne alalım. Bu uzayda d doğal metrik ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$S(x, \varepsilon) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon \}$$

kümesi X in ε - açık komşuluğu olsun.

Bu durumda $\mathcal{E}^n = \{ G \subset \mathbb{R}^n \mid \forall x \in G, \exists \varepsilon_x > 0 : (x, \varepsilon_x) \subset G \}$ ailesi \mathbb{R}^n de bir topolojidir. Buna n - boyutlu Öklid Topolojisi adı verilir. Özel olarak $n=1$ için $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ açık aralıklar topolojisi elde edilir.

4.2. TANIM : (BAZ)

Bir (X, τ) topolojik uzayı ve $\mathcal{B} \subset \tau$ ailesi verilsin. Eğer τ ailesinin her elemanı \mathcal{B} ailesinin elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa \mathcal{B} ailesine τ topolojisi için bir bazdır.

Örnek:

$D = \{ S(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0 \}$ ailesi \mathbb{R}^n de E^n için bir bazdır.

4.3. TANIM: (BİR KÜMENİN KOMSULUĞU)

Bir (X, τ) topolojik uzayı ve $\delta \subset \tau$ ailesi verilsin. Eğer δ in elemanlarının sonlu arakesitleri τ topolojisi için bir baz oluşturuyorlarsa bu δ ailesine τ topolojisi için bir altbazdır denir.

4.4. TANIM: (BİR KÜMENİN KOMSULUĞU)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir $U \subset X$ kümesine A kümesinin komşuluğu denir

: $\Leftrightarrow \exists G \in \tau$ öyle ki $A \subset G \subset U$ dır.

4.5. TANIM (BİR NOKTANIN KOMSULUĞU)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Bir $U \subset X$ kümesine x noktasının bir komşuluğudur denir

: $\Leftrightarrow \exists G \in \tau$ öyle ki $x \in G \subset U$ dır.

Buna göre bir noktayı içeren her açık küme bu noktanın komşuluğudur. Böyle komşuluklara açık komşuluklar denir. Ayrıca bu tanıma göre her komşuluğun bir üst kümesi de yine bir komşuluğudur. Bir x noktasının bütün komşuluklarından oluşan aileyi $N(x)$ ile göstereceğiz.

4.6. TANIM: (BİR KÜMENİN YIĞILMA NOKTASI)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bir $x \in X$ noktasını içeren $\forall G \in \tau$ kümesi A nın x den farklı en az bir noktasını içeriyorsa, yani $\forall G \in \tau$ ve $x \in G$ için $(G \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa x noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir. A kümesinin yığılma noktalarının kümesine A nın türev kümesi denir ve A' ile gösterilir.

4.7. TANIM: (KAPALI KÜMELER)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A nın X deki tümleyeni olan küme τ - açık ise A kümesine τ - kapalı yada yalnızca kapalı denir ve şöyle gösterilir:

$A^c \in \tau$ ise A kapalı kümedir. Kapalı kümeler ailesini \mathcal{C}_τ ile göstereceğiz.

4.8. TANIM : (BİR KÜMENİN KAPANIŞI)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini içeren bütün kapalı kümelerin arakesitine A 'nın kapanışı denir. A kümesinin kapanışı \bar{A} ile göstereceğiz. Şu halde $\bar{A} := \bigcap \{F \mid A \subset F \text{ ve } F \in \mathcal{C}_\tau\}$ dır.

4.9. TANIM (YOĞUN KÜME)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $M \subset X$ olsun. Eğer $\bar{M} = X$ koşulu sağlanıyorsa M kümesine bu topolojik uzayda yoğunur denir.

4.10. TANIM : (YAKINSAK DİZİ)

(X, τ) bir topolojik uzay ve \mathbb{N} doğal sayılar kümesi olmak üzere $f : \mathbb{N} \rightarrow X, f(n) = x_n$ şeklindeki her fonksiyona (X, τ) da bir dizi denir ve $\langle x_n \rangle$ ile gösterilir.

4.11. TANIM : (YAKINSAK DİZİ)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $\langle x_n \rangle$ dizisi (X, τ) da bir $x_0 \in X$ noktasını yakınsıyor denir : $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{N}(x_0)$ için $\exists m \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > m$ için $x_n \in U$ olur. Eğer $\langle x_n \rangle$ dizisi $x_0 \in X$ noktasına yakınsıyor ise bu kısaca $\langle x_n \rangle \rightarrow x_0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gösterilir.

Bu durumda $x_0 \in X$ noktasına $\langle x_n \rangle$ dizisinin limiti denir.

4.12. TANIM : (SÜREKLİ FONKSİYONLAR)

(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall G^* \in \mathcal{C}^*$ için $f^{-1}(G^*) \in \mathcal{C}$ ise f fonksiyonuna süreklidir denir.

4.13. TANIM : (BİR NOKTADA SÜREKLİ FONKSİYONLAR)

(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $f(x_0)$ ini $\forall V$ komşuluğuna karşı x_0 'ın bir U komşuluğu $f(U) \subset V$ olacak biçimde bulunabiliyor ise f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir.

4.14. TEOREM:

(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f

sürekli $\Leftrightarrow \forall x \in X$ için f, x noktasında sürekli.

İspat:

(\Rightarrow): f sürekli ve $x \in X$ keyfi verilsin. $V \subset Y, f(x)$ in herhangi bir komşuluğu olsun. Bu durumda $\exists W \in \tau^*, f(x) \in W \subset V$ dir. f sürekli olduğundan $U = f^{-1}(W) \in \tau$ ve $x \in U$ olur. U, x in bir komşuluğu ve $f(U) \subset V$ olduğundan f, x de sürekli. Nokta keyfi olduğundan $\forall x \in X$ noktasında süreklilik vardır.

(\Leftarrow): $f, \forall x \in X$ noktasında sürekli olsun. $V \in \tau^*$ verilsin. $U = f^{-1}(V)$ ve $x \in U$ olsun. Bu durumda $f(x) \in V$ olduğundan $V, f(x)$ in bir komşuluğudur. Hipoteze göre $f(A) \subset V$ ve $A \subset U$ olacak şekilde x in bir A komşuluğu vardır. A, x in bir komşuluğu olduğundan $\exists U_x \in \tau : x \in U_x \subset A \subset U$ dir. $x \in U$ keyfi olduğundan $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ olacaktır. U , açık kümelerin birleşimi olarak açıktır. $V \in \tau^*$ keyfi olduğundan f sürekli.

4.15. TEOREM:

(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ ve bir fonsiyon olsun. Bu durumda f sürekli $\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{C}\tau^*$ için $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}\tau$ dir.

İspat:

(\Rightarrow): f sürekli ve $F \subset Y, F \in \mathcal{C}\tau^*$ olsun. Buradan $F^c \in \tau^*$ elde edilir. Hipoteze göre $f^{-1}(F^c) \in \tau$ dir. $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ olduğundan $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}\tau$ dir.

(\Leftarrow): Tersine olarak $\forall F \in \mathcal{C}\tau^*$ kapalı kümesi için $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}\tau$ olsun. $G \in \tau^*$ verilsin. $G^c \in \mathcal{C}\tau^*$ dir. Hipoteze göre $f^{-1}(G^c) \in \mathcal{C}\tau$ dir Fakat $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ olduğundan f sürekli.

4.16. TANIM: (AÇIK FONKSİYON)

(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ ve bir fonsiyon olsun. Eğer $\forall G \in \tau^*$ için $f(G) \in \tau^*$ ise f fonksiyonuna açık fonksiyon denir.

4.17. TANIM: (KAPALI FONKSİYON)

(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ ve bir fonsiyon olsun. Eğer $\forall F \subset X : F \in \mathcal{C}\tau$ kapalı kümesi için $f(F) \in \mathcal{C}\tau^*$ ise f fonksiyonuna kapalı fonksiyon denir.

4.18. TANIM: (HOMEOMORFİZM veya TOPOLOJİK DÖNÜSÜM)

(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ ve bir fonsiyon olsun. Eğer f , bire-bir örten, sürekli ve f^{-1} de sürekli ise bu f fonsiyonuna bu topolojik uzaylar arasında bir homeomorfizm denir. İki topolojik uzay arasında bir homeomorfizm varsa, bu uzaylara homeomorf uzaylar denir.

4.19. TANIM (ALT UZAY VE ALT UZAY TOPOLOJİSİ)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $\tau_A = \{ A \cap G \mid G \in \tau \}$ ailesi A üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye τ nun A üzerinde ürettiği alt uzay topolojisi yada relatif topoloji denir. (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) topolojik uzayının alt uzayı adı verilir.

Örnek:

\mathbb{R} deki 1-boyutlu öklid topolojisini gözönüne alalım. E nin $I = [0,1]$ \mathbb{R} üzerinde ürettiği alt uzay topolojisi $E_I = \{ G \cap I \mid G \in E \}$ dir. Görüldüğü gibi E_I , \mathbb{R} deki açık aralıkların $[0,1]$ kapalı aralığı ile arakesitlerinden oluşmaktadır. Şu halde (I, E_I) , (\mathbb{R}, E) nin bir alt uzayıdır.

4.20. TEOREM

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda:

- (i) $H \subset A$, $A \tau_A$, açıktır $\Leftrightarrow \exists G \subset X$ ve $G \in \tau : H = A \cap G$ dir.
- (ii) $F \subset A$, $F \tau_A$, kapalıdır $\Leftrightarrow \exists K \subset X$ ve $K \in \mathcal{C}\tau : F = A \cap K$ dir.

İspat:

(i) (\Rightarrow) : $H \subset A \tau_A$ - açık olsun. Bu durumda $\exists G \in \tau : H = A \cap G$ dir.

(\Leftarrow) : $H = A \cap G$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ var olsun. Alt uzay tanımına göre $H \tau_A$ - açıktır.

(ii) (\Rightarrow) : $F \subset A \tau_A$ - kapalı olsun. Bu durumda $F^c \tau_A$ - açıktır. (i) ye göre $\exists U \in \tau : F^c = A \cup U$ dir. Buradan $(F^c)^c = A^c \cap U^c$ elde edilir. $K = U^c$ alınırsa $F = A \cap K$ olur. Çünkü U^c kapalıdır.

(\Leftarrow) : $F = A \cap K$ olacak şekilde bir $K \subset X$, $K \in \mathcal{C}\tau$ kümesi var olsun. Buradan

$F^c = A \cap K^c$ elde edilir. Fakat $K^c \in \tau$ olduğundan $F^c \tau_\Lambda$ - açıktır. Dolayısıyla $F \tau_\Lambda$ - kapalıdır.

4.21. TANIM: (ÇARPIM UZAYI)

A bir indis kümesi olmak üzere $\forall \alpha \in A$ için $X_\alpha \neq \emptyset$ ise $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ailesinin kartezyen çarpımı $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \{ x : A \rightarrow \cup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid x(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha \}$

ile tanımlanır.

NOT: Her bir $X_\alpha \neq \emptyset$ ise $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$ olduğu seçme aksiomunun bir sonucudur.

4.22. TANIM: (İZDÜŞÜM FONKSİYONU)

$(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ boş olmayan bir küme ailesi ve $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ bu ailenin kartezyen çarpımı olsun.

$$P_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta \quad P_\beta(x) : x_\beta \in X_\beta$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyona β . inci projeksiyon (veya izdüşüm fonksiyonu) denir.

4.23. TANIM: (ÇARPIM TOPOLOJİSİ)

$(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ topolojik uzayların bir ailesi olsun. $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ üzerinde bütün projeksiyonları sürekli yapan en kaba topolojiye çarpım topolojisi (veya Tychonoff Topolojisi) adı verilir.

A. AYIRIM AKSİYOMLARI:

A.1. TANIM: (T₀ - UZAYI)

Bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. X kümesinin her farklı iki noktası için bu noktalardan birini içerip diğerini içermeyen bir açık küme bulunabiliyorsa bu topolojik uzaya T₀- Uzayı denir.

Örnek: \mathbb{R} de $\tau_{\text{sağ}} := \{ \emptyset, \mathbb{R} \} \cup \{ [a, \infty) \mid a \in \mathbb{R} \}$ ile tanımlansın. $(\mathbb{R}, \tau_{\text{sağ}})$ bir T₀-uzayıdır.

A.2. TANIM: (T₁ - UZAYI)

Bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. X kümesinin her farklı iki noktası için, bu noktaların her birinin diğerini içermeyen bir açık komşuluğu varsa bu topolojik uzaya T₁ - Uzayı denir.

Örnek:

(\mathbb{R}, E) bir T_1 - Uzayıdır.

A.3. TEOREM:

Bir topolojik uzayının T_1 - uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul tek noktadan oluşan her kümenin kapalı olmasıdır.

İspat:

(\Rightarrow) : (X, τ) T_1 - uzayı olsun. $p \in X$ verilsin. $\{p\} \in \mathcal{C}\tau$ olduğunu göstermek için $\{p\}^c$ açık olduğunu göstermek yeter. $x \in \{p\}^c$ olsun. $x \neq p$ dir . Hipoteze göre $\exists G_x \in \tau, x \in G_x$ ve $p \notin G_x$ dir. O halde $A_p \neq x$ için $\exists G_x \in \tau, G_x \subset \{p\}^c$ dir.

Buradan $\{p\}^c = \bigcup_{x \neq p} \{x\} \subset \bigcup_{x \neq p} G_x \subset \{p\}^c$ elde edilir. yani $\{p\}^c = \bigcup_{x \neq p} G_x \in \tau$ olur. Dolayısıyla $\{p\}$ kapalıdır.

(\Leftarrow) : $\forall p \in X$ için $\{p\} \in \mathcal{C}\tau$ olsun. $a, b \in X$ ve $a \neq b$ verilsin. Hipoteze göre $\{a\}$ ve $\{b\}$ kapalıdır. Ayrıca $a \in \{b\}^c$ ve $b \notin \{b\}^c$ dir. $b \in \{a\}^c$ ve $a \notin \{a\}^c$ dir. Diğer yandan $\{a\}^c$ ve $\{b\}^c$ açık olduğundan (X, τ) T_1 - uzayıdır.

A.4. TANIM : (T_2 - veya HAUSDORFF UZAYI)

Bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. (X, τ) T_2 - uzayı (veya Hausdorff uzayı) dir : $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $\exists U, V \in \tau : x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

Örnek:

(\mathbb{R}^n, E^n) bir T_2 - uzayıdır.

Tanımları gözönüne aldığımızda görüleceği gibi $T_1 = 0, 1, 2$ uzayları arasında T_2 - uzayı $\Rightarrow T_1$ - uzayı $\Rightarrow T_0$ - uzayı bağlantısı sağlanır.

A.5. TANIM : (T_3 - UZAYI)

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall F \subset X$ ve $F \in \mathcal{C}\tau$ kümesi ve bu kümenin dışında her $x \in X$ noktası için $x \in U, F \subset V; U, V \in \tau$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri bulunabiliyorsa topolojik uzayına T_3 - uzayı denir.

A.6. TANIM : (REGÜLER UZAY)

Eğer bir topolojik uzay T_1 ve T_3 - uzayı ise bu uzaya regüler uzay denir.

Örnek:

$X = \{ a, b, c \}$ kümesi üzerinde kurulu $T = \{ X - \emptyset, \{a\}, \{b, c\} \}$ topolojisini alalım. \emptyset , $\{a\}$ ve $\{b, c\}$ kümeleri aynı zamanda τ - kapalı kümelerdir. (X, τ) uzayı regüler uzay değildir.

A.7. TANIM : (T4 - UZAYI)

Bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. (X, τ) T_4 - uzayıdır.

$\Leftrightarrow \forall F_1, F_2 \in \mathcal{C}_\tau$ ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset \exists U, V \in \tau$:

$F_1 \subset U, F_2 \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

A.8. TANIM : NORMAL UZAY)

Eğer bir (X, τ) topolojik uzayı T_1 - ve T_4 - uzayı ise bu uzaya Normal Uzay adı verilir.

A.9. TEOREM:

Bir topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) T_4 - uzayıdır.

(ii) Her $F \in \mathcal{C}_\tau$ ve $F \subset H$ koşulunu sağlayan $H \in \tau$ için $F \subset G \subset \overline{G} \subset H$ olacak biçimde bir $G \in \tau$ vardır.

İspat:

(i) \Rightarrow (ii) : (X, τ) T_4 - uzayı, $F \in \mathcal{C}_\tau$, $H \in \tau$ ve $F \subset H$ olsun. Bu durumda $H^c \in \mathcal{C}_\tau$ ve $F \cap H^c = \emptyset$ olur. Hipoteze göre

$\exists, G, G^* \in \tau : F \subset G, H^c \subset G^*$ ve $G \cap G^* = \emptyset$ dir. Buradan

$G \subset (G^*)^c$ ve $(G^*)^c \subset H$ yazılabilir. $(G^*)^c \in \mathcal{C}_\tau$ olduğundan $\overline{(G^*)^c} = (G^*)^c$ ve buradan da $F \subset G \subset \overline{G} \subset \overline{(G^*)^c} = (G^*)^c \subset H$ elde edilir. Şu halde $F \subset G \subset \overline{G} \subset H$ olur.

(ii) \Rightarrow (i) : $A, B \in \mathcal{C}_\tau$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Buradan $A \subset B^c$ ve $B^c \in \tau$ elde edilir. Hipoteze göre $\exists G \in \tau : A \subset G \subset \overline{G} \subset B^c$ dir. $\overline{G} \subset B^c$ olduğundan $B \subset (\overline{G})^c$ ve $(\overline{G})^c \in \tau$

olacaktır. Ayrıca $G \subset \overline{G}$ olması $G \cap (\overline{G})^c = \emptyset$ olmasını gerektirir. $A \subset G$, $B \subset (\overline{G})^c$ ve $G \cap (\overline{G})^c = \emptyset$ olduğundan (X, τ) bir T_4 - uzayıdır.

B. ÖRTÜ

Aşağıdaki kısımda çeşitli örtü tanımlarıyla ilgili teoremler verilmiştir.

(X, τ) bir topolojik uzay, I ve J numaralayan kümeler olsunlar.

B.1. TANIM (AÇIK ÖRTÜ)

X in açık kümelerinden oluşan $\{U_i\}_{i \in I}$ ailesi için $\bigcup_I U_i = X$ gerçekleşiyor ise $\{U_i\}_{i \in I}$ (X, τ) uzayının bir açık örtüsü denir.

B.2. TANIM: (ALT ÖRTÜ)

$\{U_i\}_{i \in I}$, X in açık bir örtüsü olsun.

$\{V_j \mid j \in J\} \subset \{U_i \mid i \in I\}$ şartını gerçekleyen

$\{V_j \mid j \in J\} \subset \{U_i \mid i \in I\}$ ailesi de X in bir açık örtüsü ise,

$\{U_i \mid i \in I\}$ ailesinin açık alt örtüsü denir.

B.3 TANIM : (LİNDELÖF UZAYI)

(X, τ) topolojik uzayında, eğer X in her açık örtüsünün sayılabilir açık alt örtüsü var ise bu topolojik uzaya Lindelöf Uzayı denir.

B.4. TANIM : ([C₁] UZAYLARI, 1. SAYILABİLİRLİK AKSİYOMU)

(X, τ) topolojik bir uzay olsun. $x \in X$ için N_x , τ nun bir komşuluk sistemini gösterebilir.

Eğer $\forall x \in X$ için N_x sayılabilir ise uzayına 1. sayılabilir uzay ($[C_1]$) denir.

B.5. TANIM : ([C₂] 2. SAYILABİLİR UZAY)

(X, τ) topolojik bir uzay olsun. Sayılabilir bir baza sahip ise (X, τ) uzayına 2. sayılabilir uzay ($[C_2]$) denir..

B.6. TANIM : (AYRILABİLİRLİK)

(X, τ) topolojik bir uzay olsun. Eğer X in sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa ayrılabilir.

Açıkça görülüyor ki her $[C_2]$, bir $[C_1]$ uzayıdır, ayrılabilir uzaydır ve Lindelöf uzayıdır.

Örnek

\mathbb{R} , reel sayılar kümesi tabii topolojisi ile verilsin. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $N_x = \{ N(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$ alalım. N_x, τ nun açık komşuluklar sistemidir. Bununla birlikte N_x sayılabilir ve dolayısıyla $\mathbb{R}, [C_1]$ dir. \mathbb{Q} , rasyonel sayılar kümesi, \mathbb{R} nin sayılabilir yoğun alt kümesi olduğundan \mathbb{R} aynı zamanda ayrılabilirdir.

B.7. TEOREM:

Her Hausdorff uzayı Lindelöf uzayıdır.

İspat:

(X, τ) bir Hausdorff uzayının \mathcal{B} sayılabilir bir bazı ve X in herhangi bir açık örtüsü olsun. $\forall G \in \mathcal{G}$ ve $\forall x \in G$ için $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset G$ sağlanır.

$\mathcal{B}^* = \{ B \mid x \in G, G \in \mathcal{G} \}$ olarak tanımlanırsa $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ olduğundan \mathcal{B}^* da sayılabilir. $\mathcal{B}^* = \{ B_{x_1, G_1}, B_{x_2, G_2}, \dots \}$ ise $\{ G_1, G_2, \dots \}, \mathcal{G}$ nin sayılabilir bir alt örtüsüdür. Çünkü her hangi bir $x \in X$ için \mathcal{G} bir örtü olduğundan $x \in G$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{G}$ vardır.

O halde $\exists B_{x, G} \in \mathcal{B} : x \in B_{x, G} \subset G \Rightarrow x \in G$ elde edilir.

B.8. TEOREM:

Her $[C_2]$ uzayı bir Lindelöf uzayıdır.

İspat:

\mathcal{G}, X in bir açık örtüsü ve $\mathcal{B} = \{ B_1, B_2, \dots \}, X$ in sayılabilir bir bazı olsun. $\forall p \in X, \exists B \in \mathcal{B} : B \subset G$ ve bazı $B_j \in \mathcal{B}$ ler vardır. Öyleki $p \in B_j \subset G$ olur.

$C = \{ B \in \mathcal{B} : p \in B \subset G, G \in \mathcal{G} \}$

C ailesi sayılabilirdir. $C = \{ B_{r1}, B_{r2}, \dots, B_{rk}, \dots \}$ diyelim. $\forall k$ için $\mathcal{G}_{rk} = \{ G \in \mathcal{G} : B_{rk} \subset G \}$ olsun. C nin seçiminden dolayı $\mathcal{G}_{rk} \neq \emptyset$ dir. $\forall k$ için bir $G_{rk} \in \mathcal{G}_{rk}$ alalım. O halde $\{ G_{r1}, G_{r2}, \dots, G_{rk}, \dots \}$ \mathcal{G} den çıkarılan sayılabilir alt ailedir.

Daha önce gördüğümüz gibi, $\forall p \in X$ bir $G \in \mathcal{G}$ için ve bazı k lar vardır öyle ki $p \in B_{rk} \subset G$ olur.

Açıkça görüyoruz ki $p \in G_{rk}$. Sonuç olarak $\{ G_{r1}, G_{r2}, \dots \}$ \mathcal{G} den çıkarılan X in sayılabilir bir alt örtüsüdür.

B.9. TEOREM: (HEİNE -BOREL TEOREMİ)

$A=[c,d]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olsun ve $\mathcal{G}=\{ G_i : i \in I \}$ A kümesini örten bir açık aralıklar ailesi olsun : $A \subset \cup G_i$. O zaman \mathcal{G} ailesi öyle bir alt sınıfa sahiptir ki $\{ G_{r1}, G_{r2}...G_{rm} \}$ tane sonlu açık aralıklar A yı örter, ve $A \subset G_{r1} \cup G_{r2} \cup \dots \cup G_{rm}$ olur. Her iki kapalı ve sınırlı olma şartı teorem için gerçekleşmelidir. Bunların yalnızca birinin gerçekleşmesi halinde teorem doğru olmaz. Bunu birer örnekle hemen görebiliriz:

Örnek 1.

Sınırlı fakat kapalı olmayan bir aralık, diyelim ki $A=(0,1)$ aralığını alalım. A yı örten $\mathcal{G} = \{ G_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \}$ açık aralıklar ailesini alalım. A yı örten \mathcal{G} nin sonlu olan bir alt sınıfını asla bulamayız.

Örnek 2.

Şimdi de kapalı fakat sınırlı olmayan $A=[1,\infty)$ aralığını gözönüne alalım.

$\mathcal{G} = \{(0,2) (1,3) (2,4) \dots\}$ A yı örten açık aralıklar sınıfı olsun. Bu örnekte de \mathcal{G} nin A aralığını örten sonlu bir alt sınıfını bulamayız.

İspat :

$I_1 = [c_1,d_1]$ aralığı $\mathcal{G} = \{(a_i,b_i) : i \in I\}$ açık aralıklar ailesi ile örtülsün. Göstereceğiz ki \mathcal{G} örtü ailesinin I_1 aralığını örten sonlu açık aralıklardan biri alt aileye sahiptir. Bunun mümkün olmadığını düşünelim yani kapalı ve sınırlı aralığımız ancak sonsuz açık aralıklardan meydana gelmiş bir küme ile örtülsün. Aralığımızı iki eşit kapalı aralığa bölelim:

$$[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}], [\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]$$

Varsayımımızdan dolayı bu aralıklardan en azından biri sonsuz sayıda açık alt aralık ile örtülür. Bu aralığa $I_2=[c_2,d_2]$ diyelim ve I_2 aralığını da bir önceki gibi iki eşit kapalı aralığa bölelim:

$$[c_2, \frac{c_2+d_2}{2}], [\frac{c_2+d_2}{2}, d_2]$$

Yine varsayımımızdan en azından biri sonsuz açık aralıklarla örtülecektir. Bu alt aralığa I_3 diyelim. Böyle devam ederek kapalı içiçe geçmiş aralıklar dizisi elde ederiz:

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

Öyle ki her bir I_n aralığı \mathcal{G} ailesinin sonlu elemanları ile örtülemez. Limitin $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ ve içiçe geçmiş aralıklar prensibinden dolayı $p \in \{ I_n \}$ dir. O zaman bir (a_{i_0}, b_{i_0}) aralığı bulabiliriz ki $p \in (a_{i_0}, b_{i_0})$ olur.

O halde öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz öyle ki $I_{n_0} \subset (p - \epsilon, p + \epsilon)$ yani $I_{n_0} \subset (a_{i_0}, b_{i_0})$ buluruz. Bu durumda da varsayımımızla çelişki yaratır. O halde teoremimiz doğrudur.

BÖLÜM 2:

KOMPAKT UZAYLAR ve ÖZDEŞ TANIMLARI

1.KOMPAKT UZAYLAR:

1.1.TANIM (KOMPAKT UZAY)

$X \neq \emptyset$ olmak üzere (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu topolojik uzaya kompakttır denir.

Örnek 1:

$X = \mathbb{R}$, $\tau = \{ X, \emptyset, (-\infty, 0), [0, +\infty) \}$ topolojisine sahip olsun. τ sonlu olduğundan (X, τ) kompakttır.

Örnek 2:

τ, X üzerinde kurulan sonlu tümleyenler topolojisi olmak üzere (X, τ) kompakttır.

İspat:

$\mathcal{G} = \{G_i\}$, X in açık bir örtüsü olsun. Bir $G_0 \in \mathcal{G}$ seçelim. τ , sonlu tümleyenler topolojisi olduğundan $G_0^c = \{x_1, \dots, x_m\}$ sonludur. \mathcal{G}, X in bir örtüsü olduğundan her $x_k \in G_0^c$ için bir $G_{i_k} \in \mathcal{G}$ vardır: $x_k \in G_{i_k}$ olur. G_0^c kümesi G_{i_1}, \dots, G_{i_m} lerin birleşimi ile örtülebilir. Dolayısıyla $X = G_0 \cup G_0^c = G_0 \cup G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$ olur ki bu da (X, τ) kompakttır demektir.

Örnek:

Reel çizgi \mathbb{R} kompakttır değildir.

İspat:

Reel çizgiyi üzerinde kurulan tabii topolojiye göre düşünelim. $(-n, n)$ açık aralıkları $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere açık bir örtüsü olsun. Bu açık örtü \mathbb{R} yi kapatacak sonlu alt örtüye sahip değildir.

1.2.TANIM: (Kompakt Küme)

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer (A, τ_A) alt uzayı kompakttır ise A kümesine bu topolojik uzayda kompakttır denir.

Örnek: $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ nin sonlu bir alt kümesi olsun. X , üzerinde tanımlanabilen tüm τ topolojilerine göre kompakttır. Yani bu kümenin her açık örtüsü en fazla k elemanlı açık alt örtü içerir Dolayısıyla sonlu küme kompakttır.

1.3.TEOREM:

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kompakttır $\Leftrightarrow A$ nın (X, τ) daki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır.

İspat:

(\Rightarrow) : \wedge , numaralayan küme olsun.

$A \subset X$ kompakt yani (A, τ_A) kompakttır ve $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \wedge\}$, A nın (X, τ) daki herhangi bir açık örtüsü olsun. Buradan

$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \Rightarrow A = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap G_\alpha)$ yazılabilir.

$\forall \alpha \in \wedge$ için $G_\alpha \in \tau$ olduğundan $\mathcal{G}^* = (A \cap G_\alpha)_{\alpha \in \wedge}$ A nın (A, τ_A) daki bir açık örtüsüdür. A kompakt olduğundan sonlu sayıda $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ indisleri vardır öyle ki

$$A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap G_{\alpha_i}) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \text{ olur.}$$

O halde $\{G_{\alpha_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$, \mathcal{G} nin sonlu bir alt örtüsüdür.

(\Leftarrow) : A nın (X, τ) daki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü bulunsun. (A, τ_A) nın kompakt olduğunu göstereceğiz. Bunun için $H = \{H_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ ailesi A nın alt uzayda her hangi bir açık örtüsü, yani $\forall \alpha \in \wedge$ için $H_\alpha \in \tau_A$ ve $A = \bigcup_{\alpha \in \wedge} H_\alpha$ olsun. Buradan da $\forall \alpha \in \wedge$ için $H_\alpha = A \cap G_\alpha$ olacak şekilde bir $G_\alpha \in \tau$ vardır. O halde $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ A nın üst uzayda bir açık örtüsüdür. Hipoteze göre buradan sonlu sayıda $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ indisleri vardır, öyle ki

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap G_{\alpha_i}) \Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^n H_{\alpha_i}$$

elde edilir. O halde (A, τ_A) kompakttır.

1.3.1.Not:

Bu teorem bir kümenin bir topolojik uzayda kompakt olduğunu göstermek için o kümenin uzaydaki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü bulunduğunu göstermenin yeterli olacağını göstermektedir.

1.4.TANIM: (SONLU ARAKESİT ÖZELLİĞİ)

Arakesitleri boş kümeden farklı $\{A_i\}$ ailesinin her sonlu alt ailesi $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$ boş kümeden farklı arakesite sahip ise yani $\bigcap_{k=1}^m A_{i_k} \neq \emptyset$ oluyorsa $\{A_i\}$ ailesine sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

Örnek1: $\{(0, 1/n) : n = 1, 2, \dots\}$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir. $(0, a_1), (0, a_2), \dots, (0, a_m)$ sonlu sayıda açık aralıklar düşünelim. $b > 0$

olmak üzere $b = \min(a_1, \dots, a_m)$ seçersek bu sonlu tane açık aralıkların kesişimi boş kümeden farklı olur, yani $\bigcap_{k=1}^m (0, a_k) = (0, b)$ dir. Sonsuz sayıdaki kesişimleri ise boştur.

Örnek 2:

\mathbb{R} , tabii topolojisi ile düşünelim. $F = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}^+\}$ kapalı kümeler ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir.

1.5.TEOREM:

Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (X, τ) kompakttır.

(b) X in $\{F_i\}$ kapalı kümeler ailesi için, $\bigcap_i F_i = \emptyset \Rightarrow \{F_i\}$ ailesi $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_m}\}$ sonlu alt ailesine sahiptir: $\bigcap_{k=1}^m F_{i_k} = \emptyset$

İspat :

(a \Rightarrow b) $\bigcap_i F_i = \emptyset$ olsun. De Morgan kurallarını kullanarak

$$X = \emptyset^c = (\bigcap_i F_i)^c = \bigcup_i F_i^c$$

$\forall F_i$ kapalı olduğundan $\{F_i^c\}$, X in açık bir örtüsüdür. Hipotezden dolayı, X kompakttır,

$$\exists F_{i_1}^c, \dots, F_{i_m}^c \in \{F_i^c\} : X = F_{i_1}^c \cup \dots \cup F_{i_m}^c$$

De Morgan kurallarını kullanarak

$$\emptyset = X^c = (F_{i_1}^c \cup \dots \cup F_{i_m}^c)^c = F_{i_1}^{cc} \cap \dots \cap F_{i_m}^{cc} = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} \quad \text{yazarız. Yani}$$

$$\bigcap_{k=1}^m F_{i_k} = \emptyset \quad \text{olur.}$$

(b \Rightarrow a): $\{G_i\}$, X in açık bir örtüsü olsun, yani $X = \bigcup_i G_i$ De Morgan kurallarını kullanarak, $\emptyset = X^c = (\bigcup_i G_i)^c = \bigcap_i G_i^c$ elde ederiz.

$\forall G_i$ açık olduğundan, $\{G_i^c\}$ kapalı kümeler ailesidir ve yukarıda elde ettiğimiz bağıntıdan dolayı da arakesitleri boştur. Hipotezden dolayı,

$$\exists G_{i_1}^c, \dots, G_{i_m}^c \in \{G_i^c\} : G_{i_1}^c \cap \dots \cap G_{i_m}^c = \emptyset \quad \text{dır.}$$

De Morgan kurallarını kullanarak,

$$X = \emptyset^c = (G_{i_1}^c \cap \dots \cap G_{i_m}^c)^c = G_{i_1}^{cc} \cup \dots \cup G_{i_m}^{cc} = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

olur.

X in sonlu sayıda açık kümelerin birleşimi ile örtebildiğimizden dolayı da X kompakt olur.

1.6. TEOREM:

(X, τ) topolojik uzayı kompakttır ancak ve ancak sonlu arakesit özelliğine sahip X in her $\{F_i\}$ kapalı kümeler ailesinin arakesiti boş kümeden farklı ise.

İspat :

$\{F_i\}$, X in kapalı kümeler ailesi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir , çünkü bu önermeler karşıt pozitifler:

$$(a) \quad F_{i1} \cap \dots \cap F_{im} \neq \emptyset \quad \forall i=1, \dots, m \Rightarrow \bigcap_i F_i \neq \emptyset$$

$$(b) \quad \bigcap_i F_i = \emptyset \Rightarrow \exists i=1, \dots, m : F_{i1} \cap \dots \cap F_{im} = \emptyset \quad \text{olur.}$$

1.7. TEOREM:

Bir (X, τ) topolojik uzayı kompakttır $\Leftrightarrow \forall x \in X$ için bir $x \in N_x$ komşuluğu ise $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ sonlu noktası vardır: $X = \bigcup_{i=1}^n N_{x_i}$ dir.

İspat:

(\Rightarrow) : (X, τ) topolojik uzayı kompakt olsun. $\forall x \in X$ için $\exists N_x : x \in N_x$ komşuluğu alalım: $\exists U_x \in \tau : x \in U_x \subset N_x$ dir ve dolayısıyla $\{U_x\}_{x \in X}$ ailesi X in bir açık örtüsüdür. X kompakt olduğundan bir $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$ açık kümeler ailesi X i örter. Fakat $\forall i \in I$ için $U_{x_i} \subset N_{x_i}$ olduğundan $N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_n}$ X i örter.

(\Leftarrow) : Tersine $\forall x \in X$ için $\exists N_x : x \in N_x$ komşuluğu olsun ve sonlu $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ noktaları için $X = \bigcup_{i=1}^n N_{x_i}$ olsun. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, X in bir açık örtüsü olsun. O zaman $\forall x \in X$ için $\exists \alpha = \alpha(x) : x \in U_\alpha$ ve bu nedenle $N_x = U_\alpha$ alabiliriz. Hipotezimizden $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ noktalar vardır: $N_{x_i} = U_{\alpha(x_i)}$, $(i=1, 2, \dots, n)$ açık kümeleri X i örter. O halde X kompakt olur.

1.8. TEOREM:

$\mathcal{B}, (X, \tau)$ uzayının bir bazı olsun. \mathcal{B} nin elemanları ile oluşturulan X in her $\{B_i \in \mathcal{B} : i \in I\}$ örtüsü sonlu alt örtüye sahip ise (X, τ) kompakttır.

İspat:

(\Rightarrow) : X kompakt ve \mathcal{B} baz olsun. Eğer $\{B_i \in \mathcal{B} : i \in I\}$, X in herhangi bir örtüsü ise X in açık bir örtüsüdür. X kompakt olduğundan sonlu bir alt örtüye sahiptir.

\Leftarrow : \mathcal{B} nin elemanları ile oluşturulan X in her örtüsünün sonlu bir alt örtüye sahip olduğunu kabul edelim. X in kompakt olduğunu

göstereceğiz. $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$, X in her hangi bir açık örtüsü olsun. \mathcal{B} , X üzerinde kurulan topolojinin bir bazı olduğu için her $\alpha \in J$ için $U_\alpha = \bigcup_{i \in I} B_i$ olur ve buradan $X \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right)$ yazılabilir.

$\{B_i : i \in I\}$, \mathcal{B} nin elemanları ile oluşturulmuş X in bir örtüsüdür. Hipotezden dolayı, bu örtünün X için sonlu bir alt örtüsü vardır: $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_n}$

B_{i_k} , $k=1, \dots, n$ baz elemanı olduğu için $B_{i_k} \subset U_{\alpha_k}$, $\forall k=1, 2, \dots, n$ olacak şekilde $U_{\alpha_k} \in \{U_\alpha : \alpha \in J\}$, $\alpha_k \in J$ vardır. Öyleyse $X \subset \bigcup_{k=1}^n B_{i_k} \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$ olur.

Böylece $\{U_{\alpha_k} : k = \{1, 2, \dots, n\}\}$ ailesi $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ ailesinin sonlu bir alt örtüsüdür. Bu takdirde X kompakttır.

1.9. TEOREM:

Kompakt bir uzayın her kapalı alt kümesi kompakttır.

İSPAT:

(X, τ) topolojik bir uzay $F \subset X$ kapalı bir alt kümesi olsun. F kapalı olduğundan $X \setminus F$ açık bir alt kümedir. X in alt kümelerinin ailesi $\{G_i\}_{i \in I}$ F kümesinin bir açık örtüsü olsun. $(X \setminus F) \cup \{G_i : i \in I\}$ ailesinde X kümesinin bir açık örtüsüdür. X kompakt olduğundan $(X \setminus F)$ ile birlikte sonlu sayıda $\{G_i\}_{i \in I}$, X i örter yani, $X = (X \setminus F) \cup G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$ olur. O halde G_{i_1}, \dots, G_{i_n} sonlu aileleri de F i örter. Bu nedenle F kompakttır.

1.9.1. NOT:

Kompakt bir uzayın her alt kümesinin kompakt olması gerekmez. Bunu bir örnekle görelim: $[0, 1]$ kapalı birim aralığı, Heine-Borel teoreminden dolayı kompakttır. $(0, 1) \subset [0, 1]$ alalım. $(0, 1)$ açık aralığı üzerinde kurulu tabii topoloji ile kompakt değildir.

İspat:

$\mathcal{G} = \{G_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^+\}$ sınıfı $(0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ olduğundan, $(0, 1)$ için açık bir örtüsü olur. $(0, 1)$ açık aralığının kompakt olması için \mathcal{G} ailesinin sonlu bir alt örtüye sahip olması gerekir

$\mathcal{G}^* = \{(a_i, b_i), i=1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere \mathcal{G} nin son bir alt sınıfı olsun. Eğer $\varepsilon = \min(a_1, \dots, a_m)$ $\varepsilon > 0$ seçersek $(a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_m, b_m) \subset (\varepsilon, 1)$ olur. Bununla birlikte $(0, \varepsilon] \cap (\varepsilon, 1) = \emptyset$ olduğundan \mathcal{G}^* , $(0, 1)$ açık aralığının sonlu alt örtüsü olamaz.

1.10. TEOREM:

Bir X kümesi üzerinde τ ve τ^* gibi iki topoloji verilsin. τ^* , τ topolojisinden ince ve (X, τ^*) kompakt olsun. Öyleyse, (X, τ) uzayı da kompaktır.

İspat:

$\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$ X kümesinin τ topolojisine göre bir açık örtüsü olsun. τ^* , τ dan ince olduğundan $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$ açık kümeler ailesi τ^* topolojisine göre de X kümesinin bir açık örtüsüdür. (X, τ^*) topolojik uzayı kompakt olduğundan \mathcal{G} ailesinin sonlu tanesi X kümesini örter. Yine aynı açık kümeler τ topolojisine göre de açık olduğundan (X, τ) topolojik uzayı da kompakt olur.

1.11. TEOREM:

(X, τ) kompakt uzay olsun. X in her sonsuz alt kümesinin X de en az bir yığılma noktası vardır.

İspat:

$K \subset X$ sonsuz alt küme olsun. K nın hiç bir limit noktası olmadığını kabul edelim. O zaman $\forall x \in K$ için x in N_x komşuluğu vardır. Öyle ki $N_x \cap K = \{x\}$ olur. K kümesi kapalıdır ve dolayısıyla kompaktır. x_1, x_2, \dots, x_m noktaları vardır öyle ki N_{x_1}, \dots, N_{x_m} K yı örter. Buradan da $K = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ yazarız ve K sonlu olur. Bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için K nın "hiç limit noktası" yoktur varsayımından vazgeçmemiz gerekir.

BÖLÜM 3

DİZİSEL KOMPAKT UZAYLAR; SAYILABİLİR KOMPAKT UZAYLAR; METRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK, SAYILABİLİR KOMPAKTLIK VE DİZİSEL KOMPAKTLIK KAVRAMLARININ İLİŞKİSİ

1. DİZİSEL KOMPAKT UZAYLAR

1. 1. TANIM : (DİZİSEL KOMPAKT UZAY)

Bir topolojik uzaydaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa bu uzaya dizisel kompakt uzay denir.

1. 2. TANIM : (DİZİSEL KOMPAKT KÜME)

Bir topolojik uzayının A alt kümesindeki her dizi A nın bir noktasına yakınsayan bir alt diziye sahipse A ya dizisel kompakt küme denir.

Örnek : Bir topolojik uzayın her sonlu A alt kümesi dizisel kompakttır. Gerçekten bir $\langle a_n \rangle := (a_1 , a_2 , \dots)$, $a_n \in A$ dizisinde, elemanlarından en az biri, örneğin $a_k \in A$ sonsuz defa tekrarlanacaktır. O halde (a_k , a_k , \dots) dizisi, $\langle a_n \rangle$ dizisinin bir alt dizisidir ve $a_k \in A$ noktasına yakınsar.

2. 1. TANIM : (SAYILABİLİR KOMPAKT UZAY)

Bir topolojik uzayın her sayılabilir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu topolojik uzaya sayılabilir kompakt uzay denir. Kompakt uzay, sayılabilir kompakt uzay ve Lindelöf uzay tanımlarını karşılaştırdığımızda

(X , τ) kompakt $\Leftrightarrow (X , \tau)$ sayılabilir kompakt ve Lindelöf bağıntısını yazabiliriz.

2. 2. TEOREM :

(X , τ) bir Hausdorff uzayı olsun. Öyleyse aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) (X , τ) kompakttır.
- (ii) (X , τ) sayılabilir kompakttır.

İspat :

(i) \Rightarrow (ii) açıktır. Eğer (X, τ) kompakt ise sayılabilir kompakttır.

(ii) \Rightarrow (i) : sayılabilir kompakt ve Hausdorff bir uzay Lindelöf bir uzay olduğundan (X, τ) sayılabilir kompakt ve Lindelöf uzayıdır ve dolayısıyla kompakttır.

2. 3. TEOREM :

Bir (X, τ) topolojik uzayı [C2] ikinci sayılabilirlik aksiyomunu gerçeklesin aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (X, τ) kompakttır.

(ii) (X, τ) sayılabilir kompakttır.

İspat :

(i) \Rightarrow (ii) açıktır.

(ii) \Rightarrow (i) : (X, τ) , [C2] aksiyomunu gerçeklediğinden Bölüm 1 de verilen , Teorem 4.B.9 dan dolayı bir Lindelöf uzayıdır. O halde (X, τ) kompakttır.

2. 4. TEOREM

(X, τ) sayılabilir kompakttır $\Leftrightarrow X$ deki $\forall \langle x_n \rangle$ dizisinin (X, τ) de en az bir yığılma noktası vardır.

İspat :

(\Rightarrow) : (X, τ) nun sayılabilir kompakt olmadığını varsayalım. O zaman X in $\{ G_1, G_2, \dots \}$ sayılabilir açık bir örtüsü vardır ki bundan sonlu bir alt örtü çıkaramayız. $G_1 = V_1$ diyelim ve $x_1 \in V_1$ olsun. Eğer $n > 1$ ise V_n ile G_1, G_2, \dots kümelerinin $\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$ toplamı tarafından kapsanmayan kümeyi gösterelim. $x_n \in (V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i)$ deki bir eleman olsun. Eğer $x \in X$ ise öyle bir pozitif N sayısı vardır ki $x \in V_N$ olur. $V_N \cap \{ x_{N+1}, x_{N+2}, \dots \} = \emptyset$ olduğundan $x, \langle x_n \rangle$ dizisinin yığılma noktası olamaz. Böylece $\langle x_n \rangle$ dizisinin X içinde bir yığılma noktası yoktur.

(\Leftarrow) : $\langle x_n \rangle$, (X, τ) uzayında yığılma noktası olmayan bir dizi olduğunu varsayalım. O zaman $\forall x \in X$ için $\exists G_x \in \tau$ ve $\exists M > 0$ tamsayısı vardır. öyle ki $x \in G_x$ ve $G_x \cap \{ x_{M+1}, x_{M+2}, \dots \} =$

\emptyset dir. Şimdi $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{ \cup G_x : \{ X_{M+1}, X_{M+2}, \dots \} \notin G_x \}$. O zaman $\{ U_1, U_2, \dots \}$, (X, τ) nın sayılabilir bir örtüsü olur ve bu örtüden (X, τ) için sonlu bir alt örtü çıkarılamaz.

2. 5. TEOREM :

(X, τ) Dizisel kompakt $\Rightarrow (X, \tau)$ sayılabilir kompaktır.

İspat :

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$, A sonsuz bir alt küme olsun. Bu taktirde A kümesinin farklı elemanlarından oluşan $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ dizisi vardır. (X, τ) dizisel kompakt olduğuna göre, bu dizinin $x \in X$ noktasına yakınsayan ve yine farklı elemanlarından oluşan $\langle a_{i1}, a_{i2}, \dots \rangle$ gibi bir alt dizisi vardır. Dizilerde yakınsaklık tanımı gereğince x noktasının her açık komşuluğu $\langle a_{in} \rangle$ dizisinin ve dolayısı ile A kümesinin sonsuz sayıda elemanını içerir, yani x noktası A nın bir yığılma noktasıdır. O halde (X, τ) uzayı sayılabilir kompakt bir uzaydır.

Yukarıdaki gerektirmenin ters yönde de işleyebilmesi için sayılabilir kompakt uzayın aynı zamanda birinci sayılabilir uzay olması gerekir:

2. 6. TEOREM :

Bir (X, τ) hem birinci sayılabilir hem de sayılabilir kompakt ise (X, τ) dizisel kompaktır.

İspat :

(X, τ) uzayındaki herhangi bir dizi $\langle x_n \rangle$ olsun. Bu dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu göstereceğiz. (X, τ) uzayı sayılabilir kompakt olduğu için, bu dizinin (sonsuz kümenin) x_0 gibi bir yığılma noktası vardır. (X, τ) uzayı birinci sayılabilir uzay olduğundan x_0 noktasının $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ şeklinde açık kümelerden oluşan bir $\{ B_n \}$, $n \in \mathbb{N}$ komşuluk bazı vardır. x_0 noktası $\langle x_n \rangle$ dizisinin yığılma noktası olduğuna göre $\forall p \in \mathbb{N}$ için B_p kümesine ait olan bir $x_{np} \in \langle x_n \rangle$ elemanı alabiliriz. Elde ettiğimiz $\langle x_{n1}, x_{n2}, \dots \rangle$ dizisi $\langle x_n \rangle$ dizisinin bir alt dizisidir ve x_0 noktasına yakınsar. Çünkü $\forall U \in \mathcal{N}(x_0)$ için $B_k \subset U$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır ve dolayısıyla $\langle x_{np} \rangle$ dizisinin n_k .cı teriminden sonraki tüm elemanları U komşuluğu içindedir; ispat tamamlanmış olur.

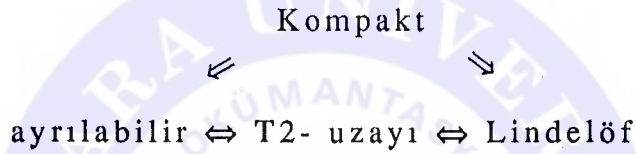
O halde şöyle söyleyebiliriz : (X , τ) birinci sayılabilir uzay ise aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) Sayılabilir kompakt
- (ii) Dizisel kompakt

2. 7. SONUC TEOREM :

Eğer (X, τ) uzayı hem $[C_2]$ dolayısıyla Lindelöf uzayı, hem de sayılabilir kompakt ise kompakt uzaydır.

İspat : (X, τ) topolojik uzayı bir $[C_2]$ uzayı ve $A \subset X$ ise, A nın her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır ve sayılabilir kompaktlığın tanımından hemen görüyoruz ki Lindelöf uzayı sayılabilir kompakt ise kompakt olur.



Buraya kadar elde ettiğimiz bilgilerden aşağıdaki bağıntıları görebiliriz:

Dizisel kompaktlık \Rightarrow sayılabilir kompaktlık \Leftarrow kompaktlık

Eğer topolojik uzayımız herhangi bir topolojik uzay değil de bir metrik uzay olursa yukardaki gerektirmelerin ters yönde de işleyeceğini görelim:

3. METRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK, SAYILABİLİR KOMPAKTLIK VE DİZİSEL KOMPAKTLIK

3. 1. TANIM : (BİR KÜMENİN ÇAPI)

(X , d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ alt kümesi alalım.

A kümesinin çapı :

$\delta(A) = \sup \{ d(x,y) \mid x,y \in A \}$ ile tanımlanır.

3.2. TANIM : (LEBESGUE SAYISI)

Bir (X , d) metrik uzayının bir örtüsü $\mathcal{G} = \{ G_i \}_{i \in I}$ olsun.

Eğer çapı $\delta > 0$ reel sayısından küçük olan X in her alt kümesi \mathcal{G} nin kümelerinden biri tarafından kapsanıyor ise, $\delta > 0$ sayısına bu örtü için Lebesgue sayısı denir.

3. 3. TEOREM :

(X, d) metrik uzayı dizisel kompakt ise, (X, d) uzayının \mathcal{G} açık örtüsü bir δ Lebesgue sayısına sahiptir.

İspat :

\mathcal{G} açık örtüsünün böyle bir $\delta > 0$ Lebesgue sayısı olmadığını varsayalım. Yani $\forall \delta > 0$ sayısı için (X, d) uzayının δ dan küçük olan bir alt kümesi \mathcal{G} nin hiçbir kümesi tarafından kapsanmasın. Özel olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için (X, d) uzayının çapı $\delta = (1/n)$ den küçük olan \mathcal{G} nin hiçbir kümesi tarafından kapsanmayan A_n kümesini seçelim $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ seçerek bir $\langle x_n \rangle$ dizisi oluşturalım. Bu dizinin hiçbir yakınsak alt diziyeye sahip olmadığını göstereceğiz. Diyelimki bu dizi bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir $\langle x_{n_i} \rangle$ alt dizisine sahip olsun. (X, d) uzayının bir açık örtüsü \mathcal{G} olduğuna göre en az bir $\exists G \in \mathcal{G} : x \in G$ dir ve G açık olduğundan $S(x, \epsilon) \subset G$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır

$$d(x_{n_i}, x) < \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \text{ ve } \left(\frac{1}{n_i}\right) < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

olacak şekilde i yi yeteri kadar büyük seçelim. O zaman

$A_{n_i} = \{ x_{n_i} \}$, $(1/n_i) < (\epsilon/2)$ kümesi x_{n_i} noktasının $(1/n_i)$ komşuluğu içindedir, yani $\delta(A_{n_i}) < (1/n_i) < (\epsilon/2)$ dir.

Diğer taraftan, $d(x, A_{n_i}) \leq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, A_{n_i}) < (\epsilon/2) + (\epsilon/2) = \epsilon$ elde edilir ki bu da $A_{n_i} \subset S(x, \epsilon) \subset G$ olduğunu gösterir. Bu ise A_n kümelerinin seçilişi ile çelişkilidir. O halde \mathcal{G} açık örtüsünün bir Lebesgue sayısı vardır.

3. 4. TEOREM :

(X, d) metrik uzay olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler denktir:

- (i) (X, d) kompakttır.
- (ii) (X, d) sayılabilir kompakttır.
- (iii) (X, d) dizisel kompakttır.

Ispat :

(i) \Rightarrow (ii) : Bölüm 3 de verilen Teorem 2. 2. den dolayı kompakt uzay \Rightarrow sayılabilir kompakt olduğunu biliyoruz.

(ii) \Rightarrow (i) : Her metrik uzay birinci sayılabilir uzay olduğu için Bölüm 3 de verilen Teorem 2. 6. dan dolayı dizisel kompakttır.

(iii) \Rightarrow (i) : $\forall \epsilon > 0$ için (X , d) uzayının $S (x , \epsilon)$ şeklindeki açık kümeleriyle yapılan her açık örtüsünden sonlu bir alt örtü çıkarılabileceğini göstereceğiz. Belli bir $\epsilon > 0$ için (X , d) uzayının $S (x , \epsilon)$ açık küreleri ile oluşturulan örtüsünün sonlu bir alt örtüsü olmadığını varsayalım. (X , d) uzayındaki bir diziyi şöyle oluşturalım: Herhangi bir $x \in X$ seçelim. $S (x_1 , \epsilon)$ kümesi (X , d) uzayının tüm noktalarını içermez, aksi halde $X, S (x , \epsilon)$ kümesi ile örtülmüş olurdu. Şimdi bir $x_2 \in X \setminus S (x_1 , \epsilon)$ seçelim. $x \notin S (x_1 , \epsilon)$ olduğuna göre $d (x_2 , x_1) \geq \epsilon$ dir. Böyle seçime devam edelim. Genelde seçilmiş x_1, x_2, \dots, x_n noktaları için

$x_{n+1} \in (X \setminus S (x_1 , \epsilon) \cup S (x_2 , \epsilon) \dots \cup S (x_n , \epsilon))$ vardır, aksi halde (X , d) uzayının sonlu bir örtüsü $\cup S (x_i , \epsilon)$ olurdu. Bundan başka

$x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^n S (x_i , \epsilon)$ olduğundan $i = 1, 2, \dots, n$ için $d (x_{n+1} , x_i) \geq \epsilon$ dur. O halde $\langle x_n \rangle$ dizisi hiçbir yakınsak alt diziyeye sahip olamaz. Bu ise hipoteze aykırıdır. Öyleyse (X , d) metrik uzayı kompakttır.

3.5. TANIM : (BOLZANO - WEIERSTRASS ÖZELLİĞİ)

(X , d) Kompakt metrik uzayı olmak üzere $A \subset X$ sonsuz elemanlı her alt kümesinin limit noktası var ise metrik uzay Bolzano - Weierstrass özelliğine sahiptir denir.

3.6. TEOREM :

Her kompakt metrik uzay Bolzano - Weierstrass özelliğine sahiptir.

Ispat :

(X , d) kompakt metrik uzay ve $A \subset X$ sonsuz alt kümesi olsun. A nın limit noktası olmadığını kabul edelim. Kabulümüzden dolayı X in hiçbir noktası A nın limit noktası olamaz. Şu halde X in her bir noktası öyle açık kürelerin merkezi olurlar ki bu küreler merkezleri haricinde A nın hiçbir noktasını içermezler. Bu açık kürelerin oluşturduğu aile, X in açık bir örtüsüdür. Uzay kompakt olduğundan

X in açık örtüsü, X i örten sonlu alt örtüye sahiptir. A kümesi bu alt örtüye ait olan bütün kürelerinin merkezlerinin oluşturduğu kümenin içine düşer, yani A sonludur. Bu durum A nın sonsuz olduğu ile çelişir. Sonuç olarak A nın limit noktası olmalıdır.

3. 7. TEOREM :

Bir (X, d) metrik uzayı dizisel kompattır. $\Leftrightarrow (X, d)$ Bolzano - Weierstrass özelliğine sahiptir.

İspat

(\Rightarrow): (X, d) bir metrik uzay olsun. Varsayalım ki (X, d) dizisel kompakt olsun. $A \subset X$ de bir sonsuz elemanlı alt küme ise $\exists x \in X$ öyleki A nın limit noktası olduğunu göstermeliyim. A sonsuz elemanlı bir küme olduğundan A nın bir birinden farklı elemanlarında bir $\langle x_n \rangle$ dizisi oluşturabiliriz. Hipotezimizden bu dizinin bir x noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır. Bölüm 1 de verilen Teorem 3.12. den x noktası alt dizinin nokta kümesinin de bir limit noktasıdır. Ve bu küme A kümesinin bir alt kümesidir. O halde x , A kümesinin de bir limit noktasıdır.

(\Leftarrow): Tersine (X, d) uzayının her sonsuz elemanlı alt kümesinin bir limit noktası olsun. (X, d) nin dizisel kompakt olduğunu gösterelim. $\langle x_n \rangle$, X de herhangi bir dizi olsun. Eğer $\langle x_n \rangle$ dizisinde bir nokta sonsuz defa tekrarlanıyorsa, o zaman bu dizinin sabit bir noktadan oluşmuş bir alt dizisi vardır ve açıktır ki bu dizi yakınsaktır. Eğer dizinin hiçbir nokta sonsuz defa tekrarlanmıyorsa, dizinin A nokta kümesi sonsuz elemanlıdır. Hipotezden A kümesinin bir x limit noktası vardır ve $\langle x_n \rangle$ dizisinden x e yakınsayan bir alt dizi çıkarılabilir.

3. 8. TANIM :

a) (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer bir $F \subset X$ alt kümesi için $A \subset \bigcup_{x \in F} S(x, \varepsilon)$ sağlanıyorsa, bu F alt kümesine A nın bir ε - ağı adı verilir.

b) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için A nın bir ε - ağı varsa bu alt kümeye tam sınırlıdır (total sınırlıdır) denir.

3.9. TEOREM :

Her dizisel kompakt metrik uzay tam sınırlıdır.

İspat :

(X , d) dizisel kompakt metrik uzay ve $\epsilon > 0$ verilsin. $a_1 \in X$ de herhangi bir nokta ve $S(a_1, \epsilon)$ açık küre olsun. Eğer bu açık küre X in bütün noktalarını içine alırsa, o zaman bu $\{a_1\}$ tek elemanlı küme bir ϵ -ağı olur. $S(a_1, \epsilon)$ açık kürenin dışında noktalar varsa, bu noktalardan biri, diyelim a_2 ise $S(a_1, \epsilon) \cup S(a_2, \epsilon)$ bir küme oluşturur. Eğer bu toplam X in bütün noktalarını içine alıyorsa, o zaman iki elemanlı $\{a_1, a_2\}$ kümesi bir ϵ - ağı olur. Bu şekilde devam edersek sonlu bir $S(a_1, \epsilon) \cup S(a_2, \epsilon) \cup \dots \cup S(a_n, \epsilon)$ kümeler toplamı X in bütün noktalarını örtmek zorundadır. Aksi halde yani bu işlem sonsuza kadar devam edersek $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi bulunamaz. Bu ise varsayımımızla çelişir. Böylece $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ gibi sonlu bir küme X in ϵ - ağı olur. Yani (X, d) tam sınırlıdır.

3.10. TEOREM :

Her sayılabilir kompakt metrik uzay tam sınırlıdır.

İspat :

(X, d) sayılabilir kompakt bir metrik uzay olsun. X in tam sınırlı olmadığını kabul edelim. Kabulümüzden bir $\epsilon > 0$ için X in sonlu bir ϵ - ağı yoktur. Dolayısıyla herhangi bir $x_1 \in X$ için $\{a_1\}$ X in bir ϵ - ağı değildir. Buradan $\exists x_2 \in X : x_2 \notin S(a_1, \epsilon) \Rightarrow d(a_1, a_2) \geq \epsilon$ buluruz. Aynı nedenle $\{a_1, a_2\}$ kümesi de X in bir ϵ - ağı değildir. Gene $\exists a_3 \in X : a_3 \notin S(a_1, \epsilon) \cup S(a_2, \epsilon) \Rightarrow d(a_1, a_3) \geq \epsilon$ ve $d(a_2, a_3) \geq \epsilon$ Bu işleme devam edilerek n . adımda elde edilen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesinin X in bir ϵ - ağı olmadığını ve dolayısıyla $d(x_i, a_j) \geq \epsilon$ ($i \neq j$) sağladığını kabul edelim. Buradan aynı nedenle $n+1$ için de doğru olduğu görülür. Böylece tümevarımla farklı noktalarda oluşan ve $i \neq j$ için $d(a_i, a_j) \geq \epsilon$ koşulunu sağlayan bir $\langle a_n \rangle$ dizisi elde edilir. Uzayımız sayılabilir kompakt olduğundan $\langle a_n \rangle$ dizisinin bir a_0 gibi yığılma noktası vardır. O halde $S(a_0, \epsilon/2)$ açık küresi içinde $\langle a_n \rangle$ dizisinin sonsuz sayıda elemanı olması gerekir. Fakat bu olanaksızdır. Çünkü eğer $a_i, a_j \in S(a_0, \epsilon/2)$ ($i \neq j$) ise $d(a_i, a_j) \leq d(a_i, a_0) + d(a_0, a_j) < (\epsilon/2) + (\epsilon/2) = \epsilon$ olur. Bu ise $d(a_i, a_j) \geq \epsilon$ olması ile çelişir. O halde (X, d) tam sınırlıdır.

3. 11. TEOREM:

Her dizisel kompakt metrik uzay kompakttır.

İspat :

(X,d) bir dizisel kompakt metrik uzay ve $\{G_i\}$ bir açık örtü olsun. Bölüm 3 de verilen Teorem 3.3. den bu açık örtünün a gibi Lebesgue sayısı vardır. $\varepsilon = a/3$ diyelim ve Bölüm 3 de anlatılan Teorem 3.9. dan dolayı bir ε ağı $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ elde ederiz. Her $k = 1, 2, \dots, n$ için $d(S(a_k, \varepsilon)) \leq 2\varepsilon = 2\frac{a}{3} < a$. Lebesgue sayısının tanımından $\forall k$ için $\exists G_{i_k} : S(a_k, \varepsilon) \subseteq G_{i_k}$ bulabiliriz. X in her bir noktası $S(a_k, \varepsilon)$ kürelerinin birinin içinde olduğundan $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}\}$, $\{G_i\}$ örtüsünün sonlu bir alt örtüsüdür. O halde (X, d) kompakttır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bölüm 3 de verilen Teorem 3.6. ve Teorem 3.7. den şu sonucu çıkarabiliriz:

Bir (X,d) metrik uzayında aşağıdaki denktir:

- (i) (X,d) kompakttır.
- (ii) (X,d) Dizisel kompakttır.
- (iii) (X,d) Bolzano - Weierstrass özelliğine sahiptir.

BÖLÜM 4 :

KOMPAKT ALT UZAYLAR, AYIRIM AKSİYOMLARI,
KOMPAKT UZAYLAR VE SÜREKLİLİK. KOMPAKT UZAYLARIN
ÇARPIMI

1. KOMPAKT ALT UZAYLAR

1.1. TEOREM :

Kompakt topolojik uzayın her kapalı alt kümesi kompaktır.

İspat:

(X, τ) kompakt topolojik uzay ve $F \subset X$ kapalı alt kümesi olsun. F in kompakt olduğunu göstermek için Bölüm 2 de verilen Teorem 1.3. den dolayı F in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü bulunduğunu göstermek yeterlidir. F kapalı olduğundan X/F açık bir alt kümedir. X in alt kümelerinin ailesi $\mathcal{G} = (G_i)_{i \in I}$, F kümesinin bir açık örtüsü olsun. O halde $(X/F) \cup \{G_i : i \in I\}$ ailesi de X in bir açık örtüsüdür. (X, τ) kompakt olduğundan (X/F) ile birlikte sonlu tane G_{i_k} , X i örter, yani; $X = \bigcup_{i=1}^n G_{i_k} \cup (X/F)$ olur.

Buradan da $F = X \cap F = \bigcup_{i=1}^n (G_{i_k} \cap F) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{i_k}$ elde ederiz. Sonuç olarak $\{G_{i_1}, \dots, G_{i_n}\}$, \mathcal{G} nin bir alt kümeler ailesidir ve dolayısıyla F kompaktır.

1.2. SONUC TEOREM:

Sayılabilir kompakt bir uzayın her kapalı alt kümesi sayılabilir kompaktır.

1.3. SONUC TEOREM:

Bir Lindelöf uzayının her kapalı alt kümesi Lindelöf'dür.

2. KOMPAKT UZAYLAR VE AYIRIM AKSİYOMLARI

2.1. TEOREM:

Bir Hausdorff uzayında kompakt alt kümeler kapalıdır.

İspat:

(X, τ) bir Hausdorff uzayı ve $F \subset X$ kompakt bir alt küme olsun. X/F in açık olduğunu göstereceğiz. $x \in X/F$ herhangi bir nokta olsun. $\forall y \in F$ için $x \neq y$ ve (X, τ) Hausdorff uzayı olduğundan $x \in G_y$, $y \in H_y$ ve $G_y \cap H_y = \emptyset$ olacak şekilde G_y , H_y açık kümeleri vardır. Böylece elde edilen $\{H_y \mid y \in F\}$ ailesi F in bir açık örtüsüdür. F kompakt olduğundan bunun sonlu bir alt örtüsü vardır, yani $\exists y_1, \dots, y_n \in F: F \subset \bigcup_{i=1}^n H_{y_i}$ yazılır. Buradan $G = \bigcap_{i=1}^n G_{y_i}$ ve $H = \bigcup_{i=1}^n H_{y_i}$ olarak tanımlanırsa bu G ve H nin açık olup $G \cap H = \emptyset$ olduğu görülür. Çünkü $\forall y \in F$ için $G_y \cap H_y = \emptyset$ olduğundan $G_{y_i} \cap H_{y_i} = \emptyset$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ dir.

Buradan $x \in G \subset X/H \subset X/F$ elde edilir. Bu durumda $x, X/F$ in bir iç noktası olduğundan X/F açık olur ve dolayısı ile F kapalıdır.

2.2. TEOREM:

(X, τ) bir Hausdorff uzayı olsun. $F \subset X$ kompakt bir alt küme ve $x \in X/F$ olmak üzere

$F \subset V(F)$, $x \in U(x)$ ve $V(F) \cap U(x) = \emptyset$ olacak şekilde $V(F)$, $U(x)$ açık kümeleri vardır.

İspat :

$y \in F$ alalım. $x \notin F$ olduğundan $x \neq y$ dir. (X, τ) Hausdorff uzay olduğundan y ve x noktalarını içine alan $V(y)$ ve $U^y(x)$ ayrık açık komşulukları vardır. $\{V(y) : y \in F\}$ ailesi F in bir açık örtüsüdür. F kompakt olduğundan $\{V(y) : y \in F\}$ ailesinin sonlu alt ailesi $\{V(y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ vardır.

$V(F) = \cup \{V(y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ ve

$U(x) = \cap \{U^{y_i}(x) : i = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. $F \subseteq V(F)$ ve $x \in U(x)$ olup $V(F)$ ve $U(x)$ açık kümelerdir. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $V(y_i)$ ve $U^{y_i}(x)$ kümelerinin arakesiti boş olduğundan $V(F)$ ve $U(x)$ ayrık açık kümelerdir.

2.3.SONUC TEOREM:

Her kompakt Hausdorff uzayı regülerdir.

İspat :

(X, τ) kompakt Hausdorff uzayı ve $x \in X$ olsun. F , (X, τ) uzayının x noktasını içermeyen kapalı alt kümesi olsun. x noktasını ve F kapalı kümesini içine alan ayrık açık kümeler bulacağız. Biliyoruz ki Hausdorff uzayının her kapalı alt kümesi kompaktır, dolayısı ile F kompaktır. Bu takdirde Hausdorff uzayının bir kompakt alt kümesini ve buna ait olmayan bir nokta bulduk. Bölüm 4 de verilen Teorem 2.2. den dolayı F kümesini ve x noktasını içeren ayrık açık kümeler vardır. Dolayısıyla (X, τ) uzayı regülerdir.

2.4.TEOREM:

(X, τ) Hausdorff uzayı olsun. $F_1, F_2 \subset X$ kompakt alt kümeleri, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olmak üzere $F_1 \subset G, F_2 \subset H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G, H açık kümeleri vardır.

İspat :

(X, τ) Hausdorff uzayı olmak üzere F_1 ve F_2 X in kompakt alt

kümeleri ve $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olsun. $G \cap H = \emptyset$ olan G ve H gibi $F_1 \subset G$ ve $F_2 \subset H$ olacak şekilde açık kümeler bulacağız. $x \in F_1$ olsun. $Ay \in F_2$ için $x \in G_y$ ve $y \in H_y$ olacak şekilde G_y ve H_y ayrık açık kümeler vardır. $F_2 \subset X$ kompakt alt kümesi olduğundan, F_2 nin sonlu sayıda elemanı vardır öyle ki $F_2 \subset \cup \{ H_{y_i} : i = 1, 2, \dots, n \}$ olur.

$G = \cup \{ G_{x_i} : i = 1, 2, \dots, m \}$ ve $H = \cap \{ H_{x_i} : i = 1, 2, \dots, m \}$ olsun. Bu durumda G_x ve H_x , $x \in G_x$ ve $F_2 \subset H_x$ olacak şekilde ayrık açık kümelerdir. $\forall x \in F_1$ için G_x ve H_x yukarıdaki gibi oluşturulsun. $F_1 \subset X$ in kompakt bir alt kümesi olduğundan $F_1 \subset \cup \{ U_{x_i} : i = 1, 2, \dots, n \}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1, x_2, \dots, x_n \in F_1$ elemanı vardır.

$G_x = \cap \{ G_{y_i} : i = 1, 2, \dots, n \}$ ve $H_x = \cup \{ H_{y_i} : i = 1, 2, \dots, n \}$ olsun. Öyleyse $G, H \in T$ ve $G \cap H \neq \emptyset$ dir ve $F_1 \subset G$ ve $F_2 \subset H$ sağlanır.

2.5.SONUC TEOREM:

Her kompakt Hausdorff uzayı normaldir.

İspat:

(X, τ) kompakt Hausdorff uzayının kapalı ve ayrık alt kümeleri F_1 ve F_2 olsun. Bu uzayın normal olduğunu göstermek için $F_1 \subset G$, $F_2 \subset H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açık kümelerin varlığı göstereceğiz. Bölüm 4 de verilen Teorem 2.1. den dolayı F_1 ve F_2 kapalı kümeleri Hausdorff uzayının kompakt alt kümeleridir Bölüm 4 de verilen Teorem 2.4. den dolayı bu kompakt alt kümeleri içine alan ayrık açık kümeler vardır. Dolayısıyla (X, τ) kompakt Hausdorff uzayı normaldir.

2.6. TEOREM:

(X, τ) bir Hausdorff uzayı olsun.

1) X in sonlu sayıda kompakt alt kümelerin birleşimi kompaktır.

2) X in herhangi sayıda kompakt alt kümelerin arakesiti kompaktır.

İspat:

1) İspatı iki alt küme için yapmak yeterlidir. $A, B \subset X$ kompakt alt küme olsunlar. $A \cup B$ kümesinin $(G_i)_{i \in I}$ bir açık örtüsü olsun. Bu aile A ve B alt kümelerinin de örtüsü olup A ve B kompakt olduklarından A kümesini G_{i_1}, \dots, G_{i_p} ve B kümesini $G_{i_q}, G_{i_{q+1}}, \dots, G_{i_{q_1}}$ gibi sonlu açık alt aileleri örter. O halde $G_{i_1}, \dots, G_{i_p}, G_{i_q}, G_{i_{q+1}}, \dots, G_{i_{q_1}}$ ailesi de $A \cup B$ kümesini örter. Yani $A \cup B$ kümesi kompaktır.

2) $\forall i \in I$ için $A_i \subset X$ kümeleri kompakt olsunlar. $(A_i)_{i \in I}$ ailesinin $A = \bigcap A_i$ arakesitini alalım. $\forall A_i \subset X$ kompakt ve (X, τ) bir Hausdorff uzayı olduğundan her $A_i \subset X$ kümesi kapalıdır ve dolayısıyla A kapalı olur. Yine $\forall A_i$ için $A \subset A_i$ ve A kümesi A_i ler içinde kapalıdır. Hausdorff uzayın kapalı her alt kümesi kompakt olduğundan A kompaktır.

2.6.1.NOT:

Kompakt alt kümelerinin sonsuz birleşimleri kompakt değildir.

Örneğin $[-1, 1]$, $[-2, 2]$, $[-3, 3]$, ..., $[-n, n]$, ... $\subset \mathbb{R}$ nin kompakt alt kümeleri olmasına rağmen $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} [-n, n]$ kompakt değildir.

3. KOMPAKT UZAYLAR VE SÜREKLİLİK

3.1. TEOREM:

(X, τ) kompakt, (Y, τ^*) herhangi bir topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli ise $f(X) \subset Y$ de kompaktır. Yani, kompaktlık sürekli fonksiyonlarla taşınır.

İspat :

$\mathcal{G} = \{ G_i \}$, $f(X)$ in açık bir örtüsü, yani $f(X) \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$, $G \in \tau^*$ olsun. Buradan $X \subset f^{-1}[f(X)] \subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(G_{\alpha})$ elde edilir. Her $\alpha \in I$ için $U_{\alpha} \subset Y$ açık ve f sürekli olduğundan $\{ f^{-1}(G_{\alpha}) \}$, X in bir açık örtüsüdür. (X, τ) kompakt olduğundan $\{ f^{-1}(G_{\alpha}) \}$ sonlu bir alt örtüye, $f^{-1}(G_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(G_{\alpha_n})$, sahiptir yani; $X \subset f^{-1}(G_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(G_{\alpha_n})$ olur Buradan $f(X) = f(\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(G_{\alpha})) \subset \bigcup_{\alpha \in J} G_{\alpha}$ ($J \subset I$ sonlu) elde edilir. O halde $\{ G_{\alpha} : \alpha \in J \}$ ailesi \mathcal{G} nin sonlu bir alt örtüsü ve dolayısıyla $f(X)$ kompaktır.

3.2. TEOREM:

f, T_1 kompakt uzayında T_2 topolojik uzayına tanımlı süreklifonksiyon ise $f(T_1)$ kompaktır.

İspat:

$\{ G \}$, $f(T_1)$ in bir açık örtüsü olsun. $\forall f^{-1}(G) \subset T_1$ de açıktır. $\{ f^{-1}(G) \}$, T_1 için bir açık örtü oluşturur, aksi takdirde $f(T_1)$ in $\{ G \}$ kümelerinden birisinin içinde olmayan bir noktası olurdu. T_1 kompakt olduğundan ve $\{ f^{-1}(G) \}$ açık örtüsü, $\{ f^{-1}(G^*) \}$ sonlu alt açık örtüye sahip olacaktır. $\{ G^* \}$ kümeleri $f(T_1)$ için sonlu alt açık örtü oluştururlar. Bu takdirde $f(T_1)$ kompaktır.

3.3. TEOREM:

(X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subset X$ dizisel kompakt bir alt küme olsun. Öyleyse $f(A) \subset Y$ dizisel kompakttır.

İspat:

$f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon $A \subset X$ de dizisel kompakt bir alt küme iken $f(A)$ görüntüsünün de dizisel kompakt olduğunu göstereceğiz. Bunun için $f(A)$ kümesinin $\{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ gibi bir dizisini alalım. Görüntü tanımı gereğince $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(a_n) = b_n$ olacak şekilde bir $a_n \in A$ vardır. Böylece elde edilen $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ dizisi, A dizisel kompakt olduğundan $a_0 \in A$ elemanına yakınsayan $\{a_{1_n}, a_{2_n}, \dots, a_{l_n}, \dots\}$ alt dizisine sahiptir. $f(a_{l_n}) = b_{l_n}$, $n \in \mathbb{N}$ dersek, f sürekli olduğundan $\langle b_{l_n} \rangle$ dizisi de $f(a_0)$ elemanına yakınsar ve $f(a_0) \in f(A)$ olur.

3.4. TEOREM:

(X, τ) kompakt bir uzay, (Y, τ^*) Hausdorff uzayı olsun. $f : X \rightarrow Y$ 1:1 örten ve sürekli bir fonksiyon ise f homeomorfizmdir.

İspat:

f in homeomorfizm olduğunu göstermek için f fonksiyonunun tersinin (f^{-1}) sürekli olduğunu göstermek gerekir. Bu da herhangi bir kapalı kümenin f altındaki görüntüsünün (yani $(f^{-1})^{-1}$ altındaki görüntüsünden bahsediyoruz) kapalı olduğunu göstermekle eşanlamlı olmaktadır. (X, τ) uzayına ait herhangi bir F kapalı kümesini alalım. F kompakt bir uzayın alt kümesi olduğundan kompakttır. Bölüm 4 de verilen Teorem 3.1. den dolayı biliyoruz ki kompaktlık sürekli fonksiyonlarla taşınır. F in f altındaki görüntüsü, $f(F)$ de kompakt olur. Hausdorff uzaylarının kompakt alt kümeleri kapalı olduğundan $f(F) \subset Y$ de kapalıdır. Bu takdirde f bir homeomorfizmdir.

\mathbb{R}^1 deki Kompakt Alt Kümeler:

3.5. TANIM:

Eğer $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ için $|x_i| \leq K$ ($1 \leq i \leq n$ için) olacak şekilde bir K reel sayısı varsa Bir $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesine sınırlıdır denir. Özel olarak $A \subset \mathbb{R}$ kümesi sınırlıdır eğer $A, K > 0$ olmak üzere $[-K, K]$ kapalı aralığı tarafından örtülüyorsa. Her kapalı $[a, b]$ aralığı $K = \max\{|a|, |b|\}$ olmak üzere $[a, b] \subset [-K, K]$ dir.

3.6. YARDIMCI TEOREM:

$A \subset \mathbb{R}$ de kompakt bir alt küme ise A kapalı ve sınırlıdır.

İspat:

\mathbb{R}^1 Hausdorff aksiyomunu gerçeklediğinden, A kapalıdır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $O_n = (-n, n)$ olsun. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ olur. $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ A için bir açık örtüdür. A kompakt olduğundan $A \subset O_{n_1} \cup O_{n_2} \cup \dots \cup O_{n_q}$ Eğer biz $k = \max(n_1, n_2, \dots, n_q)$ dersek o zaman $O_{n_i} \subset O_k$ dır. $\forall i = 1, 2, \dots, q$ için böylece $A \subset O_k = (-k, k)$ olur $\Rightarrow A \subset [-k, k]$ dır yani A sınırlıdır.

3.7. SONUC TEOREM:

\mathbb{R}^1 in bir alt kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır.

İspat:

(\Rightarrow): \mathbb{R} de kompakt olan bir alt küme Bölüm 4 de verilen Yardımcı Teorem 3.5 den dolayı kapalı ve sınırlıdır.

(\Leftarrow): Tersine eğer A kümesi kapalı ve sınırlı ise A bir $K > 0$ için bir $[-K, K]$ kapalı aralığının kapalı alt kümesidir. $[-K, K]$ nin kompakt bir uzay olduğunu biliyoruz. Bölüm 1 de verilen Teorem 4.B.10 dan dolayı A kümesi kompakttır.

3.8. TANIM: (SINIRLI FONKSİYON)

$X \neq \emptyset$ olmak üzere, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $f(X) \subset \mathbb{R}$ nin sınırlı bir alt kümesi ise f fonksiyonuna sınırlıdır denir.

3.9. TEOREM:

(R, U) herhangi bir topolojik uzay ve (X, τ) kompakt bir topolojik uzay olsun. Eğer $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise, f sınırlıdır.

İspat :

f , sürekli ve (X, τ) kompakt uzay olduğundan Bölüm 4 de verilen Teorem 3.1 gereğince $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakttır. Heine -Borel Teoreminden dolayı \mathbb{R}^n nin kompakt alt kümeleri sınırlıdır. Böyleyse $f(X)$ sınırlıdır.

3.10. TEOREM:

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \neq \emptyset$, $A \subset X$ kompakt ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise $f(a_1) = \sup f(A)$ ve $f(a_2) = \inf f(A)$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ vardır.

İspat :

$A \subset X$ kompakt ve f sürekli olduğundan $f(A) \subset \mathbb{R}$ kompakttır. Dolayısıyla $f(A)$ kapalı ve sınırlıdır. $f(A)$ sınırlı olduğundan m gibi en küçük üst sınırı, yani $m = \sup f(A)$ ve n gibi en büyük alt sınırı, yani $n = \inf f(A)$ vardır. Fakat $f(A)$ kapalı olduğundan $m, n \in f(A)$ olmak zorundadır. Bu takdirde $m = f(a_1)$ ve $n = f(a_2)$ olmak üzere $\forall a \in A$ için $f(a_2) \leq f(a) \leq f(a_1)$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ vardır.

Örnek :

\mathbb{R} tabii topolojisiyle verilsin.

$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon tanımlansın. Öyleki $f(x) = x^2$ olsun. Öyleyse $\forall x \in [-1, 1]$ için $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ olur ki bu da f , maksimum ve minimum değerlerini alır demektir.

Şimdi de $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon tanımlansın öyle ki $g(x) = x^2$ olsun. $g((-1, 1)) \subseteq [-1, 1]$ olduğundan, g sınırlıdır, fakat g , maksimum ve minimum değerlerini almaz.

Her iki fonksiyondan farklı sonuçlar elde etmemizin sebebi, fonksiyonların tanımlı oldukları aralıklardır. f nin tanımlı olduğu $[-1, 1]$ kapalı aralığı kompakt iken g nin tanımlı olduğu $(-1, 1)$ açık aralığı kompakt değildir.

3.11. TEOREM:

\mathbb{R} yi tabii topolojisi ile düşünelim. $A \subset \mathbb{R}$ kompakt alt kümesi olsun. Eğer $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise f düzgün süreklidir.

İspat:

$\epsilon > 0$ alalım. f sürekli olduğundan $\forall x \in A$ alındığında A ya ait bütün y ler için $|x - y| < \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ olacak şekilde $\delta_x > 0$ vardır. $\forall x \in A$ için $U_x = (x - \frac{1}{2} \delta_x, x + \frac{1}{2} \delta_x)$ olsun. $\{U_x : x \in A\}$ A nın açık bir örtüsüdür. A kompakt olduğundan sonlu tane aralık U_{x_1}, \dots, U_{x_n} A yı örter. $\delta = \min \{ \frac{1}{2} \delta_{x_1}, \dots, \frac{1}{2} \delta_{x_n} \}$ olsun. $x, y \in A$ alalım ve $|x - y| < \delta$ olsun. x noktasını içeren bir U_{x_i} vardır. $x \in U_{x_i}$ olacak şekilde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vardır. Dolayısıyla $|x_i - x| < \frac{1}{2} \delta_{x_i}$ olur.

Üçgen eşitsizliğini kullanarak $|x_i - y| = |(x_i - x) + (x - y)| \leq |x_i - x| + |x - y| < \frac{1}{2} \delta_{x_i} + \delta \leq \frac{1}{2} \delta_{x_i} + \frac{1}{2} \delta_{x_i} = \delta_{x_i}$ elde ederiz.

Yani $|x_i - y| < \delta_{x_i}$ olur. Bu takdirde $|f(x_i) - f(y)| < \epsilon/2$ dir. $|x_i - x| < \frac{1}{2} \delta_{x_i}$ olduğundan $|f(x_i) - f(x)| < \epsilon/2$ gerçekleşir.

Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$|f(x)-f(y)|=|(f(x)-f(x_i))+(f(x_i)-f(y))| \leq |f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(y)| < (\epsilon/2)+(\epsilon/2)=\epsilon$ elde edilir ki bu da f düzgün süreklidir demektir.

Analizden bir örnek verecek olursak tanım kümeleri tabii topolojiye göre kompakt olan sürekli fonksiyonlar düzgün süreklidirler. Örneğin \arccos ve \arcsin fonksiyonlarının tanım kümelerinin $[-1,1]$ kapalı aralığıdır ve düzgün süreklidirler. Ayrıca tanım kümesi $[-2,2]$ olan $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonu da düzgün süreklidir.

3.12. TEOREM:

(X,d) bir kompakt metrik uzay ve (Y,d') bir metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ise f düzgün süreklidir.

İspat:

$\epsilon > 0$ bir sayı alalım. $\forall p \in X$ için f sürekli olduğundan $\exists \delta_p > 0$: $y \in X$ ve $d(p,y) < \delta_p$ kaldıkça $\Rightarrow d'(f(p), f(y)) < \epsilon/2$ kalır. (X,d) uzayı kompakt olduğundan ve $\{ N_{\delta_p} : p \in X \}$ ailesi X in bir açık örtüsü olacağından $\exists \{ p_1, p_2, \dots, p_n \} \in X$ sonlu alt kümesi vardır: $\{ N_{\delta_{p_i}} : i = 1, \dots, n \}$ sonlu açık küme topluluğu X i örter. Şimdi $\delta_{p_1}/2, \dots, \delta_{p_n}/2$ lerin en küçüğüne δ diyelim, ve X de $d(x,y) < \delta$ olan iki $x, y \in X$ alalım. O zaman $\exists p_j \in X : d(p_j, x) < \delta_{p_j}$. Şimdi $d(p_j, y) \leq d(p_j, x) + d(x, y) < \delta_{p_j} + \delta_{p_j} = \delta_{p_j}$. Böyle de $d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(p_j)) + d'(f(p_j), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ olur. Böylece f nin düzgün sürekli olduğunu görürüz.

4. KOMPAKT UZAYLARIN ÇARPIMI

4. 1. TEOREM:

İki kompakt uzayın çarpımı da kompaktır.

İspat:

(\Leftarrow) X ve Y kompakt olmak üzere

$\mathcal{G} = \{ U \times V : U \subset X \text{ ve } V \subset Y \}$, $X \times Y$ çarpım uzayının bazı açık kümeleri ile oluşturulmuş açık bir örtüsü olsun. Bölüm 2 de verilen Teorem 1.3. den dolayı $X \times Y$ nin kompakt olduğunu göstermek için τ nin sonlu alt örtüye sahip olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

İspatı iki adımda gerçekleştireceğiz. Öncelikle (i) $\forall x \in X$ için, x içine alan bir U_x açık kümesinin varlığından bahsedeceğiz öyle ki \mathcal{G} nin sonlu sayıdaki elemanlarının birleşimi $U_x \times Y$ yi içerecek. Daha sonra (ii) $X \times Y$ yi $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \times Y$ biçiminde bulunan sonlu sayıda kümelerin birleşimi şeklinde yazacağız. Yani;

$$(i) \forall x \in X, \exists U_x \subset X, x \in U_x \Rightarrow U_x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^n \{ U \times V \}$$

$$(ii) X \times Y = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \times Y$$

$x \in X$ olsun. $\forall y \in Y$ için

$(x, y) \in U_x \times V_y$ olacak şekilde $U_y \times V_y \in \mathcal{G}$ vardır. $\{V_y : y \in Y\}$ sınıfı Y nin açık bir örtüsüdür ve Y kompakt olduğundan $\{V_y\}$ nin sonlu alt örtüsü $\{V_{y_i} : i=1,2,\dots,n\}$ vardır.

$U_x = \bigcap \{U_{y_i} : i=1,2,\dots,n\}$ kümesi X de açıktır ve $\{U_x \times V_{y_i} : i=1,2,\dots,n\}$, $\{x\} \times Y$ yi örter, yani

$$\begin{aligned} \{x\} \times Y &\subseteq U_x \times Y = U_x \times \bigcup_{i=1}^n \{V_{y_i} : i=1,2,\dots,n\} \\ &= \bigcup_{i=1}^n \{U_x \times V_{y_i} : i=1,2,\dots,n\} \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n \{U_{y_i} \times V_{y_i} : i=1,2,\dots,n\} \end{aligned}$$

öyleyse $\forall x \in X$ için $\{x\} \times Y \subseteq U_x \times Y$ olacak şekilde $U_x \subset Y$ kümesi vardır. Öyle ki \mathcal{G} nin sonlu sayıdaki elemanlarının birleşimi $U_x \times Y$ yi örter.

Dikkat edersek, $\{U_x : x \in X\}$, X in açık bir örtüsüdür ve X kompakt olduğundan $\{U_x : x \in X\}$ sonlu bir alt örtüye $\{U_{x_i} : i=1,2,\dots,m\}$ sahiptir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup \{U_{x_i} : i=1,2,\dots,m\} \times Y \\ &= \bigcup \{U_{x_i} \times Y : i=1,2,\dots,m\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$\forall i \in \{1,2,\dots,m\}$ için \mathcal{G} nin sonlu sayıdaki elemanlarının birleşimi $U_{x_i} \times Y$ yi içerdiğinden $X \times Y$ nin \mathcal{G} nin sonlu sayıdaki kümelerinin birleşimine eşit olduğunu söyleyebiliriz. Diğer bir deyişle, \mathcal{G} , sonlu alt örtüye sahiptir ve $X \times Y$ kompattır.

(\Rightarrow) $X \times Y$ nin kompakt olduğunu kabul edelim. $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ ve $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ izdüşümü fonksiyonları sürekli olduklarından, Bölüm 4 de verilen Teorem 3.1.den dolayı $X = \pi_1(X \times Y)$ ve $Y = \pi_2(X \times Y)$ kompakt olurlar.

4.2.SONUC TEOREM: (TYCHONOFF'S THEOREM)

$(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$ kompakt topolojik uzaylar olsun.

O zaman $\prod_{i=1}^n (X_i, \tau_i)$ çarpımı da kompakttır.

4.3.TANIM:

(n-boyutlu R^n öklid uzayında açık (kapalı) kutular):

Eğer reel sayılar üzerinde $\forall i=1,2,\dots,n$ için (a_i, b_i) sınırlı açık (kapalı) aralıklar iseler, o zaman R^n de bir alt küme

$$\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i, \forall i \text{ için}\}$$

R^n de n-boyutlu açık kutu olarak isimlendirilirler. $a_i \leq x_i \leq b_i$ için ise bu alt küme R^n de n-boyutlu kapalı kutu olarak isimlendirilir.

4.4.TEOREM: (GENELLEŞTİRİLMİŞ HEINE-BOREL TEOREMI):

R^n nin her kapalı ve sınırlı alt kümesi kompakttır.

İspata geçmeden önce alt kümenin hem kapalı hem de sınırlı olması gerektiğini birer örnekle göstereyim;

a) $X \subset R^n$ sınırlı olmayan alt kümesi olsun ve $x_0 \in R^n$ alalım. $r=1,2,3,\dots$ olmak üzere r yarıçaplı x_0 merkezli $N(x_0, r)$ komşuluklar dizisini düşünelim. Bunlar, $\forall x \in R^n$ için r yeterince büyük seçildiği zaman $d(x, x_0) < r$ olduğundan, birleşimleri R^n i içeren açık kümeler dizisini oluştururlar. Bu durumda $X \cap N(x_0, r)$, $r=1,2,3,\dots$ birleşimleri X i içeren, X in açık kümelerinden meydana gelmiş artan bir dizi meydana getirir. Fakat X bu açık kümelerden hiç birine eşit değildir. Çünkü X sınırlı değildir. Dahası X, bu açık kümelerin sonlu sayıda birleşimleri tarafından da içerilmez, çünkü bu açık kümelerin birleşimleri içlerinden en büyük olanına eşittir.

b) $X \subset R^n$ sınırlı fakat kapalı olmayan alt küme olsun. Dolayısıyla X in tümleyeninde yani; $R^n \setminus X$ de, bazı y noktaları vardır öyle ki her bir $N(y, r)$ komşulukları X in noktalarını içerir. $k=1,2,3,\dots$ olmak üzere U_k , y merkezli $1/k$ yarıçaplı dairelerin dış bölgesi olsun. $\forall U_k, R^n$ de açıktır ve eğer $x \in U_k$ ise $N(x, d(x, y) - 1/k)$, x in U_k tarafından içerilen bir komşuluğudur. U_k , artan bir dizi oluşturur; $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, ve birleşimleri y nin tümleyenidir, çünkü $\forall x \neq y$ noktası için $\exists k : (1/k) < d(x, y)$ dir.

Buradan $X \cap U_k$, birleşimleri X olan, X in açık kümelerinden oluşmuş artan bir dizi meydana getirir. Bununla birlikte

$\forall N (y, 1/k) X$ in noktalarını içerdiğinden, X bu açık kümelerden hiç birine eşit değildir. Dahası X bu kümelerin sonlu sayıda birleşimleri tarafından da örtülmez. Çünkü birleşimleri içlerinden en büyük olanıdır.

Sonuç olarak $X \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı olmadığında veya kapalı olmadığında, birleşimleri X i içeren, X in açık kümelerinden meydana gelmiş artan dizi açılımı bulabiliyoruz, ama X ,bu kümelerin herhangi bir sonlu sayıda birleşimlerine eşit olmuyor.

Şimdi ispatımıza geçebiliriz:

İspat:

İlk adım olarak $n=1$ için $I=[a,b] \subset \mathbb{R}$ kapalı ve sınırlı aralığının kompakt olduğunu ispatladığımızı hatırlayalım. (I. Bölüm Teorem 4.B.10.) $n=1$ iken $B \subset \mathbb{R}$ bir aralıktır. $n=2$ iken $B \subset \mathbb{R}^2$ kenarları koordinat eksenlerine paralel olan bir dikdörtgen ve onun iç bölgesidir. $n=3$ iken $B \subset \mathbb{R}^3$ yüzleri koordinat eksenlerine paralel olan dikdörtgensel kutu ve onun iç bölgesidir. B yi daha küçük kutulara bölebilmeliyiz. Bunu her bir $[a_i, b_i]$ $i=1,2,\dots,n$ aralığını c_i orta noktalarından ikiye bölerek gerçekleştirebiliriz ve bu bölünmede her kutu i .nci aralıkta ya $[a_i, c_i]$ yada $[c_i, b_i]$ olacaktır.

$n=2$ için B dikdörtgensel bölgesi, $x_1=c_1$ ve $x_2=c_2$ doğruları ile kenarları B nin kenarlarının yarısı kadar olan $4=2^2$ eş dikdörtgensel bölgeye ayrılacaktır. $n=3$ iken B dikdörtgensel kutu $x_1=c_1, x_2=c_2, x_3=c_3$ düzlemleri ile kenarları B nin kenarlarının yarısı kadar olan $8=2^3$ eş dikdörtgensel kutularına bölünecektir. Genel olarak B , $x_i=c_i$ ($i=1,2,\dots,n$) düzlemleri ile bölünerek kenarları B kutularının kenarlarının yarısı kadar olan 2^n eş kutulara ayrılacaktır.

Herhangi bir n boyutlu da kutunun kompakt olduğunu göstermek için, bir boyutlu çalıştığımız gibi hareket edeceğiz: \mathcal{G} , B nin açık bir örtüsü olsun öyle ki \mathcal{G} nin B yi içerecek sonlu alt örtüsü bulunmasın. Yukarıda anlattığımız işlemi yaparak içiçe geçmiş $B_0, B_1, \dots, B_k, \dots$ kutular dizisi elde ederiz : $B_0 = B$ alalım. $\forall k > 0$ için B_k, B_{k-1} in bölünmesiyle oluşturulmuş kutularından birisi olsun. Hipotezden dolayı $B_0=B$, \mathcal{G} nin sonlu alt örtüsü ile örtülemiyordu. $B_{k-1}, 2^n$ tane kutuya bölünerek her defasında \mathcal{G} nin sonlu alt örtüsü tarafından içerilmeyen kutular seçimi ile oluşturulan dizi B_0, B_1, \dots, B_{k-1} olsun. Eğer bunları herbiri \mathcal{G} nin sonlu alt örtüsü ile örtülmüş olsa idi, 2^n tane kutunun birleşimleri B_{k-1} i örten \mathcal{G} nin sonlu alt örtüsü olurdu. Bu mümkün olmadığından B_{k-1} lerin en az birisi \mathcal{G} nin sonlu alt örtüsü ile örtülmez.

\mathcal{G} nin sonlu alt örtüsü ile örtülmeyen kutuya B_k diyelim. Böylece tümevarımla ispatladığımız $B_0, B_1, \dots, B_k, \dots$ dizisinin oluşturulması tamamlanmış olur.

Şimdi $\forall k=1,2,\dots$ için $x \in B_k$ nin varlığını ispat edeceğiz. Bunu görmek için $i=1,2,\dots,n$ indisleri için i . nci koordinat ekseninde kutular dizisinin izdüşümlerini düşünelim. Eksenlerin herbirinde içiçe geçmiş aralıklar dizisi oluştururlar. x_i , i .nci koordinat eksenlerine yapılan izdüşümlerle oluşturulan aralıkların ortak noktası olsun. Bu durumda $\forall k$ için koordinatları (x_1, \dots, x_n) olan \mathbb{R}^n nin x noktası B_k nin bir noktası olacaktır. $x \in B_k$ olduğundan $\exists G \in \mathcal{G} : x \in G$ olur.

O zaman $N(x, r) \subset G$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. d , B nin en uzun kenarının uzunluğunu gösterebilir. Dizin oluşturulma aşamalarının her adımında kutunun kenarları iki eşit parçaya ayrıldığından, $d/2^k$, B_k nin en uzun kenarının uzunluğunu gösterecektir.

Phytagor Teoreminden dolayı B_k nin köşegen uzunluğu en çok $\sqrt{n} d/2^k$ olur. k indisini öyle büyük seçeriz ki $2^k > \frac{\sqrt{n}}{r} d$; dolayısıyla $\frac{\sqrt{n}}{2^k} d < r$ olur, buradan da $B_k \subset N(x, r) \subset G$, elde edilir. B_k , \mathcal{G} nin bir tek kümesi tarafından içerildiğinden, bu da B_k , \mathcal{G} nin sonlu alt örtüsü tarafından içeriliyor kabulümüzle çelişir. Sonuç olarak B kompakttır.

4.5. TEOREM:

$\{(X_i, d_i) : i = 1, 2, \dots\}$ metrik uzaylar sınıfı olsun öyle ki

$\sum_{i=1}^{\infty} [d(X_i)]^2$ var olsun ve $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ şöyle tanımlansın:
 $d((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = [\sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(x_i, y_i)]^{\frac{1}{2}}$

O zaman (X, d) bir metrik uzaydır ve üzerindeki metrik topolojisi X in çarpım topolojisine özdeştir.

İspat: Her bir pozitif tam sayısı i için $d_i^2(x_i, y_i) \leq d^2(x_i)$ dir $x_i, y_i \in X_i$ olmak üzere eğer $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \in X$ ise

$$[\sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(x_i, y_i)]$$

vardır.

$d(x, y) = 0$ dır $\Leftrightarrow x = y$ ve $d(x, y) = d(y, x)$ ise.

$x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots), z = (z_1, z_2, \dots) \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$[\sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, z_i)]^{\frac{1}{2}} \leq [\sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, y_i)]^{\frac{1}{2}} + [\sum_{i=1}^n d_i^2(y_i, z_i)]^{\frac{1}{2}}$ dir. Böylece

$[\sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, z_i)]^{\frac{1}{2}} \leq [\sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, y_i)]^{\frac{1}{2}} + [\sum_{i=1}^n d_i^2(y_i, z_i)]^{\frac{1}{2}} = d(x, y) + d(y, z)$ ve olur.

Buradan da

$d(x, z) = [\sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(x_i, z_i)]^{\frac{1}{2}} \leq d(x, y) + d(y, z)$ çıkar. O halde (X, d) bir metrik uzaydır.

Şimdi $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\pi_i : X \rightarrow X_i$ i. nci izdüşüm fonksiyonu olsun ve

$\mathcal{G}_1 = \{\pi_i^{-1}(N(x_i, \varepsilon)) : \varepsilon > 0, x_i \in X_i\}$ diyelim. \mathcal{B}_1 ile \mathcal{G}_1 deki sonlu çokluktaki kümelerin mümkün olan bütün arakesitlerinin ailesini gösterelim ve $\mathcal{B}_2 = \{N(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, x \in X\}$ olsun. O zaman \mathcal{B}_1 ve \mathcal{B}_2 sırasıyla X için çarpım topolojisinin ve metrik topolojisinin bazı olurlar.

Diyelim ki $x = (x_1, x_2, \dots) \in B_1 \in \mathcal{B}_1$ bir nokta olsun. O zaman \mathcal{G}_1 de sonlu sayıda bir çok $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{im} \in \mathcal{G}_1$ kümeleri vardır öyle ki $B_1 = \bigcap_{k=1}^m S_{ik}, \forall k = 1, 2, \dots, m$ dir. Ayrıca öyle bir pozitif sayı ε'_k ve $y_{ik} \in X_k$ vardır ki $S_{ik} = \pi_{ik}^{-1}(N(y_{ik}, \varepsilon'_k))$ dir. $x_{ik} \in N(y_{ik}, \varepsilon'_k)$ olduğundan $\forall k$ için $N(x_{ik}, \varepsilon_k) \subset N(x_{ik}, \varepsilon'_k)$ olacak şekilde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ pozitif sayılar vardır

$\varepsilon = \min (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ olsun ve $B_2 = N(x, \varepsilon)$ diyelim. O zaman $x \in B_2 \in \mathcal{B}_2$ ve eğer $q = (q_1, q_2, \dots) \in B_2$ ise $\forall k=1,2,\dots,m$ için

$$d_{ik}(x_i, q_{ik}) \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(x_i, q_i) \right]^{1/2} < \varepsilon < \varepsilon_{ik} \text{ ve böylece}$$

$$q \in \pi_{ik}^{-1}(N(x_{ik}, \varepsilon_k)) \subset \pi_{ik}^{-1}(N(y_{ik}, \varepsilon'_k)) = S_{ik} \text{ yani } B_2 \subset B_1 \text{ dir.}$$

Şimdi aynı şekilde bu defa $x = (x_1, x_2, \dots) \in B_2 \in \mathcal{B}_2$ noktasını alalım. O zaman $\exists \varepsilon' > 0$ ve $y = (y_1, y_2, \dots) \in X : B_2 = N(y, \varepsilon')$. O halde $\exists \varepsilon > 0 : N(x, \varepsilon) \subset N(y, \varepsilon')$ dir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} [d(X_i)]^2 \text{ varlığından dolayı}$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} [d(X_i)]^2 < \varepsilon^2/2 \text{ olacak şekilde bir } n \in \mathbb{N} \text{ vardır.}$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$ diyelim ve $B_1 = N(x_1, \varepsilon_1) \times N(x_2, \varepsilon_2) \times \dots \times N(x_n, \varepsilon_n) \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$ olsun. O zaman $B_1 = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(N(x_i, \varepsilon_i))$ olur. Böylece $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$ çıkar. Eğer $q = (q_1, q_2, \dots) \in B_1$ de bir nokta ise o zaman

$$d^2(q, x) = \sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, q_i) = \sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, q_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} d_i^2(x_i, q_i) < \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} d_i^2(X_i) < n(\varepsilon/\sqrt{2n})^2 + \varepsilon^2/2 = \varepsilon^2$$

dir.

Böylece $d(q, x) < \varepsilon$ ve $B_1 \subset N(x, \varepsilon) \subset N(y, \varepsilon') = B_2$ elde edilir ki bu da \mathcal{B}_1 ve \mathcal{B}_2 nin özdeş baz oldukları gözlenir.

4.6. YARDIMCI TEOREM:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq 2 \text{ dir. Yani bir } (R, d_i) \text{ metrik uzayında}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} [d([0, \frac{1}{i}])]^2 \text{ vardır.}$$

İspat : 1 den büyük olan her i indisi için $\frac{1}{i^2} < 1/[i(i-1)] = 1/(i-1) - \frac{1}{i}$ yazabiliriz.

Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq 2 \text{ elde edilir.}$$

4.7. TANIM (HİLBERT KÜBÜ)

Bir Hilbert kübü I^{ω} , $X = \prod_{i=1}^{\infty} [0, \frac{1}{i}]$ ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanmış bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere bir (X, d) metrik uzayıdır. d fonksiyonu $d((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = [\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$ dir.

4.8. SONUC TEOREM:

I^{ω} Hilbert kübü, metrik topolojisi, çarpım topolojisine özdeş olan kompakt bir metrik uzayıdır.



SONUÇ

R^1 in kapalı ve sınırlı alt kümelerinin bir çok önemli özelliği vardır. R^1 , tek boyutlu öklid uzayı, U üzerinde kurulan tabii topoloji olmak üzere, (R^1, U) topolojik uzayının alt kümeleri için kompaktlık kavramı kapalı ve sınırlı olma özelliğine denk olmaktadır $A \subset R^1$ olmak üzere aşağıdaki üç özellik vardır ve eşdeğerdir:

(1) A kapalı ve sınırlıdır.

(2) A 'nın sonsuz elemanlı her alt kümesinin A da bir limit noktası vardır.

(3) A 'nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtü içerir.

(1). özellik "uzaklık fonksiyonu" nun tanımlanabileceği, örneğin metrik uzaylarda anlamlı olmasına rağmen (2) ve (3). özellikler limit noktası ve açık kümeleri tanımlayabileceğimiz herhangi bir uzayda anlamlı olur. Bu takdirde R^1 de kapalı ve sınırlı kümelerin anlaşılması daha kolayken, topolojik uzaylarda "kapalı" ve "sınırlı" tanımlarının nasıl yapıldığı ilginç bir soru olarak karşımıza çıkar. Kapalılığın topolojide bir anlamı olmasına rağmen sınırlılığın tanımlamanın uygun bir yolu yoktur. Sınırlılığın tanımlamada en başarılı yaklaşımlar (1) Heine - Borel ve (2) Bolzano - Weirstrass teoremleridir. Sınırlılık kavramını genel topolojik uzaylarda "örtü" kavramı aracılığı ile yerleştirebileceğimizi gördük, yani kompaktlık kavramını genel topolojik uzaylar için örtü kavramı ile tanımladık.

Kompaktlık kavramı sayesinde bir uzayın genelini, sonlu sayıda noktalarını inceleyerek, araştırmış oluyoruz ve bütün noktalarıyla çalışmak zorunda kalmıyoruz. Bu özelliğinden dolayı analizdeki bir çok teorem R^n nin kapalı ve sınırlı alt kümeleriyle yapılmıştır. Yalnızca bu özelliği ile bile "kompaktlık kavramı" incelemeye değer bir konudur. Bu çalışmayı, incelemeyi sürdürürken okuduğum bir örnekle bitirmek istiyorum. Böylece kompaktlık kavramını bilinçli düşünmeden, bu kavram için gözlerimizin önünde bir şekil belirecek

J. D. Baum diyor ki: "Büyük bir kalabalığın (mümkünse sonsuz) yağmur altında beklediğini düşünün. Her biri şemsiyesini açtığı anda, artık ıslanmayacaktır. Öyle bir araya gelsinler ki sonlu sayıdaki insanların şemsiyelerini açarak hepsinin yine ıslanmaması mümkün olacaktır. İnsanların bu şekilde biraraya gelerek bir çeşit kompakt uzay oluşturduklarını düşünebiliriz. "

SEMBOL LİSTESİ

| | |
|----------------|-----------------------------------------------------|
| \Rightarrow | : Gerektirir, ise |
| \nRightarrow | : Gerektirmez |
| \subset | : Kapsam |
| $\not\subset$ | : Kapsamaz |
| \in | : Vardır |
| \notin | : Aittir |
| \notin | : Ait değildir |
| \bigcap | : Hepsi |
| \setminus | : Fark |
| A' | : A ya ait limit noktalarının kümesi (türev kümesi) |
| \emptyset | : Boş küme |
| G | : Açık küme |
| F | : Kapalı küme |
| I | : Numaralayan küme |
| G^c | : G'nin tümleyen kümesi (kompliment) |
| \bar{A} | : A'nın kapanışı |
| A° | : A'nın içi |
| τ | : Topolojik uzay |
| τ_A | : Topolojik alt uzay |
| $\prod_i A_i$ | : Çarpım kümesi |

| | |
|---------------------------------------|--------------------------------------------|
| π | : İzdüşüm fonksiyonu |
| \mathbb{N} | : Doğal sayılar kümesi |
| \mathbb{R}^1 | : Reel sayılar kümesi |
| \mathbb{Q} | : Rasyonel sayılar kümesi |
| \mathbb{R}^n | : n-boyutlu öklid uzayı |
| \mathcal{U} | : Doğal (Tabii) topoloji |
| \wedge | : ve |
| $\mathcal{N}(p)$ | : p noktasının açık komşuluk sistemi |
| d | : Metrik fonksiyon |
| (X, d) | : Metrik uzay |
| (X, τ) | : Topolojik uzay |
| $\langle a_n \rangle$ | : a_n dizisi |
| $(G_i)_{i \in I}, \mathcal{G}$ | : $G_i : i \in I$: Açık kümeler ailesi |
| $d(A)$ | : A kümesinin çarpımı |
| $P(X)$ | : X in kuvvet kümesi |
| \mathcal{B} | : Baz |
| δ | : Alt baz |
| $S(x, r)$ | : x merkezli r yarıçaplı S açık kümesi |
| $\langle a_n \rangle \rightarrow a_0$ | : a_n dizisi a_0 noktasına yakınsıyor. |

KAYNAKLAR

- [1] ALEXANDROFF, P. and HOPF, H., Topologie, Edwards Brothers Inc., 1935.
- [2] ALO, R.A., and SHOPIRO, H.L., Normal Topological Spaces, Cambridge University Press., 1974.
- [3] ARCKHANGEL, A.V., PONTRYAGIN, L.S., , Encyclopaedia of Mathematical Sciences, General Topology I, Vol.17, Publisher Viniti, Moscow, 1988.
- [4] BERGE, C., Topological Spaces, The MacMillan Company, NY, 1963.
- [5] BOURBAKI, N., Elements of Mathematics General Topology, Part 1, Addison-Wesley Publishing Co., 1966.
- [6] BOURBAKI, N., Elements of Mathematics General Topology, Part 2, Addison-Wesley Publishing Co., 1966.
- [7] BORISOVICH, N.P., IZRAILEVICH, Y., FOMENKO, T., Introduction to Topology, Mr Publisher, Moscow, 1980.
- [8] BUSHOW, D., Elements of General Topology, John Wiley and Sons, Inc., 1963.
- [9] CHINN, W.G. and STEENROD, N.E., First A Concepts of Topology, Random House The L.W. Singer Company, 1966.
- [10] CULLEN, H.F., Introduction to General Topology, D.C. Helath and Co., 1968.
- [11] CRUMP, W.B., Introduction to Topology, Wn.C.Brown Publishers, 1991.

- [12] DESPHONDE, J.V., Introduction to Topology, Tata McGraw-Hill Publishing Co. and Ltd., 1988.
- [13] DIXMIER, J., General Topology, Printed by R R Donelley and Sons, 1981.
- [14] DUGUNDJI, J., Topology. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- [15] EISENBERG, M., Topology. Holt Rinehart and Winston Inc., 1939.
- [16] FAIRCHILD, W.W., Topology. Cassius Ionescu Tulcea . W B. Saunders Company, Philadelphia, 1971.
- [17] GAAL, A.S., Point Set Topology, Academic Press Inc., 1964.
- [18] GEMIGNANI, M.C., Elementary Topology, Addison-Wesley Publishing Co., 1972.
- [19] GOFFMAN, C., and PEDRIC, G., Functional Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1965.
- [20] GREEVER, J., Theory and Examples of Point Set Topology, Brooks/cole Publishing Company, 1968.
- [21] HILTON, P.J., Studies in Modern Topology, Vol.5, Prentice-Hall, Inc., 1968.
- [22] HOCKING, J.G., and YOUNG, G S., Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1961.
- [23] KELLY, J.L., General Topology. D. Van Nostrand Co., 1955.
- [24] KOWALSKY, H.J., Topological Spaces, Universitat Erlagen Press., 1965.
- [25] LEFSCHETZ, S., Introduction to Topology, Princeton University Press, 1949.

- [26] LIPSCHUTZ, S., General Topology, McGraw-Hill Publishing Co., 1965.
- [27] LONG, P.E., An Introduction to General Topology, Charles E. Merrill Publishing Company, 1971.
- [28] MANSFIELD, J.M., General Topology, D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1963
- [29] MENDELSON, B., Introduction to Topology, Allyn and Bacon., Boston, 1926.
- [30] MOORE, O.T., Elementary General Topology, Prentice-Hall, Inc., 1964.
- [31] NAGATA, J.I., Modern General Topology, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968.
- [32] NAGATA, J.I. Modern General Topology, University of Amsterdam, 1985.
- [33] PATTERSON, E.M., Topology, Interscience Publishers, Inc., 1959.
- [34] PEARS, A.R., Dimension Theory of General Spaces, Cambridge University Press., California, 1975.
- [35] PERVIN, J.W., Foundations of General Topology, Academic Press Inc., 1964.
- [36] RAYDEN, H.L., Real Analysis.
- [37] SCHUBERT, H., Topology, MacDonal Technica! Scinetific Press., 1968.
- [38] SCOTT, S., Introductory Topology, The Ronald Press Company, NY, 1968.
- [39] SIMMONS, G.F., Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill Publishing Co., 1963

- [40] STEEN, L.A. and SEEBACH, J.A., Counter Examples in Topology, Springer-Verlog, 1970.
- [41] TSEN, S.H., Elements of General Topology, Holda-Day, Inc., 1964.
- [42] WILANSKY, A., Topology For Analysis, Ginn A Xerox Company, 1970.
- [43] WOLFGONG, F., General Topology, Frederic Ungar Publishing Company, 1965.

