MARMARA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YALINKAT FONKSİYONLARDA KATSAYI PROBLEMLERİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Oya TUNALI

Ana Bilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd.Doç. Yaşar POLATOĞLU

İ Ç İ N D E K İ L E R

Ö Z E T

Yalınkat fonksiyonlar 1907 tarihinde ilk defa Koebe tarafından ortaya atılmış, bu fonksiyon sınıfı hakkında ilk esaslı araştırmalar kendisi tarafından yapılmıştır. Daha sonra 1916 yılında Bieberbach'ın bu fonksiyon sınıfının katsayıları ile ilgilenmesi üzerine bu sınıf önem kazanmış kompleks fonksiyonlarla uğraşan bütün dünya matematikçilerinin büyük ilgisini toplamıştır. Bu fonksiyon sınıfı genişletilerek yıldızıl, konveks, spirallike, konvekse yakın vs. gibi sınıflar ortaya atılıp, çeşitli yazarlar tarafından incelenmiş ve Bieberbach adıyla bilinen meşhur $|a_n| \leq n$ eşitsizliği 1985 yılında De Branges tarafından ispatlanmıştır.

Biz bu çalışmamızda bu fonksiyon sınıfları üzerine yapılan katsayı araştırmalarının genel bir derlemesini yapıp en son R.J.libera, Z.Zlotkiewicz tarafından 1987-89 yıllarında Toeplitz formları kullanılarak yukarıda saydığımız konveks, yıldızıl ve spirallike sınıfına ait fonksiyonların, maküs fonksiyonlarının katsayılarının üst sınırlarını bulma problemine, 1989 yılında Wiatrowski tarafından ortaya atılan kompleks mertebeden yıldızıl yalınkat fonksiyon sınıflarının maküs fonksiyonlarının ilk altı katsayısı için üst sınırlar bulmaya çalıştık.

Bu amaç doğrultusunda;

I.Bölümde konu ile ilgili ön bilgilerin yani, metrik uzay, pozitif reel kısmı haiz fonksiyonlar, yalınkat fonksiyonlar, yıldızıl-yalınkat fonksiyon, konveks-yalınkat fonksiyon ve α-spirallike fonksiyon sınıflarının tanımları yapılmıştır.

II.Bölüm'de, pozitif reel kısmı haiz fonksiyonlar, yalınkat fonksiyonlar, yıldızıl-yalınkat fonksiyonlar, konveks fonksiyonlar , α-spirallike fonksiyonlarla ilgili katsayı teoremleri ve kuvvet serileri üzerine bazı katsayı teoremleri ile konveks bir fonksiyonun maküs fonksiyonunun ilk katsayıları üzerine Toeplitz formlarını kullanarak bazı eşitsizliklerin elde edilişi incelenmiştir.

III.Bölüm'de, kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonların maküs fonksiyonu için Toeplitz formlarını kullanarak ilk altı katsayının üst sınırları hesaplanmıştır.

I. BÖLÜM

1.0. Metrik Uzay :

X herhangi bir küme olsun. $x,y \in X$ için $d(x,y) \in R$, aşağıdaki aksiyomları gerçeklesin.

i- $\forall x,y \in X$, $x \neq y$ için $d(x,y) > 0$ ve $d(x,y) = d(y,x)$

ii- $\forall x,y \in X$, $x = y$ için $d(x,y) = 0$

iii- $\forall x,y,z \in X$, $x \neq y \neq z$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Bu takdirde, $d: X \times X \to R$ tasviri X kümesi üzerinde bir metrik uzay yapısını belirtmiş olur. Burada $x,y,z \ldots \in X$ noktaları ile belirlenen $d(x,y)$ reel sayısına ve x ve y noktaları arasındaki uzaklık denir.

Bağlantılı Bölge :

X bir metrik uzay ve A bu uzayın bir alt kümesi olsun. A kümesi boştan farklı, ayrık iki açık alt kümenin birleşimi olarak gösterilemezse, A kümesine bağlantılıdır denir. Yani, $B,C \neq \emptyset$, B,C : açık kümeler; $B,C \subset A$ ve $B \cap C = \emptyset$ olmak üzere, $A = B \cup C$ olacak şekilde B ve C kümeleri bulunamıyorsa A kümesi bağlantılıdır denir. Boştan farklı, açık, bağlantılı bir kümeye "Bölge" denir. Sonsuz noktasının düzleme katılmasıyla meydana gelen düzleme "Genişletilmiş Düzlem" denir.

Bir bölgenin tamamlayıcısı, genişletilmiş düzleme nazaran bağlantılı ise; bu bölgeye "Basit Bağlantılı Bölge" denir.

Analitik Fonksiyon :

Ω basit bağlantılı bölge olsun. f(z) bu bölgede tanımlı bir fonksiyon olmak üzere bölgede türevi haiz bir fonksiyon ise, f(z) fonksiyonuna Ω bölgesinde "Analitik Fonksiyon" denir.

1.1. Pozitif Reel Kısmı Haiz Fonksiyonlar Sınıfı :

Tanım 1.1.1. P(z) birim dairede analitik ve P(0)=1, ReP(z)>0 koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olsun. P(z) fonksiyonuna, birim çemberde "pozitif reel kısmı Haiz Fonksiyon" denir. Bu tür fonksiyonların oluşturduğu sınıfa "pozitif reel kısmı Haiz Fonksiyonlar Sınıfı" denir. P(0)=1 koşulundan dolayı bu sınıfa ait fonksiyonların Taylor açılımı :

$$P(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots\ldots$$

şeklindedir ve bu sınıf genel olarak P harfi ile gösterilir. Bu sınıfın iyice anlaşılabilmesi için;

$$P_*(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonunun incelenmesi gerekir. $P_*(z)$ fonksiyonu P sınıfı içerisinde birçok eşitsizlik için extremal fonksiyondur.

$$\text{(1)}\quad \operatorname{Re}P_*(z) = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1+z}{1-z} + \overline{\frac{1+z}{1-z}}\right]$$

$z = x+iy$

$$= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1-x)^2+y^2}$$

dir.

(2) $$\operatorname{Im} P_*(z) = \operatorname{Im} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1+z}{1-z} - \overline{\frac{1+z}{1-z}}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2} = \frac{2y}{(1-x)^2+y^2}$$

dir.

(1) için : $\operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$

$|z|<1$ ise $1-|z|^2>0$ ve $|1-z|^2>0$ olup ;

$\operatorname{Re} P_*(z)>0$ dır.

$$P_*(z) = (1+z)\frac{1}{1-z} = (1+z)(1+z+z^2+z^3+\dots)$$

$$= 1+2z+2z^2+2z^3+\dots$$

$$= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

olur ki, $P_*(0) = 1$ dir.

Ayrıca $P_*(z)$, D'de analitiktir. Buradan,

$$P_*(z) \varepsilon P$$

olur.

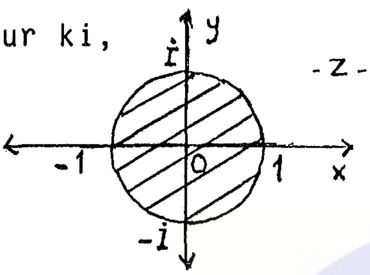
$P_*(z)$ fonksiyonu ile birim dairenin resmedildiği bölgeyi bulalım:

z - düzlemindeki bazı noktaları incelersek;

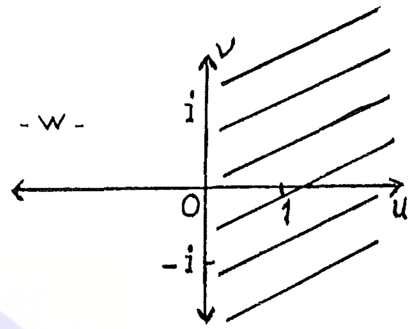
$P_*(-1) = \frac{1-1}{1+1} = 0 \qquad P_*(1) = \frac{1+1}{1-1} = \infty$

$P_*(0) = \frac{1+0}{1-0} = 1 \qquad P_*(i) = \frac{1+i}{1-i} = i \qquad P_*(-i) = \frac{1-i}{1+i} = -i$

olur ki,



$P_*(z) = \frac{1+z}{1-z}$



$P_*(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu birim daireyi W-düzleminde, sağ yarım düzleme dönüştürür. Birim çember ise u=0 doğrusuna dönüşür. Şimdi $P_*^{-1}(W)$ fonksiyonunu inceleyelim.

$$W = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad z = \frac{W-1}{1+W} \quad \text{ise} \quad P_*^{-1}(W) = \frac{W-1}{W+1} \quad \text{olur ki,}$$

bu fonksiyon da W- düzlemindeki sağ yarım düzlemi, z üzerinde birim daireye resmeder.

$$|P_*^{-1}(W)| = \left|\frac{W-1}{W+1}\right| \leq 1 \quad \text{dir ve} \quad W = P_*(z) \varepsilon P \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki bilgilerin ışığında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

<u>Teorem 1.1.1</u>. $f(z)$ pozitif reel kısmı haiz bir fonksiyon olsun. $g(z)$, birim çemberde analitik $|g(z)|<1$, $g(0)=0$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonu $\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonuna Sabordine olduğundan $f(z) = \frac{1+g(z)}{1-g(z)}$ veya $g(z) = \frac{f(z)-1}{1+f(z)}$ bağıntıları yazılabilir.

$$f(z) = \frac{1 + g(z)}{1 - g(z)} \qquad \text{veya} \qquad g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}$$

yazılabilir.

Teorem 1.1.2. p(z) P olsun. Bu takdirde,

$\mathrm{Re}P(z) = \dfrac{1 - |g(z)|^2}{|1 - g(z)|^2} > 0$ olup, burada g(z), Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir fonksiyondur.

Bu takdirde ;

$$p(z) = \frac{g(z) + 1}{1 - g(z)}$$

olur ki,

$$\mathrm{Re}P(z) = \frac{1 - |g(z)|^2}{|1 - g(z)|^2} > 0 \quad \text{ve} \quad P(0) = \frac{1 + g(0)}{1 - g(0)} = 1$$

dir.

Lemma 1.1.1. $|z| < 1$ ise $\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right| \leqq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$

dir.

Lemma 1.1.2. $P(z) \in P$ ise $\dfrac{1}{P(z)} \in P$

dir.

Teorem 1.1.3. (P sınıfının distorsiyon teoremi)

$P(z) \in P$ ise ;

(i) $$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leqq |P(z)| \leqq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

(ii) $|P'(z)| \leq \frac{2}{[1-|z|]^2}$

(iii) $|P'(0)| \leq 2$

Teorem 1.1.4. $P(z) \varepsilon P$ olmak üzere $0 \leq t \leq 2\pi$ ve $|z| < r$ için,

$$\gamma(t,r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{Re} P(re^{i\tau}) d\tau$$

şeklinde tanımlanan pozitif, monoton artan ve $\gamma(2\pi,r)=1$, $\gamma(0,r)=0$ özelliklerini gerçekleyen bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyon için $n \to \infty$ ve $r \to 1$ olmak üzere öyle bir $\{r_n\}$ dizisi bulanabilir ki ; $\gamma(t,r_n)$ fonksiyonu bütün süreklilik noktaları için, monoton artan bir $\gamma(t)$ fonksiyonuna yakınsar.

1.2. Yalınkat Fonksiyonlar, S ve $\sum$ Sınıfları :

Tanım 1.2.1 Bir D bölgesinde tanımlı, sürekli ve analitik olan f(z) fonksiyonu eğer $\forall z_1 \neq z_2$ için $f(z_1) \neq f(z_2)$ koşulunu gerçeklerse; f(z) ye "Yalınkat fonksiyondur" denir.

Tanım 1.2.2. $D = \{z \mid |z|<1\}$

$\Delta = \{z \mid |z|>1\}$

$\partial D = \partial \Delta = \{z \mid |z| = 1\}$

olmak üzere S ve $\sum$ sınıflarını tanımlayalım.

$$S = \{f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \mid f(z) : D \text{ de yalınkat}\}$$

$$\sum = \{g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \mid g(z) : \Delta \text{ da yalınkat}\}$$

$\sum$ sınıfında, b_0 katsayısına g(z) fonksiyonu ile yapılan tasvirde resim bölgesinin "Konform Merkezi" adı verilir ve

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\vartheta})d\vartheta$$

olarak tanımlanır. Ayrıca önemle belirtmek gerekir ki, $f(z)\varepsilon S$ ise $f(z) = z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ açılımını haiz olup $a_1=1$ olacak şekilde normalize edilmiştir.

Teorem 1.2.1. Yalınkat iki fonksiyonun bileşkesi de yalınkattır.

Teorem 1.2.2. $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun yalınkat olması için gerek ve yeter koşul f(z) fonksiyonunun yalınkat olmasıdır.

Lemma 1.2.1 f(z) fonksiyonu bir Ω bölgesinde analitik ve yalınkat olsun. Bu durumda f(z) fonksiyonu ile yapılan tasvirde;

$$\text{Alan } f(\Omega) = \iint_A |f'(z)|^2 \, d\Omega$$

dır.

Sonuç 1.2.1. $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}$$

Parseval idantikliği ile Lemma 1.2.1 birleştirilirse, bir $f(\Omega)$ tasvir bölgesinin alanı, şu şekilde belirlenebilir:

$$\text{Alan } f(\Omega) = \iint_{f(\Omega)} |f'(z)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\vartheta})|^2 d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 r^{2n}$$

Teorem 1.2.3. (Alan teoremi)

$g(z) \in \Sigma$ olsun. Bu takdirde ;

$$\text{Alan } (g(\Delta)) = \pi(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2)$$

dir.

İspat : $g(z) \in \Sigma$ ise $g(z) = z+b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\ldots\ldots$

fonksiyonu Δ da yalınkattır. Teorem, Σ sınıfına ait bir $g(z)$ fonksiyonu ile Δ nın resmedildiği bölgenin alanını verir. Sonuç 1.2.1'e göre, analitik bir fonksiyon ile yapılan tasvirde, tasvir bölgesinin alanının :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \overline{h(W)}\, h'(W)\, dW = \frac{1}{\pi} \iint_{H(r)} |h'(W)|^2 d\Omega$$

olduğu biliniyor. Bu eşitlikte $h(W) = W$ alınırsa,

$\overline{h(w)} = \overline{w}$ ve $h'(w)dw = dw$ olur.

$w = g(z)$ ise $\overline{w} = \overline{g(z)}$ ve $g'(z)dz = dw = h'(w)\, dw$ dır.

Ayrıca, $z = re^{it}$ kutupsal gösterilimine geçilirse;

$dz = ire^{it}dt$ ise $dW = g'(z)dz = g'(re^{it})ire^{it}dt$ ve

$\bar{W} = \overline{g(re^{it})}$ eşitlikleri bulunur, buradan

$$\frac{1}{\pi} \text{Alan } H(r) = \frac{1}{\pi} \iint_{H(r)} |h'(W)|^2 dW = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \overline{h(W)}\, h'(W) dW$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} \bar{W} dW$$

$$\frac{1}{\pi}\,\text{Alan } H(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(r)} \overline{g(z)}\; g(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} re^{it}\, g'(re^{it}).\ \overline{g(re^{it})}\, dt$$

eşitliği elde edilir.

Burada ;

$$g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

fonksiyonunda, b_0 katsayısına resim bölgesinin konformluk merkezi adı verilir.

$$g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

yazılabilir. Buradan,

$$g(re^{it}) = re^{it} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{-n} e^{-int}$$

ve

$$\overline{g(z)} = \overline{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n}\ \overline{z^{-n}}$$

ise

$$\overline{g(re^{it})} = re^{-it} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b}_n r^{-n} e^{int}$$

olur. Ayrıca

$$g'(re^{it})\, dt = i\,(re^{it} - \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-n} b_n e^{-int})\, dt$$

olur.

Böylece,

$$g'(re^{it}).\overline{g(re^{it})} = i(re^{it} - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n r^{-n} e^{-int})(re^{-it} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n . r^{-n} e^{int})$$

$$\frac{1}{\pi} \text{Alan } H(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 . r^{-2n}) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \; r^{-n+1} \; e^{-i(n+1)t} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{-n+1} \; e^{i(n+1)t}) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}) dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} nb_n r^{-n+1} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)t} dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt$$

elde edilir.

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0 & : \; k \epsilon Z^+ U Z^- \quad \text{ise} \\ 2\pi & : \; k = 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olduğuna göre $n+1 \neq 0$ alınacağından,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)t} dt = 0$$

dir. Buna göre

$$\frac{1}{\pi} \text{Alan } H(r) = \frac{1}{2\pi} (r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}) \int_0^{2\pi} dt$$

$$\frac{1}{\pi} \text{ Alan } H(r) = r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}$$

elde edilir. Bu adımda $r \to 1$ alınırsa,

$$\frac{1}{\pi} \text{ Alan } (g(\Delta)) = (1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2)$$

$$\text{Alan } (g(\Delta)) = \pi(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2)$$

olduğu görülür.

<u>Sonuç 1.2.2.</u> $g(z) \epsilon \sum$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$

dir.

<u>Sonuç 1.2.3.</u> $g(z) \epsilon \sum$ ise $|b_1| \leq 1$

dir. Eşitlik yalnızca $g(z) = z + b_0 + e^{2i\beta} z^{-1}$ ekstremal fonksiyonu için vardır.

<u>Teorem 1.2.4.</u> $f(z) \epsilon S$ ise $|a_2| \leq 2$

dir.

<u>Not :</u> Bu teorem "$f(z) \epsilon S$ ise $|a_n| \leq n$" ifadesiyle verilen Bierberbach tahmininin $n=2$ için özel şeklidir.

1.3. <u>Yıldızıl Yalınkat Fonksiyonlar Sınıfı :</u>

<u>Tanım 1.3.1.</u> $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere;

$$W = f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonu ile D bölgesinin tasviri f(D) için, $W\epsilon f(D)$'ye karşılık; $tW\epsilon f(D)$ koşulu gerçeklenirse; f(D) bölgesine, başlangıç noktasına göre "Yıldızıl Bölge" denir. Veya değişik bir tanımla : W: düzleminde başlangıçtan geçen bir doğru f(D) bölgesinin sınırını en fazla bir noktada keserse, f(D) "Yıldızıl Bölge" adını alır.

<u>Tanım 1.3.2.</u> $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $D = \{z \mid |z|<1\}$ de yalınkat ve analitik olsun. Bu takdirde, f(z) fonksiyonunun D'yi tasvir ettiği bölge, başlangıç noktasına göre yıldızıl ise f(z) fonksiyonuna "Yıldızıl Yalınkat Fonksiyon " denir.

<u>Teorem 1.3.1.</u> $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun D de yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul :

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} \epsilon P$$

olmasıdır.

<u>Teorem 1.3.2.</u> $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun D de yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul : $\gamma(t)$: $\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$ koşulunu gerçekleyen ve t nin artan bir fonksiyonu olmak üzere

$$f(z) = a_1 z \operatorname{Exp}[2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1-2e^{it}} d\gamma(t)]$$

olmasıdır.

Teorem 1.3.3. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu D de yıldızıl ise, $|a_n| \leq n$ dir.

Eşitlik yalnız ve ancak aşağıdaki Extremal fonksiyonlar için sağlanır :

$$f_1(z) = \frac{z}{(i+e^{i\beta}z)^2} .$$

1.4. Konveks Yalınkat Fonksiyonlar Sınıfı :

Tanım 1.4.1. Bir Ω bölgesi gözönüne alındığında, $0 \leq t \leq 1$ için, $z_1, z_2 \in \Omega$ olmak üzere, $tz_1 + (1-t)z_2 \in \Omega$ oluyorsa, Ω bölgesine "Konveks Bölge" denir. Yani, Ω bölgesinde alınan $z_1 \neq z_2$ noktalarını birleştiren doğru tamamen Ω bölgesi için kalıyorsa Ω konveks bir bölgedir.

Tanım 1.4.2. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu D de analitik ve yalınkat olsun. Eğer birim dairenin f(z) fonksiyonu ile yapılan tasvirde, resim bölgesi konveks ise, f(z) fonksiyonuna birim dairede "Konveks Yalınkat Fonksiyon" denir.

Teorem 1.4.1. $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$ analitik fonksiyonunun D de konveks olması için gerek ve yeter koşul $1+z\frac{f''(z)}{f'(z)} \in P$ olmasıdır.

Sonuç 1.4.1. f(z) konveks ise $\mathrm{Re}\, z \frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}$ dir.

Yani her konveks fonksiyon $\frac{1}{2}$·mertebeden yıldızıl fonksiyondur.

Tanım 1.4.3. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu, birim dairede analitik ve yalınkat olsun. $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\{1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\}>\alpha$$ koşulu gerçeklenirse, $f(z)$ ye birim dairede α .mertebeden "Konveks Fonksiyon " denir.

Teorem 1.4.2. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu konveks ise,

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{a_1 z} \geq \frac{1}{2}$$

dir.

Teorem 1.4.3. $f(z)$ fonksiyonunun D'de konveks olması için gerek ve yeter koşul $zf'(z)$ fonksiyonunun D'de yıldızıl olmasıdır. Bu, Teorem 1.3.1 ve Teorem 1.4.1. bir sonucudur.

Teorem 1.4.2. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu D'de konveks ise $|a_n| \leq 1$ dir.

1.5. α-Spirallike Fonksiyon Sınıfları :

Tanım 1.5.1. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu D'de analitik yalınkat ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ koşulları ile normalize edilmiş olsun. Eğer $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)} > 0$$

koşulu gerçeklenirse, $f(z)$ fonksiyonuna α - "Spirallike Fonksiyon "denir, ve $f \in SP(\alpha)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.5.1 $f\varepsilon SP(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul $-1<k<1$ ve $z\varepsilon D$ olmak üzere,

$$Re\left[\frac{kf(z)}{f(kz)}\right]e^{i\alpha}/\ 2\cos\alpha > \frac{k+1}{2},$$

olmasıdır.

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

ise

$$Re\ e^{i\alpha}\ \frac{2f'(z)}{f(z)} > 0$$

dir.

$$e^{i\alpha}\ \frac{zf'(z)}{f(z)} = \cos\alpha + i\sin\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}\left[e^{i\alpha}\ \frac{zf'(z)}{f(z)} - i\sin\alpha\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n \equiv P(z)$$

$$P(z) = \frac{(1+z)}{(1-z)}, \qquad s = e^{-i\alpha}\cos\alpha$$

olmak üzere,

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^{2s}}, \qquad \alpha - \text{spiral Koebe fonksiyonudur.}$$

II. BÖLÜM

2.1. Pozitif Reel Kısmı Haiz Fonksiyon Sınıfları İçin Katsayı Teoremleri :

Teorem 2.1.1. $P(z)\varepsilon P$ olsun. $c_0=2$, $c_{-k}=\bar{c}_k$ $(k\geq 1)$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m} c_{k-\ell}\lambda_k\bar{\lambda}_\ell \geq 0$$

dır. $(m = 1,2,\ldots,\infty)$ ve $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m \varepsilon C)$ dir.

Lemma 2.1.1. $P(z) = 1+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n \varepsilon P$

ise

$$|C_n|\leq 2$$

dir.

Teorem 2.1.2. $\sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m} C_{k-\ell}\lambda_k\bar{\lambda}_\ell > 0$

eşitsizliğini; $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_m \varepsilon C$ sayıları gerçeklesin ve $C_0=0$ $C_{-k}= \bar{C}_k$ olsun. Bu eşitsizlik, $m=1,2,\ldots$ değerleri için varsa $P(z)\varepsilon P$ dir.

2.2. Yalınkat Fonksiyonlarda Katsayı Teoremleri :

$f(z) \varepsilon S$ olsun. Bu fonksiyonun $z=0$ noktasındaki Taylor açılımı $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots$ ise Bieberbach tahmini $|a_n| \leqq n$ dir, ve 1985 yılında De Branges tarafından ispatlanmıştır .

Teorem 2.2.1. $f(s) \varepsilon S$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu ile yapılan tasvirde, sınır noktalarının $w=0$ noktasına olan uzaklıkları 1/4 den küçük olamaz.

İspat : c, D bölgesinin dışında herhangi bir nokta olsun,

$$g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)}$$

fonksiyonunu tanımlayarak $g(z) \varepsilon S$ olduğunu gösterelim

(1) $$g(0) = \frac{cf(0)}{c-f(0)} = 0$$

dır.

(2) $$g'(z) = \frac{cf'(z)(c-f(z))-(-f'(z)cf(z))}{(c-f(z))^2}$$

ise

$$g'(0) = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

dir.

(3) $z_1 = z_2$ için $g(z_1) = g(z_2)$ olmalı.

$f(z) \varepsilon S$ olduğundan $f(z_1) = f(z_2)$ dir.

$$\frac{cf(z_1)}{c-f(z_1)} = \frac{cf(z_2)}{c-f(z_2)}$$ olurki, $g(z_1) = g(z_2)$ dir.

(4) $f(z) \varepsilon S$ ve $f(z)$ fonksiyonu c değerini almasın, yani $f(z) \neq c$ olsun. Bu takdirde

$$g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)} = \frac{c(z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots)}{c-z-a_2z^2-a_3z^3-\ldots}$$

fonksiyonu birim çemberde analitik ve yalınkattır, dolayısıyla

$$g(z) = z + \frac{1}{c}(ca_2+1)\, z^2+\ldots\ldots$$

açılımını haizdir, buradan

Bieberbach tahminine göre ;

$$\left|\frac{1}{c}\,(ca_2+1)\right|\leq 2 \qquad \text{ise} \quad \left|a_2+\frac{1}{c}\right|\leq 2 \quad :$$

$$\left|\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{c} + a_2-a_2\right|\leq\left|\frac{1}{c} + a_2\right|+\left|-a_2\right|\leq 2+2 \quad \text{ise}$$

$|c|>\frac{1}{4}$ bulunur. O halde sınırdaki noktaların w- düzlemindeki resimleri hiç bir zaman 1/4 den küçük olamaz.

2.3. Yıldızıl Yalınkat Fonksiyonlarda Katsayı Teoremleri :

Teorem 2.3.1. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$

yıldızıl bir fonksiyon ise her bir n pozitif değeri için

$$|a_n| \leq n$$

dir.

<u>İspat :</u> f(z) yıldızıl ise $\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$ dir.

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k = g(z),$$

$k = 1,2,\ldots$ için $|b_k| \leq 2$

dir.

$$z + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^k = (z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k)(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k)$$

olur.

$n = 3,4,5$ için z^n nin katsayıları

$$n a_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k + b_{n-1}$$

$n = 2$ için $2a_2 = a_2 + b_1$ ve böylece $|a_2| = b_1 \leq 2$

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{olmak üzere}$$

$|a_k| \leq k$ $\qquad k = 2,3,\ldots,n-1$ için

$$|(n-1)a_n| = |\sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} b_k + b_{n-1}| \leq \sum_{k=1}^{n-2} 2|a_{n-k}| + 2 \leq$$

$$\leq 2(1 + \sum_{k=2}^{n-1} k) = (n-1)\, n$$

Buradan $|a_n| \leq n$ elde edilir.

2.4. Konveks Fonksiyonlarda Katsayı Teoremleri :

Teorem 2.4.1. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$

konveks bir fonksiyon olsun. O halde herbir a_k pozitif değeri için,

$$|a_k| \leq 1$$

dir.

İspat : f(z) konveks ise,

$$zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$$

yıldızıdır,

$n|a_n| \leq n$ (Teorem 2.3.1.) olduğundan $|a_n| \leq 1$ dir.

$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \ldots$ olduğu için

$$|a_n| \leq 1$$

dir. Eğer n=2 için $|a_n| = 1$ ise $zf'(z)$, Koebe fonksiyonunun bir dönüşümüdür.

2.5. α - Spirallike Fonksiyonlarda Katsayı Teoremleri :

Teorem 2.5.1. Eğer $f(z) \varepsilon SP(\alpha)$ ise her bir $n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|k+2s-1|}{k} = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} ((k-1)^2 + 4k\cos^2\alpha)^{1/2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : $\frac{z f'(z)}{f(z)} = 1 + s\ (p(z)-1)$

$$P(z) = \frac{1+b(z)}{1-b(z)} \quad \text{veya} \quad P(z)-1 = \frac{2b(z)}{1-b(z)}$$

$$b(z)(zf'(z)+(2s-1)f(z)) = zf'(z)-f(z)$$

$$b(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$$

ise

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} (k+2s-1)a_k z^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\ a_k z^k$$

dır.

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} |k+2s-1|^2 .\ |a_k|^2$$

veya

$$(n-1)^2 |a_n|^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} [\,|k+2s-1|^2 - (k-1)^2\,] |a_k|^2$$

veya

$$|a_n|^2 \leq \frac{4\cos^2\alpha}{(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} k |a_k|^2$$

$a_1 = 1 \qquad |a_2| \leq 2\cos\alpha \qquad |a_3| \leq \cos\alpha(1+8\cos^2\alpha)^{1/2}$

dir.

2.6, Kuvvet Serileri Üzerine Bazı Katsayı Teoremleri :

Teorem 2.6.1. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu birim dairede analitik olsun ve birim dairede orjindeki değerinden hariç diğer noktalarda sıfırları olmasın. Bu takdirde,

$$\phi(\xi) = \frac{1}{[f(1/\xi^k)]^{1/k}} = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nk-1}}{\xi^{nk-1}}$$

dir. Burada,

$$\gamma(k,m) = (k+1)(2k+1)(3k+1)\ldots(mk+1) = \prod_{j=1}^{m} (jk+1)$$

$$\gamma(k,0) = 1$$

olmak üzere,

$$C_{nk-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \gamma(k,m-1)}{k^m} \left(\sum_{\sigma_m(n)} \frac{a_2^{r_1} . a_3^{r_2} . a_4^{r_3} \ldots a_{n+1}^{r_n}}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \ldots r_n!} \right)$$

olup, $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n)$, n'lileri negatif olmayan tamsayılardır.

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \ldots + nr_n = n$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = m$$

denklemleri gerçeklenir.

Uygulama : n= 2,3,...,6 için formülleri hesaplayalım.

Yukarıdaki formülleri kullanarak,

$n = 1 \quad , \quad m = 1 \quad \text{için} \quad r_1 = 1 \quad :$

$$C_{k-1} = \frac{(-1)\gamma(k,0)}{k} \cdot \frac{a_2^{r_1}}{r_1!} = -\frac{1}{k} a_2$$

$n = 2$ için $\begin{matrix} r_1+2r_2=2 \\ r_1+r_2=1 \end{matrix}$ ise $\begin{matrix} r_1=0, r_2=1 \\ m=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} r_1+2r_2=2 \\ r_1+r_2=2 \end{matrix}$ ise $\begin{matrix} r_1=2, r_2=0 \\ m=2 \end{matrix}$

$$C_{2k-1} = \frac{(-1)\gamma(k,0)}{k} a_3 + \frac{(-1)^2\gamma(k,1)}{k^2} \frac{a_2^2}{2!} = -\frac{1}{k} a_3 + \frac{k+1}{2k^2} a_2^2$$

$n=3$ için $\begin{matrix} r_1+2r_2+3r_3=3 \\ r_1+r_2+r_3=1 \end{matrix}$ ise $\begin{matrix} r_3=1 \\ r_1=r_2=0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} r_1+2r_2+3r_3=3 \\ r_1+r_2+r_3=2 \end{matrix}$ ise $\begin{matrix} r_3=0 \\ r_1=r_2=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} r_1+2r_2+3r_3=3 \\ r_1+r_2+r_3=3 \end{matrix}$

ise $\begin{matrix} r_1=3 \\ r_2=r_3=0 \end{matrix}$

$$C_{3k-1} = \frac{(-1)}{k} a_4 + \frac{(-1)^2 k+1}{k^2} a_2 a_3 + \frac{(-1)^3(k+1)(2k+1)}{6k^3} a_2^3$$

$n=4$ için $\begin{matrix} r_1+2r_2+3r_3+4r_4=4 \\ r_1+r_2+r_3+r_4=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} r_4=1 \\ m=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} m=2 \rightarrow r_1=r_3=1 \\ m=3 \rightarrow r_1=2, r_2=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{veya } r_2=2 \\ m=4 \quad r_1=4 \end{matrix}$

$$C_{4k-1} = \frac{(-1)}{k} a_5 + \frac{k+1}{k^2} a_2 a_4 + \frac{k+1}{2k^2} a_3^2 - \frac{(2k+1)(k+1)}{2k^3} a_2^2 a_3 + \frac{(3k+1)(2k+1)(k+1)}{24k^4} a_2^4$$

$n=5$ için $\begin{matrix} r_1+2r_2+3r_3+4r_4+5r_5=5 \\ r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \rightarrow r_2=r_3=1 \\ \rightarrow r_1=r_4=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} m=1 \rightarrow r_5=1 \\ m=3 \rightarrow r_2=2, r_1=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} m=4 \rightarrow r_1=3 \\ r_2=1 \end{matrix}$

$$C_{5k-1}=-\frac{1}{k}a_6+\frac{k+1}{k^2}a_2a_5+\frac{k+1}{k^2}a_3a_4-\frac{\gamma(k,2)}{2k^3}(a_2^2a_4+a_2a_3^2)+\frac{\gamma(k,3)}{6k^4}a_2^3a_3-\frac{\gamma(k,4)}{120k^5}a_2^5$$

$n = 6$ için : $\begin{array}{l} r_1+2r_2+3r_3+4r_4+5r_5+6r_6=6 \\ r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6=1 \end{array} \rightarrow r_6=1,\ldots.$

$$C_{6k-1}=-\frac{1}{k}a_7+\frac{k+1}{2k^2}(2a_2a_6+2a_3a_5+a_4^2)-\frac{\gamma(k,2)}{6k^3}(3a_2^2a_5+6a_2a_3a_4+a_3^3)+$$

$$+\frac{\gamma(k,3)}{12k^4}(2a_2^3a_4+3a_2^2a_3^2)-\frac{\gamma(k,4)}{24k^5}a_2^4a_3+\frac{\gamma(k,5)}{720k^6}a_2^6.$$

Teorem 2.6.2. C_{nk-1} katsayıları aynı zamanda,

$$C_{nk-1}=\frac{(-1)^n}{n!k^n}\begin{vmatrix} a_2 & k & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & (k+1)a_2 & 2k & \cdots & 0 \\ 3a_4 & (k+1)a_3 & (2k+1)a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & (n-1)k \\ na_{n+1} & (k+n-1)a_n & (2k+n-2) & \cdots & [(n-1)(k+1)]a_2 \end{vmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$A_{ij}=\begin{cases} i+(j-1)(k-1)\ a_{2+i-j} & i+1\geq j \quad \text{ise,} \\ 0 & i+1<j \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir.

<u>İspat</u> : $$\emptyset(\xi) = \frac{1}{[f(1/\xi k)]^{1/k}} = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nk-1}}{\xi^{nk-1}}$$

denkleminin türevini alırsak,

$$-\frac{1}{k}\frac{f'(1/\xi^k)}{[f(1/\xi^k)]^{1+1/k}} \cdot \frac{(-k)}{\xi^{k+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-nk)C_{nk-1}}{\xi^{nk}}$$

$$\frac{1}{\xi(f(1/\xi^k))^{1/k}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nk-1}}{(\xi^k)^n}$$

ve

$$\frac{1}{\xi^k} f'\left(\frac{1}{\xi^k}\right) = \frac{1}{\xi^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{(\xi^k)^n}$$

olur.

Burada $1/\xi^k$ yı z ile değiştirirsek ve $a_1=1$, $c_{-1}=1$ ifadelerini kullanırsak yukarıdaki denklem;

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_{nk-1} z^n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-nk)C_{nk-1} z^n\right)$$

Bu denklemin her iki tarafındaki z^{n+1} katsayıları, n+1 sabiti ile eşitlenirse,

$$\sum_{j=0}^{n} (jk+n-j)a_{n+1-j}C_{jk-1}=0, \qquad n=1,2,3...$$

$C_{-1}=1$ trivial olduğundan ilk n+1 denklem,

C_{-1}, C_{k-1}, C_{2k-1}, ..., C_{nk-1} değişkenlerinde lineerdir. Cramer yöntemi ile,

$$n=1 \text{ için : } \left.\begin{array}{lll} a_2C_{-1}=0, & c_{-1}=1 \to & a_2=0 \\ ka_1C_{k-1}=0, & a_1=1 \to & kC_{k-1} \end{array}\right\} \to a_2+kC_{k-1}=0$$

$$n=2 \text{ için : } \left.\begin{array}{ll} 2a_3C_{-1}=0 \quad , & 2a_3=0 \\ 2a_3+(k+1)a_2C_{k-1}+2ka_1C_{2k-1}=0 & \end{array}\right\} \to 2a_3+(k+1)a_2+2k=0$$

$$n=3 \text{ için : } 3a_4+(k+2)a_3+(2k+1)a_2+3k \quad =0 \qquad .....$$

A_{ij} ler i : sıra, j : sütun olmak üzere $a_1=C_{-1}=1$

$$A_{11}=\left\{\begin{array}{ll} [1+(1-1)(k-1)]a_{2+1-1} & 1+1\geq 1 \\ 0 & 1+1<1 \end{array}\right. \to A_{11}=a_2 \qquad 2\geq 1$$

$$A_{12}=\left\{\begin{array}{ll} [1+(2-1)(k-1)]a_{2+1-2} & 1+1\geq 2 \\ 0 & 1+1<2 \end{array}\right. \to A_{12}=k \qquad 2\geq 2$$

$$A_{23}=\left\{\begin{array}{ll} [(2+(3-1)(k-1) \; a_{2+2-3} & 2+1\geq 3 \\ 0 & 2+1<3 \end{array}\right. \to A_{23}=2k \qquad 3\geq 3$$

. . .

$$c_{nk-1} = \frac{(-1)^n}{n!k^n} \begin{vmatrix} a_2 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 2a_3 & (k+1)a_2 & 2k & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ na_{n+1} & \cdot & \cdot & \cdots & [(n-1)(k+1)]a_2 \end{vmatrix}$$

dir.

<u>Teorem 2.6.3.</u> Teorem 2.6.1 ve Teorem 2.6.2 de k yerine $-K$ konursa;

$$g(z) = (f(z^K))^{1/K} = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nK+1}\, z^{nK+1}$$

şeklinde bir ifade elde edilir. Burada b_{nK-1} katsayıları

$$b_{nK-1} = \frac{(-1)^n}{n!(-K)^n} \begin{vmatrix} a_2 & -K & \cdots & 0 \\ 2a_3 & (1-K)a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ na_{n+1} & \cdot & \cdots & [(n-1)(1-K)]a_2 \end{vmatrix}$$

veya

$$b_{nK-1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m \gamma(-K,m-1)}{(-K)^m} \cdot \Big(\sum_{\sigma_m(n)} \frac{a_2^{r_1} \cdots a_{n+1}^{r_n}}{r_1! \cdots r_n!} \Big)$$

ile verilir.

İspat : Teorem 2.6.1 ve Teorem 2.6.2 nin ispatından yararlanılarak benzer şekilde elde edilir.

$$n=1 \text{ için : } \frac{(-1)\gamma(K,0)}{(-K)} \quad \frac{a_2^{r_1}}{r\,!} = b_{K-1} = \frac{1}{K}\, a_2$$

$$n=2 \text{ için : } \frac{(-1)\gamma(-K,0)}{(-K)}\, a_3 + \frac{(-1)^2\gamma(-K,1)}{(-K)^2}\, a_2^2$$

$$= b_{2K-1} = \frac{1}{K}\, a_3 + \frac{1-K}{2K^2}\, a_2^2$$

Teorem 2.6.4. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ birim dairede analitik olsun ve orjinden hariç noktalarda sıfırları olmasın. Bu takdirde $\alpha \neq 0$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\left[\frac{z}{f(z)}\right]^{\alpha/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$ açılımındaki b_n katsayıları

$b_n = C_{nk-1}$, $k = \frac{2}{\alpha}$ şeklinde ifade edilebilirler.

İspat : $f(z) \varepsilon S$ ve $\frac{f(z)}{z}$, E de sıfırları haiz olmasın,

$$\emptyset\ (\xi) = \frac{1}{(f(1/\xi^k))^{1/k}} = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{nk-1}}{\xi^{nk-1}}$$

$1/\xi^k$ yerine z yazarsak;

$$\frac{1}{(f(z))^{1/k}} = \frac{1}{z^{1/k}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk-1} z^{n-1/k}$$

herhangi bir $\alpha \varepsilon R$ için $1/k$ yerine $\alpha/2$ yazarsak $k = \frac{2}{\alpha}$

$$\frac{1}{(f(z))^{\alpha/2}} = \frac{1}{z^{\alpha/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-\alpha/2}$$

$z^{\alpha/2}$ ile her iki tarafı çarparsak;

$$h(z) = \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{-\alpha/2} = \left(\frac{z}{f(z)}\right)^{\alpha/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

elde edilir.

<u>Teorem 2.6.5.</u> $\omega = f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu birim dairede analitik ve orjindeki değerinden hariç noktalarda sıfır olmasın. Bu fonksiyonun maküs fonksiyonu;

$$z = g(\omega) = \omega + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \omega^n$$

ise bu takdirde,

$$b_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [h(z)]^{-n} \Big|_{z=0}$$

dır.

<u>İspat :</u> $f(z) = z$ fonksiyonu birimdairede analitik ve $h(z) = \frac{f(z)}{z} = 1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}$ olsun.

C, z-düzlemi için orjin civarında küçük bir daire,

Γ, w-düzleminde, C'nin f(z) altındaki resmi olsun,

$$F(z) = F(g(\omega)) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \omega^n \qquad \text{ise,}$$

Cauchy formülünden,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{\omega^{n+1}} d\omega$$

$\Gamma \to C$ ve $\omega \to z$ integrali değiştirirsek,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)\, f'(z)}{(f(z))^{n+1}} dz$$

$U=F(z)$ ve $dV=(f(z))^{-(n+1)} f'(z)dz$, $(n\neq 0)$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \Delta c \frac{F(z)}{-n(f(z))^n} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'(z)}{n(f(z))^n} dz$$

burada ilk terim sıfır olduğundan,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'(z)}{n(f(z))^n} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'(z)}{nz^n(h(z))^n} dz$$

Bu denklemin sağ tarafı z^{n-1} in katsayılarıdır.

$(F'(z)/\ n(h(z))^n$ için MacLaurin serisinde)

Sonuç olarak,

$$C_n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{F'(z)}{n(h(z))^n} \right] \Bigg|_{z=0}$$

ve

$$F(z)=F(0)+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{F'(z)}{(h(z))^n} \right] \right) \Bigg|_{z=0}$$

dır.

$F(z)=z$ ise $f(s)$ ve $g(\omega)$ maküs fonksiyonundan,

$$b_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (h(z))^{-n} \Bigg|_{z=0}$$

dır.

Örnek : Eğer $\omega = ze^{-Az}$ ise maküs fonksiyonu için MacLaurin serisi bul ve serisinin yakınsaklık yarıçapı?

Çözüm : $h(z) = e^{-Az}$ olsun.

$$b_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (e^{Anz}) \Bigg|_{z=0} = \frac{A^{n-1} \cdot n^{n-1}}{n!} \quad \text{ve}$$

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}\, n^{n-1}}{n!} \omega^n$$

dir.

Oran testinden yukarıdaki seri $|\omega|<1/_{|A|e}$ için yakınsaktır.

Teorem 2.6.6. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu birim dairede analitik olsun ve birim dairede orjindeki değerinden hariç diğer noktalarda sıfırları olmasın. Bu fonksiyonun maküs fonksiyonu;

$$z = g(\omega) = \omega + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \omega^n$$

ise bu takdirde $n \geq 2$ için ;

$$b_n = \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{n!} \left(\sum_{\sigma_m(n-1)} \frac{a_2^{r_1} . a_3^{r_2} \ldots a_n^{r_{n-1}}}{r_1 ! r_2 ! \ldots r_{n-1}!} \right)$$

dir.

Uygulama : $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ in $(n-1)$lileri, $\sigma_m(n-1)$de negatif olmayan tamsayılar ve $\sigma_m(n-1)$ bu $(n-1)$ lilerin bir cümlesi

$$r_1 + 2r_2 + \ldots + (n-1) r_{n-1} = n-1$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} = m$$

olmak üzere,

$n = 2$ için : $r_1 = 1$, $m = 1$

$$b_2 = \frac{(-1)\ (2+1-1)!}{2!} \cdot \frac{a_2}{1!} = -a_2$$

$n=3$ için : $\begin{matrix} r_1 + 2r_2 = 2 \\ r_1 + r_2 = 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} r_2 = 1 \\ r_1 = 0 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} r_1 + 2r_2 = 2 \\ r_1 + r_2 = 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} r_2 = 0 \\ r_1 = 2 \end{matrix}$

$$b_3 = \frac{(-1)^1(3+1-1)!}{3!}\,\frac{a_3}{1!} + \frac{(-1)^2(3+2-1)!}{3!}\,\frac{a_2^2}{2!} = -a_3 + 2a_2^2$$

n=4 için $\quad r_2+2r_2+3r_3=3 \quad r_3=1 \quad m=2 \to r_1=r_2=1$

$\qquad\qquad r_1+r_2+r_3 = 1 \quad \to \quad r_1=r_2=0 \quad m=3 \to r_1=3$

$$b_4 = \frac{(-1)(4+1-1)!}{4!}\,a_4 + \frac{(-1)^2(4+2-1)!}{4!}\,a_2a_3 + \frac{(-1)^3(4+3-1)!}{4!}\,.\,\frac{a_2^3}{3!}$$

$b_4 = -a_4+5a_2a_3-5a_2^3$ . ....

<u>Teorem 2.6.7.</u> $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu birim dairede analitik olsun ve birim dairede orjindeki değerinden hariç diğer noktalarda sıfırları olmasın. Bu takdirde maküs fonksiyon;

$$z = g(\omega) = \omega + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \omega^n$$

ise

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\begin{vmatrix} na_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2na_3 & (n+1)a_2 & 2 & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & (n-2) \\ (n-1)na_n & ((n-2)n+1)a_{n-1} & . & \cdots & (2n-2)a_2 \end{vmatrix}$$

ile belirlenir.

Uygulama : $A_{ij} = \begin{cases} [(i-j+1)n+j-1]a_{i-j+2} & i+1 \geq j \\ 0 & i+1<j \end{cases}$

olmak üzere,

$$A_{11} = (1-1+1)n+1-1)a_{1-1+2} \qquad 1+1 \geq 1 \qquad = na_2$$

$$A_{12} = (1-2+1)n+2-1)a_{1-2+2} \qquad 1+1 \geq 2 \qquad = a_1 = 1$$

$$b_2 = \frac{(-1)^3}{2!} 2a_2 = -a_2$$

$$b_3 = \frac{(-1)^4}{3!} \begin{vmatrix} 3a_2 & 1 \\ 6a_3 & 4a_2 \end{vmatrix} = 2a_2^2 - a_3$$

$$b_4 = \frac{(-1)^5}{4!} \begin{vmatrix} 4a_2 & 1 & 0 \\ 8a_3 & 5a_2 & 2 \\ 12a_4 & 9a_3 & 6a_2 \end{vmatrix} = 5a_2a_3 - 5a_2^3 - a_4$$

$$b_5 = \frac{(-1)^6}{5!} \begin{vmatrix} 5a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 10a_3 & 6a_2 & 2 & 0 \\ 15a_4 & 11a_3 & 7a_2 & 3 \\ 20a_5 & 16a_4 & 12a_3 & 8a_2 \end{vmatrix} = 6a_2a_4 - 21a_2^2a_3 + 14a_2^4 + 3a_3^2 - a_5$$

Teorem 2.6.8. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = b_1 z + \ldots\ldots$ fonksiyonu birim dairede analitik ve $|f(z)|<1$ koşulunu gerçeklesin. Eğer $g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n$ fonksiyonu da birim dairede analitik ve $\mathrm{Re}\, g(z)>0$ koşulunu gerçeklerse; teorem 1.1.1'den

$$(*) \quad g(z) = \frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

yazılabilir veya tersine,

$$(*)(*) \quad f(z) = \frac{g(z)-1}{g(z)+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n$$

şeklinde ifade edilebilirler.

<u>İspat :</u> Mobius transformasyonlarından,

$$\omega = \frac{1+z}{1-z} \qquad \text{ve} \quad z = \frac{\omega-1}{\omega+1}$$

$|z|<1$'i $\mathrm{Re}\,\omega>0$ taşırsak ve tersine B_0 ve P sınıfları (*) ve (**) denklemleri ile ilgili olur. Gerçekten; bu denklemlerin herbiri için $f(z)\varepsilon B_0$ olması için gerek ve yeter koşul $g(z)\varepsilon P$ olmasıdır.

<u>Teorem 2.6.9.</u> Teorem 2.6.8. deki (*) ve (**) katsayıları $n \geq 1$ için,

$$P_n = 2 \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & -1 & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \cdots & -1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 \end{vmatrix}$$

Ve

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \begin{vmatrix} p_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots & p_1 & 2 \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_2 & p_1 \end{vmatrix}$$

dir.

Uygulama: $p_1 = 2b_1$

$p_2 = 2b_2 + 2b_1^2$

$$p_3 = 2\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \\ b_2 & b_1 & -1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix} = 2(b_1^3 + b_3 + b_1 b_2 + b_1 b_2) = 2b_1^3 + 4b_1 b_2 + 2b_3$$

$$P_4 = 2b_4 + 4b_1 b_3 + 2b_2^2 + 6b_1^2 b_2 + 2b_1^4$$

$$b_1 = \frac{1}{2} p_1 \quad , \quad b_2 = \frac{1}{4}(2p_2 - p_1^2), \quad b_3 = \frac{1}{8}(4p_3 - 4p_1 p_2 + p_1^3)$$

$$b_4 = \frac{1}{16}(8p_4 - 8p_1 p_3 - 4p_2^2 + 6p_1^2 p_2 - p_1^4)$$

Teorem 2.6.10. $P(z) = C_0 + C_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ $|z|<1$ analitik ve Re $(P(z))>0$, E içinde ise $n\geq 2$ için ve $s\geq 1$ için

$$\left| \frac{C_n}{C_0} - \frac{C_s C_{n-s}}{C_0} \right| \leq 2 \qquad \left| \frac{ReC_0}{C_0} \right| \leq 2$$

Bu eşitsizlikler bütün n ve s için geçerlidir.

$$p(z) = (ReC_0)\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + i \quad ImC_0 \qquad (ReC_0>0)$$

İspat : P(z) fonksiyonu, E'de analitik ve Re $P(z)>0$ ve $P(0)=C_0$ olduğundan

$$P(z) = (ReC_0)\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{1+e^{it_k}z}{1-e^{it_k}z} + i \quad ImC_0$$

ifadesine haizdir, buradan

$$\lambda_k \geq 0 \quad , \quad 1\leq k\leq m \qquad \text{ve} \qquad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$$

$$C_n = (ReC_0)\sum_{k=1}^{m} 2\lambda_k e^{int_k} \quad , \quad (n\geq 1)$$

dır. Dolayısiyle

$$\left|\frac{C_n}{C_0}-\frac{C_s C_{n-s}}{C_0^2}\right| = \left|\frac{ReC_0}{C_0}\sum_{k=1}^{m}2\lambda_k e^{int_k}-\left(\frac{ReC_0}{C_0}\right)^2\sum_{k=1}^{m}2\lambda_k e^{ist_k}\sum_{k=1}^{m}2\lambda_k e^{i(n-s)t_k}\right|$$

$$= 2\left|\frac{ReC_0}{C_0}\right|\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(e^{int_k}-2e^{i\,t_k}Q)\right|$$

$$= 2\left|\frac{ReC_0}{C_0}\right|\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k B_k\right| \leq 2\left|\frac{ReC_0}{C_0}\right|\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k |B_k|\right|$$

$$Q = \frac{ReC_0}{C_0}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\ e^{i(n-s)t_k}$$

olmak üzere ve

$$B_k = e^{int_k}-2\ e^{i\,t_k}Q \qquad 1\leq k\leq m$$

$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k |B_k| \leq 1$ olduğunu gösterelim.

Schwarz eşitsizliğinden;

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k|B_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sum_{k=1}^{m}\lambda_k|B_k|^2 = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k|B_k|^2$$

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k|B_k|^2 = 1+4\ |Q|^2-4\ Re\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\ e^{-i(n-s)t_k}Q$$

$$Re\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\ e^{-i(n-s)t_k}Q = Re\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\ e^{-i(n-s)t_k}\left(\frac{ReC_0}{C_0}\sum_{q=1}^{m}\lambda_q e^{i(n-s)t_q}\right)$$

$$=Re\left(\frac{ReC_0}{C_0}\sum_{q=1}^{m}\lambda_q e^{i(n-s)t_q}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e^{-i(n-s)t_k}\right)$$

$$= Re\left(\frac{ReC_0}{C_0}\left|\sum_{q=1}^{m}\lambda_q e^{i(n-s)t_q}\right|^2\right)$$

$$= \left(\frac{ReC_0}{|C_0|}\right)^2\left|\sum_{q=1}^{m}\lambda_q e^{i(n-s)t_q}\right|^2 = |\theta|^2$$

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k |B_k|^2 = 1 + 4|\theta|^2 - 4|\theta|^2 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k |B_k|^2 \leq 1$$

Şimdi P' de türevi haiz bir fonksiyonun tersi için sınır katsayıları ile ilgili bir teorem ispat edelim.

Teorem 2.6.11. Eğer $f(z)$, türevi pozitif reel kısma haiz bir fonksiyon ise

$$\check{f}(\omega) = \omega + \gamma_2\omega^2 + \gamma_3\omega^3 + \ldots\ldots$$

ve

$$f_0(\omega) = \omega + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots\ldots$$

$f_0(z) = -z-2\log(1-z)$ ile verilen fonksiyonun maküsü ise, o halde $|\gamma_k| \leqq |B_k|$, $k=2,3,4,\ldots$ ve $\check{f}_0(\omega)$ verilen eşitsizlikte tektir.

Uygulama : $P(z) \varepsilon P$ ise $\frac{1}{P(z)} \varepsilon P$ ve sonuç olarak

$$f'(z) = \frac{1}{p(z)} \quad \text{ve } f(\breve{f}(\omega)) = \omega \ , \quad \breve{f}'(\omega) = p(\breve{f}(\omega)), \quad |\omega| < p(f)$$

$$\breve{f}(\omega) = \omega + \gamma_2\omega^2 + \gamma_3\omega^3 + \ldots$$

$$P(z) = 1 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$$

denklemlerini birleştirirsek

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} k\gamma_k \omega^{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\breve{f}(\omega))^k$$

k=2 için

$$1 + 2\gamma_2\omega = 1 + C_1(\omega + \gamma_2\omega^2 + \ldots) + C_2(\omega^2 + \gamma_2^2\omega^4 + \ldots + 2\omega^3\gamma_2 + \ldots)$$

$$2\gamma_2\omega = C_1\omega \rightarrow 2!\gamma_2 = C_1$$

k=3 için

$$1 + 3\gamma_3\omega^2 = 1 + C_1(\omega + \gamma_2\omega^2 + \ldots) + C_2(\omega^2 + \gamma_2^2\omega^4 + \ldots + 2\omega^3\gamma_2 + \ldots) +$$

$$+ C_3(\omega + \gamma_2\omega^2 + \ldots)^3$$

$$3\gamma_3\omega^2 = C_1\gamma_2\omega^2 + C_2\omega^2$$

$$3\gamma_3 = C_1 \frac{C_1}{2} + C_2 \rightarrow 6\gamma_3 = C_1^2 + 2C_2 \rightarrow 3!\gamma_3 = C_1^2 + 2C_2$$

k=4 için

$$1 + 4\gamma_4\omega^3 = 1 + C_1(\omega + \gamma_2\omega^2 + \gamma_3\omega^3 + \ldots) + C_2(\omega^2 + \gamma_2^2\omega^4 + \ldots + 2\omega^3\gamma_2 + \ldots)$$

$$+ C_3(\omega^3 + \gamma_2^3\omega^6 + \ldots) + C_4(\omega^4 + \gamma_2^4\omega^8 + \ldots)$$

$$4\gamma_4\omega^3=C_1\gamma_3\omega^3+2C_2\gamma_2\omega^3+C_3\omega^3$$

$$4\gamma_4=C_1\,\frac{C_1^2+2C_2}{6}+2C_2\frac{C_1}{2}+C_3$$

$$24\gamma_4=C_1^3+2C_1C_2+6C_1C_2+6C_3=C_1^3+8C_1C_2+6C_3$$

$$4!\gamma_4=C_1^3+8C_1C_2+6C_3$$

$k=5$ için

$$1+5\gamma_5\omega^4=1+C_1(\omega+\gamma_2\omega^2+\gamma_3\omega^3+\gamma_4\omega^4+\ldots)+C_2(\omega^2+\gamma_2^2\omega^4+\ldots+2\gamma_2\omega^3+$$

$$+2\gamma_3\omega^4+\ldots)+C_3(\omega^3+\gamma_2\omega^6+\ldots+3\gamma_2\omega^4+\ldots)+C_4(\omega^4+\ldots)$$

$$+C_5(\omega^5+5\gamma_2\omega^6+\ldots)$$

$$5\gamma_5\omega^4=C_1\omega^4\gamma_4+C_2\gamma_2^2\omega^4+2C_2\gamma_3\omega^4+3C_3\gamma_2\omega^4+C_4\omega^4$$

$$5\gamma_5=C_1\frac{C_1^3+8C_1C_2+6C_3}{24}+C_2\frac{C_1^2}{4}+2C_2\frac{C_1^2+2C_2}{6}+3C_3\frac{C_1}{2}+C_4$$

$$120\gamma_5=C_1^4+8C_1^2C_2+6C_1C_3+6C_1^2C_2+8C_1^2C_2+16C_2^2+36C_1C_3+24C_4$$

$$5!\gamma_5=C_1^4+22C_1^2C_2+42C_1C_3+16C_2^2+24C_4$$

$k=6$ için

$$1+6\gamma_6\omega^5=1+C_1(\omega+\gamma_2\omega^2+\gamma_3\omega^3+\gamma_4\omega^4+\gamma_5\omega^5+\ldots)+C_2(\omega^2+\gamma_2^2\omega^4+\ldots$$

$$+2\gamma_4\omega^5+\ldots+2\omega^3\gamma_2+2\omega^4\gamma_3+2\gamma_2\gamma_3\omega^5+\ldots)+C_3(3\gamma_2^2\omega^5+\ldots+3\gamma_3\omega^5+\ldots)$$

$$+C_4(\omega^4+4\gamma_2\omega^5+\ldots)+C_5(\omega^5+5\gamma_2\omega^6+\ldots)+C_6(\omega^6+\ldots)$$

$$6\gamma_6\omega^5=C_1\gamma_5\omega^5+2C_2\gamma_2\gamma_2\omega^5+3C_3\gamma_2^2\omega^5+3C_3\gamma_3\omega^5+4\gamma_2C_4\omega^5+C_5\omega^5$$

$$6\gamma_6=C_1\frac{C_1^4+22C_1^2C_2+42C_1C_3+16C_2^2+24C_4}{120}+C_1C_2\left(\frac{C_1^2+2C_2}{6}\right)+3C_3\frac{C_1^2}{4}+$$

$$+2C_1C_4+C_5+2C_2\frac{C_1^3+8C_1C_2+6C_3}{24}+\frac{C_3C_1^2}{2}+C_2C_3$$

$$720\gamma_6=C_1^5+22C_1^3C_2+42C_1^2C_3+16C_1C_2^2+24C_1C_4+20C_1^3C_2+40C_1C_2^2+$$

$$+90C_1^2C_3+10C_1^3C_2+80C_1C_2^2+60C_2C_3+240C_1C_4+120C_5+60C_1^2C_3+$$

$$+120C_2C_3$$

$$6!\gamma_6=C_1^5+52C_1^3C_2+136C_1C_2^2+264C_1C_4+120C_5+180C_2C_3+192C_1^2C_3$$

Teorem 2.6.12. $p(z)\ \varepsilon P$ olsun, bu takdirde,

$$C_2^*=|C_1^2-C_2| \qquad C_3^*=|C_1^3-2C_1C_2+C_3|$$

$$C_4^*=|C_1^4+C_2^2+2C_1C_3-3C_1^2C_2-C_4|$$

$$C_5^*=|C_1^5+3C_1C_2^2+3C_1^2C_3-4C_1^3C_2-2C_1C_4-2C_1C_3+C_5|$$

$$C_6^*=|C_1^6+6C_1^2C_2^2+4C_1^3C_3+2C_1C_5+2C_2C_4+C_3^2-C_2^3-5C_1^4C_2-$$

$$-3C_1^2C_4-6C_1C_2C_3-C_6|$$

eşitliklerinin hepsi iki ile sınırlıdır.

İspat : $C_2^*,C_3^*,\ldots,C_6^*$ katsayıları $\dfrac{1}{P(z)}=\dfrac{1}{1+C_1z+C_2z^2+\ldots}$ yardımı ile elde edilir. Buradan haraketle

$$1 \quad \Big| \quad 1+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+C_4z^4+C_5z^5+C_6z^6+\ldots$$

$$\Big| \quad 1-C_1z+(C_1^2-C_2)z^2-(C_1^3+C_3-2C_1C_2)z^3+(C_1^4+2C_1C_3-3C_1^2C_2+C_2^2-C_4)z^4-$$

$$-(C_1^5+3C_1^2C_3-4C_1^3C_2+3C_1C_2^2-2C_1C_4-2C_2C_3+C_5)z^5+$$

$$+(C_1^6+4C_1^3C_3-5C_1^4C_2+6C_1^2C_2^2-2C_1^2C_4-6C_1C_2C_3+2C_1C_5-C_2^3+2C_2C_4+C_3^2-C_6)z^6\ldots$$

$$\overset{-}{+}C_1z\overset{-}{+}C_2z^2\overset{-}{+}C_3z^3\overset{-}{+}C_4z^4\overset{-}{+}C_5z^5\overset{-}{+}C_6z^6+\ldots$$

$$\underline{C_1z\pm C_1^2z^2\overset{+}{-}C_1C_2z^3\pm C_1C_3z^4\pm C_1C_4z^5\pm C_1C_5z^6+\ldots}$$

$$(C_1^2-C_2)z^2+(C_1C_2-C_3)z^3+(C_1C_3-C_4)z^4+(C_1C_4-C_5)z^5+\ldots$$

$$\underline{(C_1^2-C_2)z^2\mp(C_1^3-C_1C_2)z^3\mp(C_1^2C_2-C_2^2)z^4\mp(C_1^2C_3-C_2C_3)z^5\mp\ldots}$$

$$(C_1^3+C_3-2C_1C_2)z^3-(C_1^2C_2-C_2^2+C_4-C_1C_3)z^4-(C_1^2C_3-C_2C_3-C_1C_4+C_5)z^5-(C_1^2C_4-C_2C_4-C_1C_5+C_6)z^6\ldots$$

$$\underline{(C_1^3+C_3-2C_1C_2)z^3\pm(C_1^4+C_1C_3-2C_1^2C_2)z^4\pm(C_1^3C_2+C_2C_3-2C_1C_2^2)z^5\pm(C_1^3C_3+C_3^2-2C_1C_2C_3)z^6\pm\ldots}$$

$$(C_1^4+2C_1C_3-3C_1^2C_2+C_2^2-C_4)z^4+(C_1^3C_2+2C_2C_3-2C_1C_1^2-C_1^2C_3+C_1C_4-C_5)z^5+(C_1^3C_3+C_3^2-2C_1C_2C_3-C_1^2C_4+C_2C_4+C_1C_5-C_6)z^6+\ldots$$

$$\underline{(C_1^4+2C_1C_3-3C_1^2C_2+C_2^2-C_4)z^4\mp(C_1^5+2C_1^2C_3-3C_1^3C_2+C_1C_2^2-C_1C_4)z^5\mp(C_1^4C_2+2C_1C_2C_3-3C_1^2C_2^2+C_2^3-C_2C_4)z^6\mp\ldots}$$

$$(C_1^5+3C_1^2C_3-4C_1^3C_2+3C_1C_2^2-2C_1C_4-2C_2C_3+C_5)z^5-(C_1^4C_2+4C_1C_2C_3-3C_1^2C_2^2+C_2^3-2C_2C_4-C_3^2-C_1^3C_3+C_1^2C_4-C_1C_5+C_6)z^6-\ldots$$

$$\underline{(C_1^5+3C_1^2C_3-4C_1^3C_2+3C_1C_2^2-2C_1C_4-2C_2C_3+C_5)z^5\pm(C_1^6+3C_1^3C_3-4C_1^4C_2+3C_1^2C_2^2-2C_1^2C_4-2C_1C_2C_3+C_1C_5)z^6\pm\ldots}$$

$$(C_1^6+4C_1^3C_3-5C_1^4C_2+6C_1^2C_2^2-2C_1^2C_4-6C_1C_2C_3+2C_1C_5-C_2^3+2C_2C_4+C_3^2-C_6)z^6+\ldots$$

$$\underline{(C_1^6+4C_1^3C_3-5C_1^4C_2+6C_1^2C_2^2-2C_1^2C_4-6C_1C_2C_3+2C_1C_5-C_2+2C_2C_4+C_3^2-C_6)z^6\mp\ldots}$$

$$0$$

Buna göre,

$$C_2^* = |C_1^2-C_2|$$

$$C_3^* = |C_1^3-2C_1C_2+C_3|$$

$$C_4^* = |C_1^4+2C_1C_3-3C_1^2C_2+C_2^2-C_4|$$

$$C_5^* = |C_1^5+3C_1^2C_3-4C_1^3C_2+3C_1C_2^2-2C_1C_4-2C_2C_3+C_5|$$

$$C_6^* = |C_1^6+4C_1^3C_3-5C_1^4C_2+6C_1^2C_2^2-2C_1^2C_4-6C_1C_2C_3+2C_1C_5-C_2^3+2C_2C_4+C_3^2-C_6|$$

lde edilir.

Tanım 2.6.1.2. TOEPLİTZ FORMLARI

Üç fonksiyon sınıfını göz önüne alalım. Her bir fonksiyon sınıfı için sınıfın her bir fonksiyonu ile Toeplitz formu denilen Hermitian karakterinde bir formu birleştirelim.

a) a_0, a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n,b_n,... reel katsayılar olmak üzere, r,x kutupsal koordinatlarında

$$a_0+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

harmonik bir fonksiyonun açılımı olsun.

$$c_n=a_n-ib_n \quad , \quad c_{-n}=\bar{c}_n=a_n+ib_n \quad , \quad n=0,1,2,...; \ b_0=0$$

kompleks sayıları tanımlansın, öyle ki $(c_{\nu-\mu})$, bir Hermitian matris olsun. (μ ν=0,1,2,..,n olmak üzere).

$$T_n=\sum c_{\nu-\mu}u_\mu\bar{u}_\nu \quad , \qquad \mu,\nu=0,1,...,n$$

Hermitian formlarını göz önüne alalım; ve

$a_0+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ harmonik fonksiyonu ile birleşimine "Toeplitz Formu" diyelim.

$T_n=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} c_{\nu-\mu}u_\mu\bar{u}_\nu$ formunu açacak olursak,

$$\sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu u_0\bar{u}_\nu+c_{\nu-1}u_1\bar{u}_\nu+c_{\nu-2}u_2\bar{u}_\nu+c_{\nu-3}u_3\bar{u}_\nu+\ \ldots+c_{\nu-n}u_n\bar{u}_\nu) =$$

$$(c_0u_0\bar{u}_0+c_{-1}u_1\bar{u}_0+c_{-2}u_2\bar{u}_0+c_{-3}u_3\bar{u}_0+\ \ldots+c_{-n}u_n\bar{u}_0)+$$

$$(c_1u_0\bar{u}_1+c_0u_1\bar{u}_1+c_{-1}u_2\bar{u}_1+c_{-2}u_3\bar{u}_1\ +\ldots+\ c_{1-n}u_n\bar{u}_1)\ +$$

$$(c_2u_0\bar{u}_2+c_1u_1\bar{u}_2+c_0u_2\bar{u}_2+c_{-1}u_3\bar{u}_2+\ldots+\ \ C_{2-n}u_n\bar{u}_2)\ +\ \ldots\ +$$

$$(c_nu_0\bar{u}_n+c_{n-1}u_1\bar{u}_n+c_{n-2}u_2\bar{u}_n+c_{n-3}u_3\bar{u}_n+\ldots+\ c_0u_n\bar{u}_n).$$

elde edilir. Buna göre T_n determinantı,

$$T_n=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & & & & \cdots \\ c_{-n} & c_{1-n} & c_{2-n} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}$$

ve

$$T_2=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_{-1} & c_0 & c_1 \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Bu Hermitian matrisi, Toeplitz determinantına denktir, ve

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & 2 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdots & & & \cdots & \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$n = 1,2,3,\ldots,\ c_0 = 2$

determinantı ile gösterilir. Bunun sonucu olarak şu teoremi verebiliriz.

<u>Teorem 2.6.13.</u> $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ kuvvet serilerinin birim dairedeki bir P fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter koşul Toeplitz determinantını gerçeklemesidir.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & 2 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdots & & & & \cdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$n = 1,2,3,\ldots$

ve $c_{-k} = \bar{c}_k$ negatif değildir.

$P(z) = \sum_{k=1}^{m} P_k P_o(e^{itkz})$, $P_k > 0$, $t_k \varepsilon R$ ve $t_k \neq t_j$ (k=j için)

Bu halde $D_n > 0$, $n < m-1$ için ve

$D_n = 0$, $n \geq m$ için .

Teorem 2.6.14. (Harmonik fonksiyonları içeren)

$a_0+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ serisi, $r<1$ birim çemberinde yakınsar ve bir pozitif harmonik fonksiyonu göstermesi için gerek ve yeter koşul n nin bütün değerleri için $T_n=\sum c_{\nu-\mu}u_\mu \bar{u}_\nu$, $\nu=0,1,\ldots,$ n Toeplitz formlarının negatif olmamasıdır. (Bu $a_0+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ in sıfır olması dışında geçerlidir).

İSPAT : $T_n(r,\theta)=\sum c_{\nu-\mu} r^{|\mu-\nu|} e^{i(\mu-\nu)\theta} u_\mu \bar{u}_\nu$,

$\mu,\nu=0,1,\ldots,n$ ifadesi r,θ kutupsal koordinatların bir harmonik fonksiyonu tanımlar öyle ki onun $r=1$ için negatif olmaması $r<1$ için aynı özelliği gerçekler.

$a_0+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, $r<1$ için pozitif ve regular bir $f(r,x)$ harmonik fonksiyonunu göstersin.

$$T_n(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u_0+u_1e^{ix}+u_2e^{2ix}+\ldots+u_ne^{inx}|^2 f(r,x-\theta)dx$$

olduğundan $T_n(r,\theta)\geq 0$ ve aynı zamanda $T_n(1,0)=T_n\geq 0$ olur.

Tersine; $T_n\geq 0$ olsun buradan $T_n(1,\theta)\geq 0$, böylece $r<1$ θ keyfi reel sayı olmak üzere $T_n(r,\theta)\geq 0$ olur. Özellikle $T_n(r,0)\geq 0$ olduğunu biliyoruz, $T_n\geq 0$ dan $c_0^2-|c_n|^2\geq 0$, $|c_n|\leq c_0$ soncu çıkar, öyleki, $a_0+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, $r<1$ için yakınsar ve regüler bir $f(r,x)$ harmonik fonksiyonunu gösterir. Şimdi $0<\rho<1$ ve x_0, reel değerli keyfi bir sabit olsun.

$$T_n(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u_0+u_1e^{ix}u\ e^{2ix}+\ldots+u_ne^{nix}|^2\ f(r,x-\theta)dx$$

gösterilimden

$$u_0+u_1e^{ix}+u_2e^{2ix}+\ldots+u_ne^{nix}=(1-\rho^2)^{1/2}\sum_{\nu=0}^{n}\rho^{\nu}\,e^{i\nu(x-x_0)}$$

bulunur. Öyleki $n\to\infty$ çin

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{(1-\rho^2)^{1/2}}{1-e^{i(x-x_0)}}\right|^2 f(r,x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-2\cos(x-x_0)\rho^2}f(r,x)dx\geq 0$$

Eğer $\rho\to 1-0$ ise, bu ifade

$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right.$ Poisson integrali) $f(r,x_0)$ a yaklaşır öyleki $f(r,x)$, $r<1$ birimçemberinde negatif değildir. Harmonik fonksiyonlardaki extremum prensibine göre bu pozitif olmak zorundadır.

2.7. Konveks Bir Fonkisoyunun Maküs Fonksiyonunun İlk Katsayıları Üzerine Toeplitz Formlarını Kullanarak, Bazı Eşitsizliklerin Elde Edilmesi :

Bu bölümde 1983,1984,1985 yıllarında Richard.J.Libera, Eligiusz. J.Zlotkiewicz tarafından yapılan bir çalışmayı ele alıyoruz.

Teorem 2.7.1. K, bütün f(z) fonksiyonlarını içeren S nin bir alt sınıfı olmak üzere $f(s)\varepsilon K$ için $|\gamma_n|\leq 1$, n=1,2, 3,5,4,6,7, ve bu sınırlar değişmez.

İspat : $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$ fonksiyonu birim dairede analitik $f(0)=0$, $f'(0)=1$ ve yalınkat olsun. Bu durumda f(z) fonksiyonun maküs fonksiyonu en az 1/4 yarıçaplı dairede Maclaurin açılımını haiz olup bu açılım.

$$\check{f}(\omega) = \omega+\gamma_2\omega^2+\gamma_3\omega^3+\ldots.$$

şeklindedir. Bu ikisini birleştirirsek,

$f(\check{f}(\omega)) = \omega$ bulunur veya

$$\omega=\check{f}(\omega)+a_2(\check{f}(\omega))^2+a_3(\check{f}(\omega))^3+\ldots$$

$$\omega=(\omega+\gamma_2\omega^2+\gamma_3\omega^3+\ldots)+a_2(\omega+\gamma_2\omega^2+\gamma_3\omega^3+\ldots)^2+a_3(\omega+\gamma_2\omega^2+\gamma_3\omega^3+\ldots)^3+\ldots+\ldots$$

$$=(\omega+\gamma_2\omega^2+\gamma_3\omega^3+\gamma_4\omega^4+\ldots)+a_2(\omega^2+\gamma_2^2\omega^4+\gamma_3^2\omega^6+\gamma_4^2\omega^8+\gamma_5\omega^{10}+\gamma_6\omega^{12}+\gamma_7\omega^{14}+\ldots$$

$$+2\gamma_2\omega^3+2\gamma_3\omega^4+2\gamma_4\omega^5+2\gamma_5\omega^6+2\gamma_6\omega^7+2\gamma_7\omega^8+\ldots+2\gamma_2\gamma_3\omega^5+2\gamma_2\gamma_4\omega^6+2\gamma_2\gamma_5\omega^7+$$

$$+2\gamma_2\gamma_6\omega^8+\ldots+2\gamma_3\gamma_4\omega^7+\ldots)+a_3(\omega^3+3\gamma_2\omega^4+3\gamma_2^2\omega^5+\gamma_2^3\omega^6+\ldots+3\gamma_3\omega^5+$$

$$+\ldots+3\gamma_2\gamma_3\omega^7+\ldots)+a_4(\omega^4+4\gamma_2\omega^5+6\gamma_2^2\omega^6+4\gamma_2^3\omega^7+\ldots+4\gamma_3\omega^6+\ldots+$$

$$+4\gamma_4\omega^7+\ldots)+a_5(\omega^5+5\gamma_2\omega^6+10\gamma_2\omega^7+\ldots+5\gamma_3\omega^7+\ldots)+a_6(\omega^6+6\gamma_2\omega^7+$$

$$+15\gamma_2^2\omega^8+\ldots.)+a_7(\omega^7+7\gamma_2\omega^8+\ldots)$$

$$\omega^2(\gamma_2+a_2) = 0 \rightarrow \gamma_2+a_2= 0$$

$$\omega^3(\gamma_3+2\gamma_2a_2+a_3) = 0\rightarrow\gamma_3+2\gamma_2a_2+a_3= 0$$

$$\gamma_4+a_4+3\gamma_2a_3+a_2(\gamma_2^2+2\gamma_3) = 0$$

$$a_5+a_2(2\gamma_4+2\gamma_2\gamma_3)+a_3(3\gamma_3+3\gamma_2^2)+4a_4\gamma_2+\gamma_5= 0$$

$$\gamma_6+a_2(2\gamma_5+2\gamma_2\gamma_4+\gamma_3^2)+a_3(6\gamma_2\gamma_3+3\gamma_4+\gamma_2^3)+a_4(6\gamma_2^2+\gamma_3\ )+5a_5\gamma_2+a_6 = 0$$

$$\gamma_7+a_2(2\gamma_6+2\gamma_2\gamma_5+2\gamma_3\gamma_4)+a_3(3\gamma_5+6\gamma_2\gamma_4+3\gamma_3^2+3\gamma_2^2\gamma_3) +$$

$$+a_4(4\gamma_4+12\gamma_2\gamma_3+4\gamma_2^3)+a_5(5\gamma_3+10\gamma_2^2)+6a_2\gamma_2 +a_7 = 0$$

Re $\{P(z)\} > 0$ için Δ de bütün $P(z)$ regüler fonksiyonunun bir ailesi P olsun.

$$P(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \qquad z\varepsilon\Delta$$

$f(z)\varepsilon K$ ise

$$zf''(z) = f'(z)[P(z)-1]$$

$$n(n-1)a_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}a_2 + 3c_{n-3}a_3 + 4_{n-4}a_4 + \ldots + (n-1)c_1 a_{n-1}$$

Şimdi a_k katsayılarını hesaplayalım. $k= 2,3,4,5,6,7.$

$n = 2$ için

$$2a_2 = c_1$$

$n = 3$ için

$$6a_3 = c_2 + 2c_1 a_2 = c_2 + c_1^2$$

$n = 4$ için

$$12a_4 = c_3 + 2c_2 a_2 + 3c_1 a_3 = c_3 + c_1 c_2 + c_1 \quad \frac{(c_2 + c_1^2)}{2}$$

$$24a_4 = 2c_3 + 2c_1 c_2 + c_1 c_2 + c_1^3 = 2c_3 + 3c_1 c_2 + c_1^3$$

n = 5 için

$$20a_5 = c_4+2c_3a_2+3c_2a_3+4\ c_1a_4$$

$$120a_5 = 6c_4+8c_1c_3+6\ c_1^2c_2+3c_2^2+c_1^4$$

n = 6 için

$$30a_6 = c_5+c_1C_4+\ c_3\frac{(c_1^2+c_2)}{2}+c_2\frac{(2c_3+3c_1c_2+c_1^3)}{6}+c_1\ \frac{(6c_4+8c_1c_3+6c_1^2c_2+3c_2^2+c_1^4)}{24}$$

$$720a_6 = 24c_5+30c_1c_4+20c_1^2c_3+20c_2c_3+15c_1c_2^2+10c_1^3c_2+c_1^5$$

n = 7 için

$$42a_7 = c_6+2c_5a_2+3c_4a_3+4c_3a_4+5c_2a_5+6c_1a_6$$

$$(42)(120)a_7 = 120c_6+144c_1c_5+90c_1^2c_4+90c_2c_4+40c_3^2+120c_1c_2\ c_3+40c_1^3\ c_3+$$

$$+45c_1^2c_2^2+15c_2^3+15c_1^4c_2+c_1^6$$

Bulduğumuz a_k katsayılarından

$$\left.\begin{aligned} 2a_2 &= c_1 \\ \gamma_2+a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \qquad \gamma_2+\frac{c_1}{2} = 0 \rightarrow 2\gamma_2+c_1 = 0 \quad 2\gamma_2 = -c_1$$

$$6a_3 = c_1^2+c_2$$

$$\gamma_3+2a_2\gamma_2\ +a_3 = 0 \quad \gamma_3-c_1^2/2\ +\ \frac{c_1^2+c_2}{6} = 0$$

$$6\gamma_3-3c_1^2+c_1^2+c_2 = 0 \rightarrow \ 6\gamma_3 = 2c_1^2-c_2$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_4+a_2(\gamma_2^2+2\gamma_3)+3a_3\gamma_2+a_4 = 0 \\ &24a_4 = 2c_3+3c_1c_2+c_1^3 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\gamma_4+\left(\frac{c_1^2}{4}+2\,\frac{(2c_1^2-c_2)}{3}\right)\frac{c_1}{2}+\frac{c_1^2+c_2}{2}\left(\frac{-c_1}{2}\right)+\frac{2c_3+3c_1c_2+c_1^3}{24}=0$$

$$24\gamma_4+3c_1^3+4c_1(2c_1^2-c_2)-6c_1(c_1^2+c_2)+2c_3+3c_1c_2+c_1^3=0$$

$$24\gamma_4=-6c_1^3+7c_1c_2-2c_3$$

$$120\gamma_5=24c_1^4-4c_1^2c_2+22c_1c_3+7c_2^2-6c_4$$

$$720\gamma_6=-120c_4^5+96c_4c_1+50c_2c_3+326c_1^3c_2-202c_1^2c_3-127c_1c_2^2-24c_5$$

$$(120)(47)\gamma_7=-120c_6+528c_1c_5+1864c_1^3c_3+1740c_1^2c_2^2+720c_1^6+246c_2c_4+$$
$$+100c_3^2-1182c_1^2c_4-1292c_1c_2c_3-5656c_1^4c_2-127c_2^3$$

Teorem 2.6.12'yi kullanarak

$$2\gamma_2=-c_1 \rightarrow \quad 2|\gamma_2|\leq|c_1|\leq 2$$

$$\left.\begin{array}{l} c_2^*=|c_1^2-c_2| \\ 6\gamma_3=2c_1^2-c_2 \end{array}\right\}\rightarrow 6|\gamma_3|\leq|c_1^2|+|c_1^2-c_2|\leq 4+2=6$$

$$\begin{array}{l} 24\gamma_4=-6c_1^3+7c_1c_2-2c_3 \\ c_3^*=|c_1^3-2c_1c_2+c_3| \end{array}\quad 24|\gamma_4|\leq 2|c_1^3-2c_1c_2+c_3|+|c_1|^3+3|c_1||c_1^2-c_2|\leq$$
$$\leq 4+8+12=24$$

$$\left.\begin{array}{l} 120\gamma_5=24c_1^4-46c_1^2c_2+22c_1c_3+7c_2^2-6c_4 \\ c_4^*=|c_1^4+c_2^2+2c_1c_3-3c_1^2c_2-c_4| \end{array}\right\}\rightarrow$$

$$120|\gamma_5|\leq 6|c_1^4+c_2^2+2c_1c_3-3c_1^2c_2-c_4|+10|c_1|.|c_3-2c_1c_2+c_1^3|+$$
$$+8|c_1^2||c_1^2-c_2|+|c_2|^2\leq 12+40+64+4=120$$

$$720\gamma_6=-120c_1^5+96c_4c_1+50c_2c_3+326c_1^3c_2-202c_1^2c_3-127c_1c_1^2-24c_5 \}\rightarrow$$

$$c_5^* = |c_1^5+3c_1c_2^2+3c_1^2c_3-4c_1^3c_2-2c_1c_4-2c_2c_3+c_5|$$

$$720|\gamma_6| \leq 24|c_5+c_1^5+3c_1c_2^2+3c_1^2c_3-4c_1^3c_2-2c_1c_4-2c_2c_3| +$$

$$+\ 48\ |c_1||c_1^4+c_2^2+2c_1c_3-3c_1^2c_2-c_4|+34|c_1|^2|c_3-2c_1c_2+c_1^3|\ +$$

$$+\ 2\ |c_2||c_3-c_1c_2|\ +\ 14c_1^5+5c_1c_2^2-18c_1^3c_2|$$

Teorem 2.6.10'kullanırsak $|c_3-c_1c_2|\leq 2$

$$720\ |\gamma_6|\leq 520+2\max|14c_1^4+5c_2^2-18c_1^3c_2|$$

$c_1>0$ farzedelim.

Toeplitz determinantından $n=2$ için

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & c_1 & c_2 \\ c_1 & 2 & c_1 \\ \bar{c}_2 & c_1 & c \end{vmatrix} = 4c+c_1^2c_2+c_1^2\bar{c}_2-2c_2\bar{c}_2-2c_1^2-c_1^2c$$

$c = 2$ için

$$D_2= 8+c_1^2(c_2+\bar{c}_2) - 4c_1^2-2\ |c_2|^2 \qquad \frac{z+\bar{z}}{2} = \operatorname{Re}z$$

$$= 8+2c_1^2\operatorname{Re}c_2-4c_1^2-2\ |c_2|^2$$

$$= 8+2\ \operatorname{Re}\{c_1^2c_2\}-4c_1^2-2\ |c_2|^2$$

$$2c_2=c_1^2+x\ (4-c_1^2) \qquad |x|\leq 1 \text{ için}$$

$$720\ |\gamma_6|\leq 520 + 2\max|14c_1^4+5c_2^2-18c_1^2c_2| \text{ den}$$

$$|14c_1^4+5c_2^2-18c_1^2c_2|=|14c_1^4+\frac{5}{4}[c_1^4+2c_1^2x(4-c_1^2)+x^2(4-c_1^2)^2]\ -$$

$$-\ 18c_1^2(\frac{c_1^2+x(4-c_1^2)}{2})\ | =$$

$$= \left|14c_1^4+\frac{5}{4}[c_1^4+2x(4-c_1^2)c_1^2+x^2(4-c_1^2)^2]-9c_1^4-9xc_1^2(4-c_1^2)\right|$$

$$\leq \left|c_1^4(14+\frac{5}{4}-9)+(4-c_1^2)(\frac{5}{4}-9)+(4-c_1^2)^2\ x^2\right|$$

$$\leq c_1^4\frac{25}{4}+\frac{13}{2}(4-c_1^2)c_1^2+(4-c_1^2)^2 =$$

$$= c_1^4\left(\frac{25}{4}-\frac{13}{2}+1\right)+c_1^2(26-8)+16$$

$$= \frac{3}{4}c_1^4+18c_1^2+16\leq 100$$

$$720|\gamma_6|\leq 520+2.100=720 \rightarrow |\gamma_6|\leq 1$$

$$(120)(42)\gamma_7 = -120c_6+528c_1c_5+1864c_1^3c_3+1740c_1^2c_2+720c_1^6+$$

$$+246c_2c_4+100c_3^2-1182c_1^2c_4-1292c_1c_2c_3-5656c_1^4c_2-127c_2^3$$

$$(120)(47)|\gamma_7|\leq 120c_6^*+288|c_1|c_5^*+246|c_1^2|c_4^*+28|c_1|^3c_3^*+$$

$$+10|c_4|^4c_2^*+20|c_3||c_1c_2-c_3|+6|c_2||c_4|+28c_1^6+64c_1c_2c_3-90c_1^2c_2^2-$$

$$-7c_2^3|$$

$$A = |28c_1^6+64c_1c_2c_3-90c_1^2c_2^2-7c_2^3| \text{ olsun.}$$

Caratheodory's kriterini kullanarak $A\leq 808$ olduğunu gösterelim: $0\leq c_1\leq 2$. Eğer $0\leq c_1\leq 1$ ise $A\leq 700$ $c_1=C$ ve $1\leq c\leq 2$ olsun $D_3\geq 0$ dır.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & c & c_2 & c_3 \\ \bar{c} & 2 & c_1 & c_2 \\ \bar{c}_2 & c_1 & 2 & c \\ \bar{c}_3 & \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & 2 \end{vmatrix} \geqq 0$$

$D_3 = |(4c_3 - 4cc_2 + c^3)(4-c^2) + (2c_2 - c^2)^2| \leqq 2(4-c^2)^2 - 2\ |2c_2 - c^2|^2$

D_2 determinantını kullanarak,

$4c_3 = c^3 + 2(4-c^2)cx - c(4-c^2)x^2 + 2(4-c^2)(1-|x|^2 z)$

$|z| \leq 1$ için D_2 ve D_3 kullanarak

$8A \leqq [101c^6 + 128c^3(4-c^2)] + c\,(4-c^2)[512 - 128c^2 - 189c^3]\rho +$

$+ c^2(4-c^2)[289 - 128c - 9c^2]\rho^2 + (4-c^2)[28 - 128c + 57c^2]\rho^3$

$\rho = |x| \leq 1 \quad F(\rho)$, 3. derece polinom olsun.

$F'(\rho) = (4-c^2)\{512c - 128c^3 + 189c^4 + 2[289c^2 - 128c^3 - 9c^4]\rho +$

$+3(4-c^2)[28 - 128c + 57c^2]\rho^2\}$

$F'(\rho)$, ρ da ikinci dereceden $F'(0) > 0$,

$F'(1) = (4-c^2)(336 - 1024c + 1178c^2) > 0$,

ρ^2 için bir negatif katsayı ve

Sonuç olarak F artan ve Max $F(\rho) = F(1)$

$G(c) = F(1) = 448 + 1844c^2 + 3c^4 - 22c^6$

$G'(c) = 2c\,(1884 + 6c^2 - 64c^4) > 0$

$G(c) \leq G(2)$

$\rho = 1$, $c = 2$ üst sınırdır.

$8A \leq (101)(64) \rightarrow A \leq 808$

bütün c'ler için geçerli, $c_k = 2$. $k = 1,2,3,\ldots$

III. BÖLÜM

3.1. Kompleks Mertebeden Yıldızıl Fonksiyonların Maküs Fonksiyonu İçin Toeplitz Formlarını Kullanarak İlk Altı Katsayısının Üst Sınırları Tayini :

Tanım 3.1. (Kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonlar) b, kompleks bir sayı olmak üzere $b \neq 0$ koşulunu gerçekle:sin. $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu bir dairede analitik ve $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ olmak üzere,

$$(1) \quad \operatorname{Re}\left[1 + \frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right)\right] > 0, \quad z \in D$$

koşulunu gerçeklerse, f(z) fonksiyonuna birim dairede kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyon denir ve bu fonksiyon sınıfı $S(1-b)$ ile gösterilir.

Bu sınıfın önemli alt sınıfları, b'nin alacağı özel değerlerle aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

(i) $b=1$ için $S(1-b)= S(0)= S^*$ yıldızıl fonksiyonlar sınıfıdır.

(ii) $b= 1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ için $S(\alpha)$ α.mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfıdır.

(iii) $b=e^{-i\lambda}\cos\lambda$ $(|\lambda|< \frac{\pi}{2})$ ise
$S(1-b) = S(1-e^{i\lambda}\cos\lambda) = S^{\lambda}$ yıldızıl fonksiyonlar sınıfıdır.

(iv) $b = (1-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}$ ise

$S(1-b) = S\,(1-(1-\alpha)\,e^{-i\lambda}\cos\lambda) = S_\alpha^\lambda$

α.mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfıdır.

(1) yazılışından dolayı,

$$(2)\quad 1 + \frac{1}{b}\left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right) = P(z)$$

ifadesini yazabiliriz. Burada $P(z)$, pozitif reel kısmı haiz fonksiyondur. Yani $P(z) \in P$ dir. Öte yandan pozitif reel kısma haiz fonksiyonlarla Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen $\omega(z)$ fonksiyonu arasındaki bağıntının kullanılmasıyla,

$$(3)\quad z\,\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + (2b-1)\omega(z)}{1-\omega(z)}$$

yazılışını elde ederiz. (3) eşitliğinden hareketle ilk beş katsayısının hesaplanışı ;

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots.$$

$$\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \dots.$$

$$\frac{z(1+2a_2 z+3a_3 z^2+\dots)}{(z+a_2 z^2+a_3 z^3+\dots)} = \frac{1+(2b-1)(c_1 z+c_2 z^2+c_3 z^3+\dots)}{1-(c_1 z+c_2 z^2+c_3 z^3+\dots.)}$$

$$\frac{(z+2a_2 z^2+3a_3 z^3+\dots)}{(z+a_2 z^2+a_3 z^3+\dots)} = \frac{(1+2bc_1 z+2bc_2 z^2+2bc_3 z^3+\dots-c_1 z-c_2 z^2-c_3 z^3-)}{(1-c_1 z-c_2 z^2-c_3 z^3-c_4 z^4-\dots)}$$

$$(z+2a_2 z^2+3a_3 z^3+\dots)(1-c_1 z-c_2 z^2-\dots) = (z+a_2 z^2+a_3 z^3+\dots)(1+2bc_1 z+2bc_2 z^2+\dots$$
$$-c_1 z-c_2 z^2-\dots.)$$

$$(z-c_1 z^2-c_2 z^3-c_3 z^4-c_4 z^5-c_5 z^6-\dots)+(2a_2 z^2-2a_2 c_1 z^3-2a_2 c_2 z^4-2a_2 c_3 z^5-2a_2 c_4 z^6\dots)+$$

$+(3a_3z^3-3a_3c_1z^4-3a_3c_2z^5-3a_3c_3z^6-\ldots)+(4a_4z^4-4a_4c_1z^5-4a_4c_2z^6-\ldots)+$

$(5a_5z^5-5a_5c_1z^6\ldots)+(6a_6z^6-\ldots)=$

$(z+2bc_1z^2+2bc_2z^3+2bc_3z^4+2bc_4z^5+2bc_5z^6+\ldots-c_1z^2-c_2z^3-c_3z^4-c_4z^5-c_5z^6-\ldots)+$

$+(a_2z^2+2ba_2c_1z^3+2ba_2c_2z^4+2ba_2c_3z^5+2ba_2c_4z^6+\ldots-a_2c_1z^3-a_2c_2z^4-a_2c_3z^5-a_2c_4z^6\ldots)+$

$+(a_3z^3+2ba_3c_1z^4+2ba_3c_2z^5+2ba_3c_3z^6+\ldots-a_3c_1z^4-a_3c_2z^5-a_3c_3z^6-\ldots)+$

$+(a_4z^4+2ba_4c_1z^5+2ba_4c_2z^6+\ldots-a_4c_1z^5-a_4c_2z^6-\ldots+$

$+(a_5z^5+2ba_5c_1z^6+\ldots-a_5c_1z^6-\ldots)+(a_6z^6).$

$z^2(-c_1+2a_2)=z^2(2bc_1-c_1+a_2)$

$a_2=2bc_1$.

$z^3(-c_2-2a_2c_1+3a_3)=z^3(2bc_2-c_2+2ba_2c_1-a_2c_1+a_3)$

$2a_3=2bc_2+2ba_2c_1+a_2c_1$

$2a_3=2bc_2+2bc_1.2bc_1+c_1.2bc_1=2bc_2+4b^2c_1^2+2bc_1^2$

$a_3=bc_2+2b^2c_1^2+bc_1^2$.

$z^4(-c_3-2a_2c_2-3a_3c_1+4a_4)=z^4(2bc_3-c_3+2ba_2c_2-a_2c_2+2ba_3c_1-a_3c_1+a_4)$

$3a_4=2bc_3+2ba_2c_2+c_2+2ba_3c_1+a_2c_2+2a_3c_1$.

$3a_4=2bc_3+2bc_2.2bc_1+2bc_1(bc_2+2b^2c_1^2+bc_1^2)+c_2.2bc_1+2c_1(bc_2+2b^2c_1^2+bc_1^2)$

$3a_4=2bc_3+4b_1^2c_1c_2+2b^2c_1c_2+4b^3c_1^3+2b^2c_1^3+2bc_1c_2+2bc_1c_2+4b^2c_1^3+2b\ c_1^3$.

$$3a_4=2bc_3+6b^2c_1c_2+4b^3c_1^3+6b^2c_1^3+4bc_1c_2+2bc_1^3$$

$$z^5(-c_4-2a_2c_3-3a_3c_2-4c_1a_4+5a_5)=z^5(2bc_4-c_4+2ba_2c_3-a_3c_2+2ba_3c_2-a_4c_1+2ba_4c_1-a_4c_1+a_5) \quad .$$

$$4a_5= 2bc_4+2ba_2c_3+2ba_3c_2+2ba_4c_1+a_2c_3+2a_3c_2+3a_4c_1 \; ,$$

$$4a_5=2bc_4+2bc_3.2bc_1+2bc_2(bc_2+2b^2c_1^2+bc_1^2)+\frac{2}{3}bc_1(2bc_3+6b^2c_1c_2+4b^3c_3+6b^2c_1^3+4bc_1c_2+2bc_1^3)+2c_2(bc_2+2b^2c_1^2+bc_1^2)+\frac{3}{3}(2bc_3+6b^2c_1c_2+4b^3c_1^3\pm 6b^2c_1^3+4bc_1c_2+2bc_1^3) \; .$$

$$4a_5=2bc_4+4b^2c_1c_3+2b^2c_2^2+4b^3c_1^2c_2+2b^2c_1^2c_2+\frac{4}{3}b^2c_1c_3+4b^3c_1^2c_2+\frac{8}{3}b^4c_1^4+4b^3c_1^4+\frac{8}{3}b^2c_1^2c_2+\frac{4}{3}b^2c_1^4+2bc_2^2+4b^2c_1^2c_2+2bc_1^2c_2+2bc_1c_3+6b^2c_1^2c_2+4b^3c_1^4+6b^2c_1^4+4bc_1^2c_2+2bc_1^4 \; .$$

$$4a_5= 2bc_4+\frac{16}{3}b^2c_1c_3+2b^2c_2^2+8b^3c_1^2c_2+\frac{44}{3}b^2c_1^2c_2+\frac{8}{3}b^4c_1^4+8b^3c_1^4+\frac{22}{3}b^2c_1^4+2bc_2^2+6bc_1^2c_2+2bc_1c_3+2bc_1^4 \; .$$

$$z_6(a_5-2a_2c_4-3a_3c_3-4a_4c_2-5a_5c_1+6a_6)=z^6(2bc_5-c_5+2ba_2c_4-a_2c_4+2ba_3c_3-a_3c_3+-2ba_4c_2-a_4c_2+2ba_5c_1-a_5c_1+a_6) \quad .$$

$$5a_6=2bc_5+2ba_2c_4+2ba_3c_3+2ba_4c_2+2ba_5c_1+a_2c_4+2a_3c_3+3a_4c_2+4a_5c_1 \quad .$$

$$5a_6=2bc_5+2bc_4\,2bc_1+2bc_3(bc_2+2b^2c_1^2+bc_1^2)+\frac{2}{3}bc_2(2bc_3+6b^2c_1c_2+4b^3c_1^3+6b^2c_1^3+4bc_1c_2+2bc_1^3) \quad .$$

$$\frac{2}{4}\, bc_1 (2bc_4+ \frac{16}{3}\, b^2c_1c_2+2b^2c_2^2+8b^3c_1^2c_2+ \frac{44}{3}\, b^2c_1^2c_2+ \frac{8}{3}\, b^4c_1^4+8b^3c_1^4+ \frac{22}{3}\, b^2c_1^4+$$

$$+2bc_2^2+6bc_1^2c_2+2bc_1c_3+2bc_1^4)+c_4.2bc_1+2c_3(bc_2+2b^2c_1^2+bc_1^2)+ \frac{3}{3}\, c_2(2bc_3+6b^2c_1c_2+$$

$$+4b^3c_1^3+6b^2c_1^3+4bc_1c_2+2bc_1^3)+ \frac{4}{4}\, c_1(2bc_4+ \frac{16}{3}\, b^2c_1c_2+2b^2c_2^2+8b^3c_1^2c_2+ \frac{44}{3}\, b^2c_1^2c_2+$$

$$+ \frac{8}{3}\, b^4c_1^4+8b^3c_1^4+ \frac{22}{3} b^2c_1^4+2b\ c_2^2+6bc_1^2c_2+2bc_1c_3+2b\ c_1^4).$$

$$5a_6= 2bc_5+4b^2c_1c_4+2b^2c_2c_3+4b^3c_1^2c_3+2b^2c_1^2c_3+ \frac{4}{3}b^2c_2c_3+4b^3c_1c_2^2+ \frac{8}{3}b^4c_1^3c_2+$$

$$+4\ b^3c_1^3c_2+ \frac{8}{3}b^2c_1c_2^2+ \frac{4}{3}b^2c_1^3c_2+b^2c_1^2c_4+ \frac{8}{3}b^3c_1^2c_2+b^3c_1c_2^2+4b^4c_1^3c_2+ \frac{22}{3}b^3c_1^3c_2+$$

$$+ \frac{4}{3}b^5c_1^5+4b^4c_1^5+ \quad \frac{11}{3}b^3c_1^5+b^2c_1c_2^2+3b^2c_1^3+ b^2c_1^2c_3+b^2c_1^5+2bc_1c_4+2bc_2c_3+4b^2c_1^2c_3+$$

$$+2bc_1^2c_3+2bc_2c_3+6b^2c_1c_2^2+4b^3c_1^3c_2+6b^2c_1^3c_2+4bc_1c_2^2+2bc_1^3c_2+2bc_1c_4+ \frac{16}{3}b^2c_1^2c_2+$$

$$2b^2c_1c_2^2+8b^3c_1^3c_2+ \frac{44}{3}b^2c_1^3c_2+ \frac{20}{3}b^4c_1^5+8b^3c_1^5+ \frac{22}{3}b^2c_1^5+2bc_1c_2^2+6bc_1^3c_2+2bc_1^2c_3+$$

$$+2bc_1^5 \quad .$$

$$5a_6= 2bc_5+5b^2c_1c_4+ \frac{10}{3}\, b^2c_2c_3+4b^3c_1^2c_3+7b^2c_1^2c_3+4b^3c_1c_2^2+ \frac{20}{3}b^4c_1^3c_2+ \frac{70}{3}\, b^3c_1^3c_2+$$

$$+ \frac{38}{3}\, b^2c_1c_2^2+22b^2c_1^3c_2+ \frac{8}{3}\, b^3c_1^2c_2+b^3c_1c_2^2+ \frac{4}{3}\, b^5c_1^5+4b^4c_1^5+ \frac{35}{3}\, b^3c_1^5+3b^2c_1^3+$$

$$+4bc_1c_4+ bc_2c_3+4bc_1^2c_3+6bc_1c_2^2+8bc_1^3c_2+ \frac{16}{3}\, b^2c_1^2c_2+ \frac{22}{3}\, b^2c_1^5+ 2b\ c_1^5 \quad .$$

$$4a_5 = 2bc_4 + \frac{16}{3}b^2c_1c_3 + 2b^2c_2^2 + 8b^3c_1c_2 + \frac{44}{3}b^2c_1c_2 + \frac{8}{3}b^4c_1^4 + 8b^3c_1^4 + \frac{22}{3}b^2c_1^4 +$$
$$+2bc_2^2 + 6bc_1^2c_2 + 2bc_1c_3 + 2bc_1^4$$
$$3a_4 = 2bc_3 + 6b^2c_1c_2 + 4b^3c_1^3 + 6b^2c_1^3 + 4bc_1c_2 + 2bc_1^3$$
$$2a_3 = 2bc_2 + 4b^2c_1^2 + 2bc_1^2$$
$$a_2 = 2bc_1$$

II Bölümün 6. ve 7. kısımlarındaki eşitsizlikleri kullanarak ,

$$|a_2| \le 2|b|.2 \qquad |c_k| \le 2 \qquad k = 1,2,3,\ldots$$
$$|a_2| \le 4|b|$$
$$|a_3| \le 2|b| + 8|b^2| + 4|b|$$
$$|a_3| \le 8|b^2| + 6|b|$$
$$|a_4| \le 12|b| + 24|b^2| + \frac{32}{3}|b^3|$$
$$|a_5| \le 25|b| + 66|b^2| + 48|b^3| + \frac{32}{3}|b^4|$$
$$|a_6| \le \frac{296}{5}|b| + \frac{2492}{15}|b^2| + 168|b^3| + \frac{704}{15}|b^4| + \frac{128}{15}|b^5|$$

elde edilir.

Teorem 2.6.12 ve Teorem 2.7.1 kullanılarak;

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 2bc_1 \\ \gamma_2 + a_2 = 0 \end{array}\right\} \gamma_2 = -2bc_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_2 = -2bc_1 \\ |c_1| \le 2 \end{array}\right\} |\gamma_2| \le 4|b|$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = bc_2 + 2b^2c_1^2 + bc_1^2 \\ \gamma_3 + 2a_2\gamma_2 + a_3 = 0 \end{array}\right\} \gamma_3 = 6b^2c_1^2 - bc_2 - bc_1^2$$

$$|\gamma_3| \le 24|b^2| + 6|b|$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a_4 = 2bc_3 + 6b^2c_1c_2 + 4b^3c_1^3 + 6b^2c_1^3 + 4bc_1c_2 + 2bc_1^3 \\ \gamma_4 + a_2\left(\gamma_2^2 + 2\gamma_3\right) + 3a_3\gamma_2 + a_4 = 0 \end{array}\right\}$$

$$3\gamma_4 = 24b^2c_1c_2 + 24b^2c_1^3 - 64b^3c_1^3 - 2bc_3 - 4bc_1c_2 - 2bc_1^3$$

$$3|\gamma_4| \le 512|b^3| + 288|b^2| + 36|b|$$

$$\gamma_5 + a_5 + a_2\left(2\gamma_4 + 2\gamma_2\gamma_3\right) + a_3\left(3\gamma_3 + 3\gamma_2^2\right) + 4a_4\gamma_2 = 0$$

$$\gamma_5 = 6b^3c_1c_2 + 10b^2c_1c_3 - \frac{250}{3}b^4c_1^4 - 29b^3c_1^2c_2 - 50b^3c_1^4 - \frac{1}{2}bc_4 - \frac{1}{2}bc_2^2 - \frac{3}{2}bc_1^2c_2 +$$
$$-\frac{1}{2}bc_1c_3 - \frac{1}{2}bc_1^4 + \frac{5}{2}b^2c_2^2 + \frac{55}{6}b^2c_1^4 + \frac{55}{3}b^2c_1^2c_2$$

$$3\left|\gamma_5\right| \le 4000\left|b^4\right| + 3168\left|b^3\right| + 890\left|b^2\right| + 75\left|b\right|$$

$$\gamma_6 + a_2\left(2\gamma_5 + 2\gamma_2\gamma_4 + \gamma_3^2\right) + a_3\left(6\gamma_2\gamma_3 + 3\gamma_4 + \gamma_2^3\right) + a_4\left(6\gamma_2^2 + \gamma_3\right) + 5a_5\gamma_2 + a_6 = 0$$

$$\gamma_6 = -\frac{3464}{15}b_5c_1^5 + \frac{4808}{15}b_4c_1^5 - 78b^3c_1^5 + \frac{41}{5}b^2c_1^5 - \frac{2}{5}bc_1^5 - 24b^4c_1^2c_2 + \frac{40}{3}b^4c_1^2c_3 +$$
$$+236b^4c_1^3c_2 - 40b^3c_1^3c_3 - 156b^3c_1^3c_2 - 22b^3c_1c_2^2 - \frac{332}{15}b^3c_1^2c_3 - \frac{8}{15}b^3c_1^2c_2 + 6b^2c_1c_4 +$$
$$-\frac{147}{15}b^2c_1c_2^2 + \frac{113}{5}b^2c_1^3c_2 + \frac{124}{15}b^2c_1^2c_3 + 2b^2c_2c_3 - \frac{3}{5}b^2c_1^3 - \frac{16}{15}b^2c_1^2c_2 + \frac{2}{5}bc_1^3c_2 - \frac{4}{5}bc_1c_4 +$$
$$-\frac{1}{5}bc_2c_3 - \frac{4}{5}bc_1^2c_3 - \frac{6}{5}bc_1c_2^2$$

$$15\left|\gamma_6\right| \le 110848\left|b^5\right| + 209221\left|b^4\right| + 127920\left|b^3\right| + 9456\left|b^2\right| + 396\left|b\right|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece kompleks mertebeden yıldızıl fonksiyonların maküs fonksiyonunun ilk altı katsayısı için üst sınırlar bulunmuş olur.

K A Y N A K L A R

[1]- A.W.Goodman, Univalent functions, Vols. 1,2, Mariner, Tampa, Flo.1983.

[2]- R.J.Libera and E.J.Zlotkiewicz, Early coefficients of the inverse of a regular convex function, Proc.Amer. Math. Soc. 85 (1982), 225-230.

[3]- U.Grenander and G.Szegö, Toeplitz forms and their applications (Univ.of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1958).

[4]- R.J.Libera and E.J.Zlotkiewicz, Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in P.II, Proc. A.M.S.92 (1984). 58-60.

[5]- R.J.Libara and E.J.Zlotkiewicz, Behavior of coefficients of inverses of α-spiral functions, Can.J.Math, (1986) 1329-1337.

[6]- R.J.Libera and E.J. Zlotkiewicz, Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in P, Proc A.M.S. 87. (1983) 251-257.

[7]- M.A. Nasr and M.K.Aouf, Starlike function of complex order, Journal of Natural Sciences and Maths Vol.25 (1985) 1-12.

[8]- I.S.Jack. Functions starlike and convex of order α.J. London Math. Soc. (2),(3). (1971) 469-474.

[9]- C.H. Pommerenke : On starlike and convex functions. J.L, Math. soc. (1962) 209-224.

[10]- M.S. Robertson. On the theory of univalent functions Ann of Math. 37 (1936) 374-408.

[11]- W.Kaplan.Close.to. convex schlicht functions. Michigan Math. J.L. (1952) 169-185.

[12]- P.Wiatrowski. The coefficients of a certain family of holomorphic functions Zeszyty. Nauk. Univ.Tozdk.Naukki Math. Pryznod Ser II.Zesyt (39) 1981, 57-85.

[13]- G.Polya und G.Szegö. Aufgaben und Lehrsatze aus der analysis. 1954. Determinanten und quadratische Formen. 80-116.

[14]- Peter L.Duren. Univalent Functions. 1985.