T.C.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM YÖNTEMLERİ VE ÇEŞİTLİ AĞIRLIK FONKSİYONLARININ ETKİLERİ

Pınar TİRYAKİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Doç. Dr. N. A. Baki BAYKARA

İSTANBUL 2008

T.C.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM YÖNTEMLERİ VE ÇEŞİTLİ AĞIRLIK FONKSİYONLARININ ETKİLERİ

Pınar TİRYAKİ

(141103120040034)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Doç. Dr. N. A. Baki BAYKARA

İSTANBUL 2008

TEŞEKKÜRLER

Tezimin her aşamasında bana sabırla yardımcı olan değerli büyüklerime, kıymetli hocam Doç. Dr. N. Abdulbaki BAYKARA' ya, desteğini hep hissettiren aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mart, 2008 **Pınar TİRYAKİ**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM YÖNTEMLERİ VE ÇEŞİTLİ AĞIRLIK FONKSİYONLARININ ETKİLERİ

Bu çalışmada çok değişkenli fonksiyonların yaklaştırımı ile ilgilenilmektedir. Bu amaçla literatürde geliştirilmiş olan ve bu tezin ana konusunu oluşturan Yüksek Boyutlu Model Gösterilim Yönteminin (YBMG) temel özellikleri ve çeşitli versiyonları incelenmektedir. Bu tezin esas amacı, başlıktan da anlaşılacağı üzere toplamsal yapıdaki YBMG türü için ağırlık fonksiyonlarının etkilerinin incelenmesidir. Bu tezde dört farklı yapıda çok değişkenli fonksiyon ele alınmış ve her bir fonksiyon için altı farklı ağırlık fonksiyonu ile YBMG yaklaştırımları oluşturularak sonuçların ne denli iyi olduğu toplamsallık ölçenleri vasıtasıyla belirlenmeye çalışılmıştır. Sonuç olarak, fonksiyonun tepe noktası ile ağırlık fonksiyonunun tepe noktası uyuştuğunda YBMG için iyi sayılabilecek yaklaştırımlara yol açtığı gözlenmiştir.

Mart, 2008

Pınar TİRYAKİ

ABSTRACT

HIGH DIMENSIONAL MODEL REPRESENTATION METHODS AND THE EFFECT OF VARIOUS WEIGHT FUNCTIONS

In this work approximation of multivariable functions are dealt with. To this end, the fundamental properties of High Dimensional Model Representation Method, which is the main subject of this thesis, and its various versions are analysed. The main aim of this thesis is, to analyze the effect of weight functions on the additive HDMR. Four multivariate functions, each having a different structure, are expanded with HDMR utilizing six different weight functions for each case. Additivity measurers are used to evaluate the results. It has been observed that when the peaks of the function and the weight function roughly agree, reasonably good results are obtained.

March, 2008 **Pınar TİRYAKİ**

SEMBOL LİSTESİ

f_0	: **YBMG Açılımının Sabit Bileşeni**
$f_i(x_i)$	: **YBMG Açılımının x_i Değişkenine Bağlı Bileşeni**
$f_{ij}(x_i, x_j)$	: **YBMG Açılımının x_i ve x_j Değişkenine Bağlı Bileşeni**
s_i	: **i.inci Mertebeden Toplamsal YBMG Yaklaştırımı**
σ_i	: **i.inci Mertebeden Toplamsallık Ölçeni**
$E[f(x)]$	: **$f(x)$ Fonksiyonunun Beklenen Değerini**
$Var[f(x)]$	: **$f(x)$ Fonksiyonunun Varyansı**
$D_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$	: **Kısmi Varyansı**
D	: **Toplam Varyansı**
$S_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$	: **Duyarlılık İndisi**
p_i	: **i.inci Mertebeden Çarpımsal YBMG Yaklaştırımı**
α	: **Melezlik Katsayı**
h_{jk}	: **(j,k). Melez YBMG Yaklaştırımı**
B_{ki}	: **Fourier Sinüs Serisinin Katsayısı**

KISALTMALAR

YBMG **:** Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

TYBMG **:** Toplamsal Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

ÇYBMG **:** Çarpımsal Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

MYBMG **:** Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

GYBMG **:** Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

KYBMG **:** Kesme Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

ÇKYBMG **:** Çoklu Kesme Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

SÖYBMG **:** Seçkisiz Örneklemeli Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

EYBMG **:** Evrimsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

TABLO LİSTESİ

BÖLÜM I

GİRİŞ

Çeşitli doğal olayların fiziksel yapısı ve matematiksel modellemeleri genellikle çok sayıda değişken içerir. Öyle ki bu sayı kimi zaman yüz binlere ulaşabilir. Bu da bize problemlerin çözümü için çok büyük yükler getirir ve hesaplamaları zorlaştırır. Yani çoğu kez değişken sayısı arttıkça hesaplamanın maliyeti de artar. Bu ise bizi fonksiyonlar yerine onlar için yaklaşımlar kullanmaya iter. Yaklaşım teknikleri kimi zaman tek değişkenli fonksiyonlar için bile epeyce sorunludur. Lagrange interpolasyon metodu veya bölünen farklar metodunda işlemlere dahil edilen her düğüm noktası, yaklaştırım polinomunun derecesini bir artıracaktır. Aynı zamanda interpolasyon polinomunun derecesinin artması kontrol edilemez salınımlara neden olur. Dolayısıyla binlerce nokta ile işlem yapmaya çalışmak zaman ve teknik donanım olarak büyük maliyet getirir. Düğüm sayısını azaltmak ise, yaklaştırımın kalitesini düşürür. Bu sebeple fonksiyonların yaklaştırımı için çeşitli interpolasyon türleri uygulanabilir. Cebirsel polinomlarla interpolasyon, rasyonel fonksiyonlarla interpolasyon, trigonometrik polinomlarla interpolasyon vs. Fakat bunların içinde pratik açıdan en cazip olanları cebirsel polinomlarla interpolasyon ve splain interpolasyon (parçalı polinomlarla interpolasyon) dur. Buradan yola çıkarak interpolasyon türlerine kısaca değinelim.

Lagrange interpolasyon polinomunu tanımlamak için, [a,b] aralığının $x_0, x_1, ..., x_N$, $(x_i \neq x_j, i \neq j)$ noktalarında bir gerçek değerli $f(x)$ fonksiyonunun $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_N)$ değerleri belli olsun.

$$P_N(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,..., N \tag{I.1}$$

şartını sağlayan $P_N(x)$ polinomuna $f(x)$ fonksiyonu için $x_0, x_1, ..., x_N$ düğüm noktalarına göre interpolasyon polinomu denir.

[a,b]' de sürekli keyfi $f(x)$ fonksiyonu için derecesi N'den büyük olmayan ve (I.1) koşulunu sağlayan interpolasyon polinomu vardır ve tektir. Gerçekten,

$$P_N(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_N x^N$$

ile derecesi N'den büyük olmayan keyfi bir polinomu belirtir bunun $f(x)$ için interpolasyon polinomu olması, (I.1)'e göre

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_N x_i^N = f(x_i), \quad i = 0,1,..., N \tag{I.2}$$

şartını sağlaması ile mümkündür.

İnterpolasyon polinomları için çeşitli yazılış biçimleri kullanılmaktadır. Bunların içinde en fazla kullanılanları Lagrange ve Newton formlarıdır. Buna göre (1.1) şartını sağlayan $P_N(x)$ interpolasyon polinomunu

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k(x) f(x_k) \tag{I.3}$$

biçiminde ifade edebiliriz, öyle ki $c_k(x)$ ' ler n dereceli ve

$$c_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \tag{I.4}$$

şartını sağlayan polinomlar olmakla birlikte (I.4)' e göre $c_k(x)$ polinomları

$$c_k(x) = \lambda_k (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_N)$$

şeklinde gösterilebilir. $c_k(x_k) = 1$ şartından λ_k çarpanı bulunur:

$$\lambda_k^{-1}(x) = (x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_N)$$

böylece

$$c_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ \neq k}}^{N} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \tag{I.5}$$

elde edilir. (I.3) ile verilen polinoma Lagrange Interpolasyon Polinomu denir. Lagrange interpolasyon polinomunun hatası aşağıda ifade edildiği gibidir.

$$R_N(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(N+1)!} \prod_{j=0}^{N} (x - x_j)$$

Burada $\xi(x)$, x_0 ile x_N arasında bir değerdir.

Aynı interpolasyon polinomu Newton Bölünen Farklar yöntemi ile de ifade edilir. Herhangi $f(x)$ fonksiyonunu ve $x_0, x_1, \ldots, x_N \in [a,b]$ $\left(x_i \neq x_j, i \neq j\right)$ düğüm noktalarını ele alalım. Birinci mertebeden bölünen farklar,

$$f\left(x_i; x_j\right) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, N, i \neq j$$

biçiminde belirlenmiş oranlara denir. Bunlardan yararlanarak (m+1). bölünen fark, m. bölünen farklarla şöyle tanımlanır:

$$f\left(x_{N-2}, x_{N-1}; x_N\right) = \frac{f(x_{N-1}; x_N) - f(x_{N-2}; x_{N-1})}{x_N - x_{N-2}}$$

Benzer olarak daha yüksek mertebeden bölünen farklar tanımlanabilir. Ayrıca m. bölünen farkın fonksiyon değerleri ile ilgili formülü şöyledir:

$$f\left(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+m}\right) = \sum_{j=i}^{i+m} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{\ell=i \\ \ell \neq j}}^{i+m} (x_j - x_\ell)} \tag{I.6}$$

Bununla beraber $a_i = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i]$ olmak üzere bölünen farklarla P_N aşağıdaki şekilde ifade olunmaktadır.

$$\begin{aligned} P_N(x) = {} & f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ & \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_N) f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N] \end{aligned}$$

Lagrange ve Newton polinomları sadece yazılış biçimlerine göre farklı olduklarından, onların her ikisi doğal olarak aynı hataya sahip olacaklardır. Fakat bu hatayı değişik biçimde de göstermek mümkündür. (I.6) formundan uygun işlemler yapılarak

$$R_N(x) = f(x, x_N, x_{N-1}, \ldots, x_0) \prod_{j=0}^{N} (x - x_j)$$

şeklinde interpolasyon formülünün hatası elde edilmektedir.

İnterpolasyon problemlerinin çözümünde en çok kullanılan yöntem splayn interpolasyondur. Kübik Spline'lar da en sık kullanılan splinelardır. [a,b]'de $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ kabul edelim.

i) Her bir $[x_i, x_{i+1}]$, i = 0,1,....,n-1 ararlığı üzerinde S(x)üçüncü derece polinomdur;

ii) S(x) ve bunun birinci ve ikinci türevleri [a,b]'de süreklidir;

iii) $S(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,...,n$

şartlarını sağlayan S(x) fonksiyonuna f(x) fonksiyonu için $\{x\}_{i=0}^{n}$ düğümleri üzerinde kübik spline-interpolant denir.

Diğerleri kadar sık olmamasına karşın yine de söz etmeye deyecek kadar çok kullanılan bir interpolasyon polinom türü ise Hermit polinomlardır. Hermit interpolasyon polinomunu ifade etmek için,

$$f(x_k), f^{'}(x_k),... \qquad k = 0,1,...,N$$

değerleri verilmiş olsun. Böylece toplam bilinen sayısı $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n$ olur. Derecesi (2N+1) olan ve

$$H_{2N+1}^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k), \qquad k = 0,1,....,N, \;\; i = 0,1,... \qquad \text{(I.10)}$$

şartlarını sağlayan $H_m(x)$ polinomunun kurulması istensin. (I.10) şartını sağlayan $H_m(x)$ polinomuna Hermite interpolasyon polinomu denir.

Cebirsel polinomlarla interpolasyon pratik açıdan en çok kullanılan interpolasyon kuralıdır. Fakat, keyfi fonksiyon için bu metot her zaman verimli olmayabilir. Dolayısıyla başka interpolasyon tiplerine de ihtiyaç duyulur. Bu sebeple bazı diğer interpolasyon tipleri de kullanılmaktadır. Eğer f(x) fonksiyonu 2π periyotlu bir fonksiyon ise, bu durumda doğal olarak f(x)'e yaklaşım

$$\varphi_i(x) = a_i \cos ix + b_i \sin ix, \qquad i = 0,1,...,N$$

fonksiyonları kullanılarak kurulabilir. Böylece, trigonometrik interpolasyon problemi, f(x)'e karşılık

$$T_N(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0,1,...,2N$$

olacak şekilde

$$T_N(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{N}(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

trigonometrik polinomunun kurulmasıdır. Burada $0 \le x_0 < x_1 < ... < x_{2N} < 2\pi$ dir.

Eğer f(x) fonksiyonu herhangi ℓ periyoduna sahip ve $[0,\ell]$ aralığı esas aralık ise, bu durumda $t = \frac{2\pi x}{\ell}$ $(0 \le x \le \ell)$ dönüşümü ile problemi her zaman $[0,2\pi]$ ye taşımanın mümkün olduğunu belirtelim. Bir diğer interpolasyon yöntemi ise Genelleştirilmiş Polinomlarla İnterpolasyondur. [a,b]'de lineer bağımsız

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_N(x)$$

sistemi verilmiş ve $a \le x_0 < x_1 < ... < x_N \le b$ biçiminde tanımlanmış olsun.

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + ... + c_N\varphi_N(x), \qquad (c_i = \text{sabitler}, i = 0,1,...,N)$$

biçimindeki ifadeye $\{\varphi_i(x)\}_1^N$ sistemine göre genelleştirilmiş polinom denir.

$$\varphi(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0,1,...,N$$

şartlarını sağlayan $\varphi(x)$ fonksiyonuna f(x) için $x_0, x_1, ..., x_N$ düğümlerine göre genelleşmiş interpolasyon polinomu denir.

Bu anlatılanların dışında özellikle istatistikte sıkça kullanılan en küçük kareler yöntemlerinin çeşitli sürümleri de mevcuttur. Çok değişkenli fonksiyonların yaklaştırımında bu yaklaşım yöntemlerinin kullanılabildiği görülmektedir. Fakat karşılaşılan zorluklar sebebiyle bu yaklaşımlardan istenildiği kadar kolay sonuçlar alınamamaktadır.

Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) kullanıldığında YBMG'nin uygun çeşitleri için sadece ikinci veya üçüncü mertebeden yaklaştırım yapmakla yeterince iyi sonuçlar elde edilebildiği açıkça görülmektedir. Bu işlem maliyetini oldukça azaltmaktadır. Diğer bir avantajı da YBMG yardımıyla yaklaştırım hesaplanırken integral operatörünün kullanılmasıdır. Bu yöntemle yaklaştırım fonksiyonlarının diğer yöntemlerdekilere göre daha düzgün fonksiyonlar olması beklenir. Problemlerin çözümünde ortaya çıkan sorunların farklılığı YBMG'nin çeşitliliğine sebep olmuştur. İncelenen çok değişkenli fonksiyonun yapısına uygun olarak YBMG çeşidi seçildiğinde etkin çözümler elde edilebilmektedir. Örneğin GYBMG kullanıldığında, işlemlere dahil edilen düğüm sayısı ile yaklaştırımdaki değişken sayısı birbirinden bağımsızdır. Düğüm sayısının artırılması işlemlere çok büyük bir yük getirmediği gibi yukarıdaki yöntemler kullanılarak elde edilen yaklaşıklık, YBMG ile çok daha az düğümle işlem yapılarak elde edilemektedir. Ayrıca model gerçek hayatta mevcut olabileceği gibi laboratuar gözlemlerine de dayanabilir. Bu tip problemler de değişkenler üzerine etki edilebilmesi büyük önem taşımaktadır. Çünkü Spline interpolasyonu veya Taylor serileri gibi yöntemlerin kullanılabilmesi için, verilerin düzgün bir ağ üzerine saçılmış olması gerekmektedir. Eğer veriler rastgele seçilmiş ise bu, yukarıdaki yöntemleri ve bilinen çoğu yöntemi geçersiz kılacaktır ki GYBMG, her iki tip probleme de uygulanabilmektedir.

Bu çalışma da YBMG çeşitleri tanımlanarak, seçilen fonksiyonlara çeşitli ağırlık fonksiyonlarının etkisini YBMG için inceleyeceğiz.

BÖLÜM II

YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM YÖNTEMLERİ

Çok sayıda bağımsız değişkeni olan bir fonksiyonun bağımsız değişken sayısının çok büyümesi durumunda, incelenmesi ve işleme sokulması fonksiyon yapısında kolaylık sağlayıcı bir takım özellikler olmadığı taktirde bir kısım zorluklar ortaya çıkarmaktadır. Günümüzün etkin bilgisayarlarına rağmen bu güçlükler çoğu kez, kaba hesaplamalar için bile, uygulamalarda ciddi sıkıntılara yol açar. Burada sorunun kaynağının çok sayıda bağımsız değişkenin devrede olması şeklinde düşünülebileceği gözönüne alınırsa sorunu "böl ve yönet" görüşü çerçevesinde çözmeye çalışmanın akılcı bir yaklaşım olduğu görülür. Bu doğrultuda ilk çaba I. M. Sobol [1-4] adlı bir Rus istatistikçi tarafından Kolmogorov'un [5] bir çalışmasına dayanarak ortaya atılan bir açılım yöntemiyle ortaya çıkmaktadır. Metodun temel felsefesi aşağıda çok değişkenli $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonu için yazılan genel bağıntıda verilmektedir.

$$
\begin{aligned}
f(x_1, ... x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \\
\sum_{\substack{i_1, i_2, i_3 = 1 \\ i_1 \langle i_2 \langle i_3}}^{N} f_{i_1, i_2, i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + ... + f_{123.....N}(x_1, x_2, x_3, ...x_N)
\end{aligned}
\tag{II.1}
$$

Bu denklemde, denklemin sol tarafında bulunan ve $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ şeklinde gösterilen ve $x_1, x_2, ..., x_N$ ile simgelenen N bağımsız değişkene bağlı çok değişkenli bir fonksiyon, denklemin sağ tarafında bulunan dik bileşenlerine ayrılmıştır. İlk bileşen f_0 ile simgelenen bir sabittir. Daha sonraki ilk N bileşen $f_1(x_1), f_2(x_2), ..., f_N(x_N)$ şeklinde simgelenen ve her biri tek bir bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlardır. Bunların ardından da her biri iki bağımsız değişkene bağlı $N(N-1)/2$ adet fonksiyon gelmektedir. Diğer bileşenler de bu şekilde, gittikçe artan sayıda bağımsız değişken içeren fonksiyonlardan oluşmaktadır. En son bileşen ise açılımı yapılan fonksiyonun bağlı olduğu bağımsız değişken kadar bağımsız değişkene sahip fonksiyondur. Sağ taraftaki terimlerin toplam adedi 2^N dir. Dolayısıyla sonlu sayıda bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon için açılımda yaratılabilecek terim sayısı sonludur. Bu sonlu sayıda terimin hepsini almak yerine, yalnızca sabit terimin ya da sabit terimle birlikte tek değişkenli bileşenlerin veya bunlarla beraber iki değişkenli bileşenlerin alınacağı biçimde kesmeler yapmak ve bu oluşan yapıları gerçek fonksiyona bir yaklaştırım olarak düşünmek mümkündür. Kaç değişkenli bileşenlere kadar ilerlemek gerektiğini fonksiyonun yapısı tayin eder. Ancak sabit terim, bir değişkenli ve iki değişkenli bileşenlerden fazla sayıda terim alındığında hesaplama maliyeti artacağından, çok fazla bileşen ile ilgilenmek yöntemin gerisindeki gerçek amaca uygun olmayacaktır.

YBMG bileşenleri ve özellikleri ilk defa 1993 yılında I.M. Sobol tarafından "Sensitivity Estimates for Nonlineer Mathematical Models" isimli makalede birim ağırlık ve [0,1] aralığı kullanılarak ortaya atılmıştır ve yöntem, A.B.D. Princeton Universitesinden H. Rabitz tarafından geliştirilerek ortogonalite özelliğine ağırlık fonksiyonu ve $[a_i, b_i]$ kavramları da eklenerek High Dimensional Model Representation (Yüksek Boyutlu Model Gösterilim) adı verilmiştir [1]. Rabitz'in asıl amacı Fiziko-Kimyasal uygulamalardır. Gerek Rabitz gerekse Demiralp yöntemin çeşitli versiyonlarını geliştirmiştir [6]. YBMG nin tanımlanan en genel hali ile bileşenleri ve ağırlık fonksiyonları ile ilgili bilgiler aşağıda verilmektedir.

YBMG yönteminde (II.1) denkleminin sağ tarafındaki bütün bileşenler birbirine dik seçilir. Burada diklik koşulu bir iç çarpım üzerinden tanımlanmakta ve gerek $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonunun gerekse bileşen fonksiyonların karesi integre edilebilen fonksiyonlar olduğu varsayılmaktadır. $x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2], ..., x_N \in [a_N, b_N]$ olarak tanımlanan aralıkta kare integrallerin ve iççarpım bağımsız değişkenlerin her biri için o değişkene bağlı olan bir ağırlık fonksiyonu kullanılmaktadır. Dolayısıyla, $u(x_1, x_2, ..., x_N)$ ve $v(x_1, x_2, ..., x_N)$ şeklinde simgelenen karesi integre edilebilen herhangi iki fonksiyon için iç çarpım, $w_i(x_i)$ ler ağırlık fonksiyonları olmak üzere şöyle tanımlanmaktadır.

$$(u,v) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \ldots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) u(x_1, x_2, \ldots, x_N) v(x_1, x_2, \ldots, x_N) \qquad \text{(II.2)}$$

Ayrıca, sözü edilen bileşenlerin kolayca saptanabilmesi için, ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olduğu, yani normalize olduğu varsayılır

$$\int_{a_i}^{b_i} W_i(x_i) dx_i = 1 \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(II.3)}$$

(II.1) denkleminin sağ yanındaki bileşenlerin diklik koşuluna uymaları gerekmektedir. Bu durumda bu bileşenler, aşağıda belirtilen (II.4), (II.5) ve (II.6) denklemlerini sağlarlar.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i f_i(x_i) W_i(x_i) = 0 \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(II.4)}$$

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i f_{ik}(x_i, x_k) W_i(x_i) = 0 \qquad \int_{a_k}^{b_k} dx_k f_{ik}(x_i, x_k) W_k(x_k) = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

$$\vdots$$

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i f_{j_1 j_2 \ldots j_k}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}) W_i(x_i) = 0 \qquad j_1 \le i \le j_k, 1 \le k \le N \qquad \text{(II.6)}$$

(II.1) eşitliğinin sağ tarafındaki büyüklüklerin her birinin belirlenmesi için bir takım izdüşüm operatörlerinden yararlanabiliriz. Bu bağlamda,

$$I_0 F(x_1, \ldots, x_N) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \ldots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) F(x_1, \ldots, x_N) \qquad \text{(II.7)}$$

operatörünü tanımlayalım ve (II.1) denkleminin her iki yanına bu tanımladığımız I_0 operatörünü uygulayalım [7].

$$I_0 f(x_1, x_2, ... x_N) = I_0 f_0 + I_0 \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + I_0 \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 < i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + ...$$

(II.4) ve (II.6) arasında tanımlanan Diklik koşulu gereği, yukarıdaki eşitlikte I_0 operatörü, sabit terimin dışındaki terimleri sıfırlayacaktır. Bu durumda,

$$I_0 f(x_1, x_2, ..., x_N) = f_0 \tag{II.8}$$

eşitliği elde edilir. Tek bağımsız değişkenli bileşenleri belirleyebilmek için aşağıda gösterilen operatörü tanımlayalım. $j = 1,2,..., N$ için

$$\begin{aligned} I_j F(x_1, ..., x_N) \equiv & \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) .... \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} dx_{j-1} W_{j-1}(x_{j-1}) \\ & \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} dx_{j+1} W_{j+1}(x_{j+1}) ..... \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) F(x_1, ..., x_N) \end{aligned} \tag{II.9}$$

I_j operatörü, (II.1) denkleminin her iki yanına uygulanarak,

$$I_j f(x_1, ..., x_N) = I_j f_0 + \sum_{i=1}^{N} I_j f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 < i_2}}^{N} I_j f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + ... \tag{II.10}$$

ifadesi elde edilir ve buradan da (II.4), (II.5) ve (II.6) denklemleriyle verilen diklik koşulu da gözönüne alınarak

$$I_j f(x_1, ..., x_N) = f_0 + f_j(x_j)$$

ifadesi elde edilir ve $f_j(x_j)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f_j(x_j) = I_j f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_0$$

Bu anlatılanları farklı notasyonla da tanımlayabilmekteyiz. Buna göre tek değişkenli $f_i(x_i)$ bileşenleri benzer şekilde (II.1) denkleminin, ağırlık fonksiyonunun

$w_i(x_i)$ dışındaki bileşenleri ile çarpılıp, eşitliğin her iki yanının x_i bileşenleri dışındaki bütün değişkenlere göre integre edilmesiyle elde edilir. Burada da

$$dx^i \equiv dx_1 dx_2 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_{N-1} dx_N$$

olmak üzere, (II.2) ve (II.3) koşulları kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} w_k(x_k) f(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx^i &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} w_k(x_k) f_0\,dx^i \\
&+\sum_{j=1}^{N}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} w_k(x_k) f_j(x_j)\,dx^i + \ldots \\
&+\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} w_k(x_k) f_{12\ldots N}(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} w_k(x_k) f(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx^i &= f_0\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N} w_1(x_1)\ldots w_{i-1}(x_{i-1}) w_{i+1}(x_{i+1})\ldots w_N(x_N)\,dx^i \\
&+ f_i(x_i) + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} w_k(x_k) f_j(x_j)\,dx^i \\
&= f_0 + f_i(x_i)
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla tek değişkenli bileşenler $1 \le i \le N$ olmak üzere

$$f_i(x_i) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} w_k(x_k) f(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx^i - f_0 \qquad \text{(II.11)}$$

olarak elde edilmiş olur.

Genelleştirirsek $I_{i_1\ldots i_k} F(x_1,x_2,\ldots.,x_N)$ operatörü $F(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ fonksiyonunun $x_{i_1}, x_{i_2},\ldots,x_{i_k}$ değişkenlerini dışlayarak ilgili integral aralıkları ve ağırlıklar gözönüne alınarak çarparak integre etmeyi temsil etsin.

$$I_{i_1\ldots i_k}F(x_1,\ldots,x_N)=\int_{a_1}^{b_1}dx_1W_1(x_1)\ldots\int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}}dx_{i_1-1}W_{i_1-1}(x_{i_1-1})\int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}}dx_{i_1+1}W_{i_1+1}(x_{i_1+1})\ldots$$
$$\int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}}dx_{i_2-1}W_{i_2-1}(x_{i_2-1})\int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}}dx_{i_2+1}W_{i_2+1}(x_{i_2+1})\ldots \quad \text{(II.12)}$$
$$\int_{a_{i_k-1}}^{b_{i_k-1}}dx_{i_k-1}W_{i_k-1}(x_{i_k-1})\int_{a_{i_k+1}}^{b_{i_k+1}}dx_{i_k+1}W_{i_k+1}(x_{i_k+1})\ldots\int_{a_N}^{b_N}dx_NW_N(x_N)F(x_1,\ldots,x_N)$$

Bu durumda iki bağımsız değişkenli bileşenleri bulmak için $I_{j_1j_2}$ operatörünü (II.1)'e uygularsak;

$$I_{j_1j_2}f(x_1,\ldots x_N)=f_0+f_{j_1}(x_{j_1})+f_{j_2}(x_{j_2})+f_{j_1j_2}(x_{j_1},x_{j_2})$$

eşitliğini elde ederiz. Bu denklemde $f_{j_1j_2}(x_{j_1},x_{j_2})$ sol tarafa alınır ve denklem düzenlenirse,

$$f_{j_1j_2}(x_{j_1},x_{j_2})=I_{j_1j_2}f(x_1,\ldots x_N)-f_0-f_{j_1}(x_{j_1})-f_{j_2}(x_{j_2}) \quad \text{(II.13)}$$

ifadesi bulunur. Tek terimlilerin tayinindeki ikinci gösterilime benzer şekilde iki terimliler de ifade edilebilir. İki değişkenli $f_{ij}(x_i,x_j)$ bileşenleri elde etmek için (II.1) denkleminin her iki yanını $\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{N}w_k(x_k)$ ile çarpıp, x_i ve x_j dışındaki değişkenlere göre,

$$dx^{ij}=dx_1dx_2\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_{j-1}dx_{j+1}\ldots dx_{N-1}dx_N \qquad 1\le i\le j\le N$$

alarak, integre ederiz. Böylece iki terimliler genel bir ifade ile,

$$f_{ij}(x_i,x_j)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}}\int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\ldots\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{N}w_k(x_k)f(x_1,x_2,\ldots,x_N)dx^{ij}-f_i(x_i)-f_j(x_j)-f_0 \quad \text{(II.14)}$$

olarak bulunur. Diğer terimler de aynı şekilde bulunabilmektedir.

Yapılan incelemelerle (II.1) bağıntısı ile verilen toplamsal açılımdaki terimlerin toplam boya katkılarının ölçümüyle, toplamsal yapıdan nasıl bir yaklaşım üretebileceği hakkında fikir alınır. Daha once de söylendiği gibi (II.1) açılımı, her ne kadar dik açılım olsada, sonsuz olmayıp sonlu sayıda terim içermektedir. Ancak bu sonlu terim sayısı N değişkeninin çok çok büyük olması durumunda uygulama ve kullanım kolaylığı özelliğini ciddi anlamda yitirebilmektedir. Dolayısıyla, baştan başlayarak sırasıyla yalnızca belli kesimin ele alınması geri kalan kesimin ise gözardı edilerek bir yaklaştırım üretilmesi yani toplamsal açılımdan kesme yapılması uygulama açısından büyük önem kazanmaktadır. Bu önemin bir başka nedeni de, açılımdaki ilk terimin sabit olması ve incelemelerde son derece büyük kolaylık getirmesidir. Daha duyarlı bir yaklaştırım için f_0 ile birlikte $f_i(x_i)$ $(1 \leq i \leq N)$ şeklinde bir bağımsız değişkenli fonksiyonlar da alınarak başka bir yaklaştırım elde edilebilir. Bu katılımda tek bağımsız değişkenli fonksiyonlar üzerinde yapılacak işlemler de analitik olarak ger çekleşmeyen durumlarda sayısal yaklaştırım yapılabileceğinden çok büyük zorluklar getirmemektedir. Dolayısıyla benzer durum gittikçe azalan düzeydeki iki ve üç bağımsız değişkenli fonksiyon içeren terimler için de geçerli olmaktadır. Bu yapılanlarla beraber M. Demiralp (II.1) denkleminin sağ yanında uygun kesmeler yapmıştır. Bunu takiben, oluşturulan toplamsal yaklaştırımın normunun karesinin, $f(x_1, x_2, ..., x_N)$'in normunun karesine oranını elde etmiştir. Toplamsallık ölçeni adı verilen bu ifade için aşağıdaki tanımlar yapılmıştır [8].

Değişmezlik ölçeni:

$$\sigma_0 \equiv \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2} \tag{II.15.a}$$

Birinci basamaktan toplamsallık ölçeni:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_0 + \frac{\sum_{i=1}^{N} \|f_i\|^2}{\|f\|^2} \tag{II.15.b}$$

İkinci basamaktan toplamsallık ölçeni:

$$\sigma_2 \equiv \sigma_1 + \frac{\sum\limits_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} \left\| f_{i_1,i_2} \right\|^2}{\left\| f \right\|^2} \tag{II.15.c}$$

Bu tanımlardan kolayca görülebileceği üzere σ_0 sabit teriminin yani f_0 büyüklüğünün tüm açılımdaki katkı düzeyini belirlemektedir. Gerek σ_0 ve gerekse diğer σ büyüklükleri 0 ile 1 arasında değer alabilmektedir. $\sigma_0 = 1$ durumu ancak ve ancak $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonunun bir sabit olması ile mümkündür. Dolayısıyla, σ_0 büyüklüğünü "Değişmezlik Ölçeni" olarak adlandırılmıştır. Benzer bir gözlem diğer σ büyüklüklerinin de benzer biçimde adlandırılabileceğini gösterir. Yani sözgelimi, σ_k her biri en çok k bağımsız değişkenden oluşan fonksiyonları içerecek biçimde yapılacak bir toplamsal kesmenin tüm açılımdaki payını simgeler. Dolasıyla, en genel biçimiyle, σ_k büyüklüğünü "k. Basamaktan Toplamsallık Ölçeni" olarak adlandırılmaktadır ve aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\sigma_k \equiv \sigma_{k-1} + \frac{\sum\limits_{\substack{i_1,i_2,...,i_k=1 \\ i_1<i_2<...<i_k}}^{N} \left\| f_{i_1,i_2,...,i_k} \right\|^2}{\left\| f \right\|^2} \tag{II.16}$$

Ifade edilen σ_k ler [0,1] arasında değer alırlar ve aşağıdaki ilişkileri sağlarlar.

$$0 \le \sigma_0 \le \sigma_1 \le \sigma_2 \le ... \le \sigma_N = 1 \tag{II.17}$$

Dolayısıyla, σ_k'lar 1'e ne kadar yakınsa yaklaştırımımız gerçek sonuca o kadar yakındır. σ_1'in 1'e eşit olması halinde, $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonumuzun "Toplamsal Açılabilir" bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz. Ancak bazı fonksiyonlar için toplamsal açılımın son terimine kadar gidilmedikçe yeterli duyarlılık elde etmek mümkün olmamaktadır.

Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminin uygulama alanları çok geniştir. Yüksek Boyutlu Model Gösterilim çok değişkenli fonksiyonlara ihtiyaç duyulan her alanda kullanılabilir. İlk kullanım alanı ise duyarlılık analizidir.YBMG açılımından ayrıca kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü aranırken faydalanılabilinir ya da düzgün veya seçkisiz saçılmış çok değişkenli verilere dayanan problemlerde kullanılabilir. YBMG uygulaması son yıllarda önemli ilgi toplayan çok değişkenli difüzyon denkleminde kullanılmaktadır [9-12]. Yüksek boyutlu iletim denkleminin çözümü için yöntem olarak YBMG ele alınabilmektedir. Çok değişkenli bir fonksiyon, bağımsız değişken sayısı indirgenmiş birden fazla fonksiyon ile, konum değişmezlerine göre sabit terimin, tek terimlilerin, ikililerin ve bu türden diğer terimlerin toplamı olarak, yaklaşık ifade olunabilmesi durumuna dayanarak iletim denkleminin kesin analitik çözümü yerine yaklaşık fonksiyonlar kullanılabilmektedir.

II.1 ÇARPIMSAL YBMG (FACTORIZED HDMR)

İncelenen çok değişkenli $f(x_1, x_2,..., x_N)$ fonksiyonda çarpımsal yapının baskın olduğu durumlarda YBMG tatminkar sonuçlar vermemektedir. İşte böyle durumlarda kullanılmak üzere M. Demiralp ÇYBMG'yi ortaya atmıştır [13-15]. İfade edilen ÇYBMG (Çarpımsal Yüksek Boyutlu Model Gösterilim) gerçek çözüme çok daha yakın sonuçlar vermektedir. Eğer $f(x_1, x_2,..., x_N)$ tamamen çarpımsal yapıda ise ilk adımda kesin çözüm elde edilebilmektedir. ÇYBMG yaklaştıranlarının tayini YBMG bileşenlerinin belirlenmesini gerektirir. Buna göre

$$f(x_1, x_2,..., x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) +$$

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1 \\ i_1 \langle i_2 \langle i_3}}^{N} f_{i_1,i_2,i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + ... + f_{123.....N}(x_1, x_2, x_3,....x_N)$$

açılımından yararlanarak $f(x_1, x_2,..., x_N)$ fonksiyonu için çarpımsal bir gösterilim ve buna dayalı bir yaklaştırım şeması oluşturulur. Bu amaçla (II.1) yerine, bir ε değişkeninin içealımıyla, $\bar{f}(x_1, x_2,..., x_N|\varepsilon)$ şeklinde simgelenen ve yapay bir biçimde oluşturulan daha genel bir fonksiyonun aşağıdaki açılımı göz önüne alınır.

$$\bar{f}(x_1,...,x_N|\varepsilon) = f_0 + \varepsilon\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \varepsilon^2 \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \\ \varepsilon^3 \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^{N} f_{i_1,i_2,i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + ... + \varepsilon^N f_{123.....N}(x_1, x_2, x_3, ...x_N) \tag{II.18}$$

Burada sağ yandaki dik bileşenlerin her birinin (II.1) eşitliğindeki $f(x_1, x_2,..., x_N)$ fonksiyonunda karşılık gelen dik bileşenlerine özdeş olduğu varsayılmaktadır. (II.18) bağıntısının sol yanındaki toplamsal anlatım çarpımsal duruma getirilerek aşağıdaki eşitlik yazılabilmektedir.

$$f_0 + \varepsilon\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \varepsilon^2 \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \\ \varepsilon^3 \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^{N} f_{i_1,i_2,i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + ... = f_0 \prod_{i=1}^{N} F_i(x_1, x_2,..., x_N|\varepsilon) \tag{II.19}$$

Burada, çarpım anlatımı içinde gözüken $F_i(x_1, x_2,..., x_N|\varepsilon)$, $F_i^{(j)}(x_1, x_2,..., x_N)$ ile gösterilen büyüklük ε değişkeninden bağımsız olmak üzere, ε'un aşağıdaki biçimde kuvvet serisine açılabilmektedir.

$$F_i(x_1, x_2,..., x_N|\varepsilon) \equiv 1 + \sum_{j=1}^{N} F_i^{(j)}(x_1, x_2,..., x_N)\varepsilon^j \tag{II.20}$$

Dolayısıyla, (II.18)'de verilen toplamsal açılıma karşılık gelen çarpımsal gösterilimi açık olarak elde edebilmek için $F_i^{(j)}(x_1, x_2,..., x_N)$ ile simgelenen büyüklüklerin saptanması gerekmektedir. Bu amaçla izlenmesi gereken yolun ilk adımı (II.20)'deki açılımı (II.19) te kullanması ile elde edilecek olan ε'un kuvvetleri türünden iki serisel açılımın her birindeki aynı ε kuvveti içeren terimlerdeki katsayıların eşitlenmesi olarak düşünülebilir. Buna gore ε'un birinci kuvveti için,

$$f_0 \sum_{i=1}^{N} F_i^{(\ell)}(x_i) = \sum_{i=1}^{N} f_i\ (x_i) \tag{II.21}$$

denklemi yazılabilir. Bu denklemin çözümü en genel biçimiyle aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$F_i^{(\ell)}(x_i) = \frac{f_i\ (x_i)}{f_0} + C_i^{(\ell)} \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(II.22)}$$

Burada $C_i^{(\ell)}$ ile simgelenen büyüklük i indisi üzerinde 1'de başlayıp N'de son bulacak biçimde toplandığında sıfır üretebilen keyfi bir sabiti göstermektedir. (II.22)'da verilen yapı kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$f_0 \prod_{i=1}^{N} \left[\ell + \varepsilon F_i^{(\ell)}(x_i) \right] = f_0 + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \varepsilon^2 \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + R_3(x_1, x_2, ..., x_N | \varepsilon)$$

$$R_3(x_1, x_2, ..., x_N | \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{f_0} \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} \left(f_{i_1}(x_{i_1}) + f_0 C_{i_1}^{(\ell)} \right) \left(f_{i_2}(x_{i_2}) + f_0 C_{i_2}^{(\ell)} \right) - \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + O(\varepsilon^3)$$

Bu eşitlikten, çarpımsal gösterilimdeki her bir çarpanın ε'un kuvvetleri türünden ikinci ve daha yüksek basamaktan terimlerin göz ardı edilmesi durumunda, $C_i^{(\ell)}$ büyüklüklerin varlığının etkisi ancak ikinci basamak terimlerde ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla, fonksiyon çarpımsal yapıdan ne kadar az uzaklaşırsa buradaki ikinci basamaktaki terimlerin $C_i^{(\ell)}$ değişmezlerini içermeyenler de o kadar yok olmaya yüz tutarlar. Bu durumda çarpımsallaştırmayı yaklaşık olarak da olsa sağlamak adına $C_i^{(1)}$ sabitleri sıfır alınabilir. Dolayısıyla, (II.22) eşitliği aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$F_i^{(1)}(x_i) = \frac{f_i\ (x_i)}{f_0} \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(II.23)}$$

Şimdi (II.20)'deki açılımın (II.19)'te kullanılması serisel açılımın her birindeki ε^2 içeren terimlerdeki katsayıların eşitlenmesi aşağıdaki denklemin yazılmasına imkan sağlar.

$$f_0 \sum_{i1=}^{N} F_i^{(2)}(x_i) + f_0 \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} F_{i_1}^{(1)}(x_{i_1}) F_{i_2}^{(1)}(x_{i_2}) = \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} f_{i_1,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \qquad \text{(II.24)}$$

Buradaki ikili yani iki indis üzerinden yapılan toplamlarda indis değişkenleri, bir çırpıda ayırmaya olanak vermeyecek biçimde görüldüğünden uygun özdeşlikler gözönüne alınarak daha önceden belirlenmiş olan değerler yerlerine yerleştirilecek olursa

$$\sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{N} F_i^{(2)}(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{1}{2f_0^2} \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2 \\ i_1=1 \vee i_2=1}}^{N} \left[f_0 f_{i_1,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2}) \right] \qquad \text{(II.25)}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradaki incelemeler benzer şekilde $F_I^{(3)}(x_1, x_2, ..., x_N)$ ve yüksek basamaktan açılım fonksiyonlarına da uygulanıp belirlenmelerine olanak sağlar.

Kolayca görüleceği üzere, buraya kadar yapılan inceleme sonuçlarına dayanarak

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) \equiv f_0 \prod_{i=1}^{N} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} F_i^{(j)}(x_1, x_2, ..., x_N) \varepsilon^j \right] \qquad \text{(II.26)}$$

şeklinde bir çarpımsal gösterilim yazılabileceğini ileri sürmek mümkündür. Ayrıca, buradaki sonsuz terimli serilerde kesme yaparak "k. Basamaktan Çarpımsal Yaklaştırım" olarak adlandırılabilecek olan

$$\pi_k(x_1, x_2, ..., x_N) \equiv f_0 \prod_{i=1}^{N} \left[1 + \sum_{j=1}^{k} F_i^{(j)}(x_1, x_2, ..., x_N) \varepsilon^j \right] \qquad k = 1,2,... \qquad \text{(II.27)}$$

tanımlamasını yapmak da kuşkusuz mümkündür. $\pi_k(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonunun boyunun, k değeri arttıkça, $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonun boyuna yaklaşacağını beklemek, her ne kadar bu yaklaşma $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonunun ve açılım büyüklüklerinin yapısına bağlı bir davranış olsa da, en azından çarpımsallıktan çok az bir sapma gösteren fonksiyonlar için çok imkansız bir davranış değildir. Bunun tam tersi bir düşünce ile $\pi_k(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonunun boyunun karesinin $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ boyunun karesine oranını bir tür çarpımsallık ölçeni olarak kabul etmek ve bu ölçenin 1'e yakınlığına bakarak $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonu için çarpımsallık düzeyi tanımlamak mümkündür. Buna göre, "k. Basamaktan Çarpımsallık Ölçeni" aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$p_k \equiv \frac{\|\pi_k\|^2}{\|f\|^2} \qquad k = 0,1,2,... \qquad \text{(II.28)}$$

Fakat burada Toplamsallık Ölçenleri'nin $[0,1]$ aralığında değer almalarına karşın, çarpımsallık ölçenleri için aynı yaklaşımları yapmak her zaman mümkün olmayabilir.

Toplamsallık niteliği taşıyan ve toplamsal yapılarda çok hızlı yakınsama gösteren YBMG yönteminin çarpımsal nitelikli sorunların çözümünde yetersiz kalan yapısının etkinleştirilmesine yönelik olarak tasarlanan ve YBMG'i taban alan bir yöntem olarak geliştirilen ÇYBMG'nin parça türevli denklemlere nasıl uygulanabileceğinin ve etkinliğin sınır koşulları ile ilgili araştırılmasını hedef alan çalışmalar bulunmaktadır. Bu T. Civelek ile M. Demiralp'in "An HDMR Application to the Scrödinger's Equation for Free Particles Under an External Field With Dipole Polarization and Vanishing Flux Boundry Conditions" isimli makalesinde ve Schrödinger denkleminin çözümünde kullanılmıştır [16]. Bu tip problemlerde N tane lineer bağımsız x_i konum değişkeninin yanında bir de t zaman değişkeni vardır. Fakat t değişkeni, bir değişken gibi değil de bir parametre gibi işlem görür, yani YBMG açılımını oluştururken sadece konum değişkenleri YBMG değişkeni olarak ele alınmıştır. Seçilecek ağırlık fonksiyonu da t değişkenini parametre olarak içermelidir. Bu makalede Schrödinger denklemi hem Çarpımsal YBMG kullanılarak hem de henüz literatürde tam olarak oturmamış bir yöntem olan Evrimsel YBMG (EYBMG) kullanılarak çözülmüştür.

A. Kurşunlu ile M. Demiralp'in "Additive and Factorized HDMR Applications to the Multivariate Diffusion Equation Under Vanishing Derivate Boundary Conditions" isimli makalesinde difüzyon denkleminin çözümünün bulunması için

Toplamsal ve Çarpımsal YBMG'den faydalanılmaktadır [17]. Makalede t zaman değişkeni ve c önce nonnegatif sonra pozitif olduğu kabul edilen bir sabit olmak üzere bilinmeyen bir $U(x_1, x_2, ..., x_N, t)$ çok değişkenli fonksiyonun

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 U}{\partial x_N^2}\right)$$

difüzyon denklemi incelenmiştir. $[a, b]^N$ hiperprizması üzerinde incelenen problemin sınır koşulları

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U(x_1, x_2, ..., x_N, t)\Big|_{x_j = a} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} U(x_1, x_2, ..., x_N, t)\Big|_{x_j = b} = 0$$

veya

$$U(x_1, x_2, ..., x_N, t)\Big|_{x_j = a} = 0 \qquad \text{ve} \qquad U(x_1, x_2, ..., x_N, t)\Big|_{x_j = b} = 0$$

ya da her iki koşul birden olabilir. Sınır koşulları problemin çözümünde önemli bir yer tutar, fakat hangi YBMG çeşidinin uygulanacağına başlangıç koşulu incelenerek karar verilmektedir. $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere $t = 0$'daki başlangıç koşulu

$$U(x_1, x_2, ..., x_N, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_N)$$

olarak kabul edilirse, kullanılacak YBMG çeşidine yani toplamsalmı yoksa çarpımsalmı YBMG kullanılacağına $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ fonksiyonun yapısı incelenerek karar verilir.

II.2 MELEZ YBMG (HYBRID HDMR)

Metin Demiralp'in ortaya attığı Melez YBMG'nin ortaya çıkışı, problemlerin genellikle, tamamen toplamsal ya da tamamen çarpımsal yapıda olmamasından kaynaklanmakatadır [19]. Bunun için ara tipteki yani melez yapıdaki çok değişkenli fonksiyonların gösteriminde Melez YBMG gösterimi kullanılır. Çok değişkenli bir fonksiyon bir α parametresi yardımıyla

$$f(x_1,x_2,...,x_N) \equiv \alpha f(x_1,x_2,...,x_N)+(1-\alpha)f(x_1,x_2,...,x_N) \qquad \text{(II.29)}$$

şeklinde yazılabilir. (II.30) eşitliğinin sağ yanındaki ilk teriminde çok değişkenli $f(x_1,x_2,...,x_N)$ fonksiyonun Toplamsal-YBMG açılımı, ikincisinde ise fonksiyonun ÇYBMG açılımı yerine yazılırsa Melez YBMG (MYBMG) açılımı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$f(x_1,x_2,...,x_N) \equiv \alpha\left[f_0+\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)+...\right]+(1-\alpha)\left[r_0\left(\prod_{i_1=1}^{N}(1+r_{i_1}(x_{i_1}))\right)...\right] \qquad \text{(II.30)}$$

Buradaki α katsayısına Melezlik Parametresi adı verilir ve gerçel veya karmaşık sayı olabilir. Eğer çok değişkenli $f(x_1,x_2,...,x_N)$ fonksiyonu gerçel ise, gerçel α değerlerinin kullanılması tercih edilir. Görüldüğü gibi α'nın seçimine göre melezlikler farklı sonuçlar verir. Yani α parametresi Toplamsal YBMG'nin ve ÇYBMG'nin sonuca katkısını belirler. α'yı iyi tanımlamak optimizasyon problemidir ve α'nın büyüklüğü, fonksiyonun yapısında toplamsallığın veya çarpımsallığın baskın oluşuna bağlı olarak değişir. Görüldüğü gibi α bir alındığında Toplamsal YBMG, sıfır alındığında ise Çarpımsal YBMG elde edilecektir. Dolayısıyla α'nın değeri uygulamalarda genellikle sıfır ile bir arasında olacak şekilde seçilmektedir. (II.20) denklemindeki ilk gösterime j. mertebeden ve ikinci gösterime k. mertebeden kesme yapılırsa bu denklem, $0 \le j,\ k \le N$ olmak üzere

$$h_{jk} \equiv \alpha s_j(x_1,x_2,...,x_N)+(1-\alpha)p_k(x_1,x_2,...,x_N) \qquad \text{(II.31)}$$

ile gösterilir. Burada h_{jk}'ya $f(x_1,x_2,...,x_N)$ fonksiyonun (j, k). mertebeden Melez YBMG Yaklaştırımı denir ve s_j, j. mertebeden Toplamsal YBMG açılımını, p_k ise, k. mertebeden Çarpımsal YBMG açılımını temsil etmektedir. Görüldüğü gibi j'nin ve k'nın farklı değerleri için farklı yaklaştırımlar elde edilecektir. MYBMG'nin bir avantajı da bütün yaklaştırımların, hesaplandıktan sonra

$$\begin{matrix} h_{00} & h_{0} & \cdots & h_{0N} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N0} & h_{N1} & \cdots & h_{NN} \end{matrix}$$

yukarıdaki gibi matris şeklinde yazılıp depolanarak, gerektiği zaman kullanılabilmesidir. Yaklaştırım kalitesi ise

$$q_{jk} = \frac{|h_{jk}|^2}{|f|^2} \tag{II.32}$$

ile ölçülebilir. q_{jk} 'nın değeri bire yaklaştıkça yaklaştırımın kalitesi artmaktır.

M. Demiralp ile B. Tunga'nın "Hybrid YBMG Approximants and Their Utilization in Applications " isimli makalesinde bu anlatılanlara örnek olarak

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) \equiv e^{-(x_1+x_2+...+x_N)} + (x_1 + x_2 + ... + x_N)^m$$

fonksiyonu incelenmiştir [19]. Görüldüğü gibi yukarıdaki çok değişkenli fonksiyonun ilk kısmı çarpımsal, ikinci kısmı ise toplamsal yapıdadır. Bu tipteki bir fonksiyon için Toplamsal YBMG'nin de ÇYBMG'nin de tek başına kullanılması yeterince iyi sonuçlar vermeyecektir. Dolayısıyla bu tip bir fonksiyon için Melez YBMG açılımının hesaplanması daha uygun olacaktır. Fonksiyonun melezlik parametresi sıfır alındığında Çarpımsal YBMG, bir alındığında ise Toplamsal YBMG elde edilecektir. Ayrıca m'nin değeri arttıkça fonksiyonun yapısı da daha da çarpımsallaşacaktır. Buradaki m toplamsal yapı derecesidir. Makalede farklı m, N ve α değerleri için Melez YBMG açılımları hesaplanmış ve oluşturulan tabloda verilmiştir. Melez YBMG'nin hem toplamsal hem de çarpımsal özellikler gösteren fonksiyonlar için daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmektedir.

II.3 KESME YBMG (CUT HDMR)

Yüksek boyutlu girdi-çıktı sistemlerinin davranışlarını öğrenebilmek ve analiz edebilmek için de YBMG kullanılabilir. Sistem, matematik modeli kurularak çözülebileceği gibi girdi-çıktı verileri laboratuar gözlemlerine dayanabilir ya da sistemin matematik modeli kurulamayabilir. Böyle sistemlerde çıktı tek değişkene bağlı olsa bile girdi genellikle yüksek boyutlu birçok değişkene bağlıdır dolayısıyla girdi, çıktı üzerinde etki etmeyebilir. Bu bağlamda ele alınan sistemin çıktısı, N tane girdi değişkeni cinsinden

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{1 \le i < j \le N} f_{ij}(x_i, x_j) + ... + f_{12...N}(x_1, x_2, ..., x_N) \quad \text{(II.33)}$$

yazılabilir. Burada f_0, $f(x)$'in tanım kümesinde her yerde sabit olan sıfırıncı mertebeden etkiyi göstermektedir. $f_i(x_i)$ fonksiyonu, f üzerindeki genelinde nonlineer olarak bağımsız hareket eden x_i değişkenine bağlı etkiyi göstermektedir. İki değişkenli $f_{ij}(x_i, x_j)$ fonksiyonu ise x_i ve x_j değişkenlerinin birlikte etkilerini ve daha yüksek mertebeden terimler f üzerine birlikte etki eden artan sayıdaki değişkenlerin etkilerini göstermektedir. $f_{12...n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ son terimlisi ise bütün değişkenlerin hepsine birden bağlı f çıktısına olan etkiyi temsil etmektedir. Bu tip problemler için Kesme YBMG, Çoklu Kesme ve Seçkisiz Örneklemeli YBMG yöntemleri H. Rabitz ve grubu tarafından ortaya atılmıştır [20].

Kesme YBMG, girdi değişken uzayının düzgün bir şekilde dağıldığı veya girdi üzerine etki edilebilinen modelleri çözmek için uygun bir yöntemdir. Bu yöntemde YBMG bileşenleri kesim merkezi (cut center) olduğu belirtilen girdi uzayındaki bir $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ referans noktasına bağlı girdi-çıktı tepkisi incelenerek belirlenir. Kesme YBMG açılımı, $f(x)$ fonksiyonunun kesim merkezinden geçen doğrular, düzlemler ve daha yüksek mertebeden hiperdüzlemlerdeki değerlerinin süperpozisyonudur. Buna göre Kesik YBMG 'nin sabit bileşeni

$$f_0 = f(\overline{x}) \tag{II.34}$$

yani fonksiyonun referans noktasındaki değerine eşittir. Tek değişkenli bileşenler

$$\left(x_i, \overline{x}^i\right) = \left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, ..., \overline{x}_n\right)$$

$$f_i(x_i) = f(x_i, \overline{x}^i) - f_0 \tag{II.35}$$

şeklindedir. Benzer şekilde iki değişkenli YBMG bileşenleri,

$$\left(x_i, x_j, \overline{x}^{ij}\right) = \left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, ..., \overline{x}_{j-1}, x_j, \overline{x}_{j+1}, ..., \overline{x}_n\right)$$

$$f_{ij}(x_i, x_j) = f(x_i, x_j, \overline{x}^{ij}) - f_i(x_i) - f_j(x_j) - f_0 \tag{II.36}$$

olarak yazılabilir. Diğer yüksek mertebeden bileşenler de benzer şekilde hesaplanır. Bir Kesik YBMG bileşeni, kendi değişkenlerinden birinin referans noktasındaki değerine eşit olması onu sıfır yapar yani $s \in \{i_1, i_2, ..., i_\ell\}$ olmak üzere

$$f_{i_1 i_2 ... i_l}(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_l})\Big|_{X_S = \overline{X}_S} = 0 \tag{II.37}$$

dir. Bu özellik aynı zamanda iki farklı YBMG bileşeni arasında bir diklik bağıntısı yazılmasını da mümkün kılar. Buna göre bu bağıntı $s \in \{i_1, i_2, ..., i_\ell\} \cup \{j_1, j_2, ..., j_k\}$ olmak üzere şöyledir.

$$f_{i_1 i_2 ... i_l}(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_l}) f_{j_1 j_2 ... j_k}(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k})\Big|_{X_S = \overline{X}_S} = 0 \tag{II.38}$$

Görüldüğü gibi girdi değerleri kesikli olduğundan elde edilebilecek bileşenler de referans noktasının komşuluğunda tanımlı olmaktadır. Ayrıca farklı referans noktaları için farklı açılımlar elde edilmekte ve sadece Kesme YBMG açılımının yakınsak olduğu durumlarda referans noktasının farklı seçilmesi $f(x)$'in açılımını değiştirmemektedir. Uygulamalarda referans noktası incelenilen girdi uzayının komşuluğunda seçilmeli, bulunan YBMG bileşenleri optimal bileşenler olmalıdır yani hata verilen tolerans aralığının dışında olmamalıdır. Bunun için uygun bir minimize fonksiyoneli dahilinde tek bir optimal ayrışım bulunabilir dolayısıyla minimizasyon prosedürü ile elde edilen optimal bileşenler düşük mertebeden bileşenleri hesaplamak yani tatmin edici bir yaklaştırım elde etmek için yeterli olmaktadır. Kesme YBMG açılımı hesaplanırken çok katlı integrallerin hesaplanmasına gerek duyulmayıp, sadece çıktının referans noktasından (kesim merkezinden) geçen doğrular, düzlemler ve daha yüksek boyutlu hiperdüzlemler üzerindeki düğüm değerleri kullanıldığından, bu yöntemin hesaplama maliyeti çok az olduğu bilinmekle beraber, veriler istenildiği gibi seçilebiliniyorsa hesaplama maliyetinin çok daha düşük olduğu görüldüğünden bu yöntem tercih olmaktadır. Kesme YBMG'nın veriler düzgün saçılmış olmak üzere ayrık verilerin bulunduğu problemlere uygulamasında, Monte-Carlo integrasyonundan faydalanılır.

"Efficient Input-Output Model Representation" isimli makalede 0-D Stratosferik Kimyasal Kinetik modelle çalışılmıştır [21]. 45° enlem ve 20 km yükseklikteki hava parselindeki veriler incelenmiştir. Kurulan modelde 46 girdi değişkeninden, 39 tanesi kimyasal madde, 5 tanesi fotoliz oranını belirlemekte kullanılan parametreler, ısı ve günışığının olduğu saat sayısıdır. Bir yıl boyunca günde yaklaşık 2000 kere kimyasal maddelerin miktarları ölçülmüş, elde edilen veriler Kesme YBMG verileri ile karşılaştırılmıştır. Uzun ve kısa zaman periyodlarında yapılan ölçümlerle Kesme YBMG ile elde edilenler arasında en fazla ~%2 hata oluşmuştur. Ikinci örnek olarak ise havanın sıcaklık değişimi incelenmiştir. Burada incelenen kısım 30 seviyeye parçalamıştır ve farklı seviyedeki su miktarı, 30 seviyedeki hava sıcaklığı, yüzeydeki sıcaklık ve yüzeyin aklık derecesi olmak üzere toplam 62 tane parametre kullanılmıştır. İşlemler sonucunda Kesme YBMG 'nin Two-Stream RadiationTransfer Models'a gore yaklaşık 1000 kat daha hızlı yaklaştığı görülmüştür. Üçüncü olarak ise Kesme YBMG yarı iletken materyallerin yapılarının incelenmesinde kullanılmıştır.

II.4 ÇOKLU-KESME YBMG (MULTİCUT HDMR)

Kesme YBMG açılımının en büyük dezavantajlarından birisi sadece açılımın hesaplandığı referans noktası civarında iyi sonuçlar vermesidir. Bölgenin tamamı veya tek bir referans noktası ile bilgi edinilemeyecek kadar büyük bir kısmı hakkında bilgi isteniyorsa H. Rabitz'in ortaya attığı Çoklu Kesme YBMG'nin kullanılması bu sorunu ortadan kaldırmaktadır. "Multicut HDMR with an Application to an Ionospheric Model "isimli makalede Kesme YBMG ile Çoklu Kesme YBMG'nin karşılaştırılması yapılmıştır [22]. Bu YBMG çeşidi Kesme YBMG açılımının genelleştirilmiş halidir. Çoklu-kesme YBMG'nin probleme uygulanabilmesi için Kesme YBMG de olduğu gibi verilerin düzgün saçılmış olması gerekmektedir. Burada girdi uzayının tanım kümesi çok yüksek boyutlu olduğunda tek bir referans noktasına göre belirlenen Kesme YBMG açılımı fonksiyona referans noktası civarında yakınsamaktadır. Bu nedenle fonksiyonun bölgenin tümü ya da büyük parçası üzerindeki yaklaşık değerlerini elde edebilmek için yeterince iyi yaklaşık değerler vermeyecektir. Çoklu-Kesme YBMG tanım kümesinin tek bir kesme noktası ile ifade edilemeyeceği problemler için Kesme YBMG'ye alternatif olarak geliştirilmiştir. Bu tip problemler, tanım kümesi, incelenen bölgelerin en az birini içeren alt bölgelere ayrıldıktan sonra Kesme YBMG kullanılarak da çözülebilir. Burada her alt bölge için YBMG açılımı hesaplanarak istenen yaklaşık değerler elde edilir. Çoklu-Kesme YBMG açılımı ise bütün tanım bölgesi üzerinde, birden çok referans noktası kullanılarak hesaplanır. Kesme YBMG'nin kullanılan referans noktasının civarı için yeterli iyilikte sonuçlar vermesine rağmen Çoklu-Kesme YBMG açılımı bölgenin tümünü inceleyebilme imkanı sağlar. Ayrıca referans noktalarının civarında da Kesme YBMG kadar iyi sonuçlar verebilmektedir.

Çoklu-Kesme YBMG bileşenleri, değişmeli ve idempotent olan bir izdüşüm yardımıyla elde edilir. F lineer uzayında tanımlanan ρ_i, $(i = 1,2,...,s)$ izdüşümü n-değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunu F'nin bir Φ_i altuzayına dönüştürür. Her ρ_i izdüşümü için $\rho_i f(x)$'in görüntüsü $f(x)$ fonksiyonun bir yaklaştırımıdır. I birim izdüşümü ρ_i izdüşümleri kullanılarak

$$\begin{aligned} I &= \prod_{i=I}^{s}\left[\rho_i + (I-\rho_i)\right] \\ &= \prod_{i=I}^{s}\rho_i + \sum_{i=I}^{s}(I-\rho_i)\prod_{\substack{j=I\\ j\neq i}}^{s}\rho_j + \sum_{I\leq i<j\leq s}(I-\rho_i)(I-\rho_j)\prod_{\substack{k=I\\ k\neq i,j}}^{s}\rho_k + \ldots \\ &+ \sum_{i=I}^{s}\rho_i\prod_{\substack{j=I\\ j\neq i}}^{s}(I-\rho_j) + \prod_{i=I}^{s}(I-\rho_i) \end{aligned} \tag{II.39}$$

sağlaması durumunda gerçeklemektedir. Bu eşitlikteki her terim de aynı zamanda bir izdüşümdür ve ρ_i'nin idempotent ve değişmeli olarak seçilmesi eşitlikteki her terimin biriyle diklik koşulunu sağlaması durumunda gerçeklemektedir.

Yukarıdaki birim izdüşüm açılımı kullanılarak n-değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \prod_{i=I}^{s}\left[\rho_i + (I-\rho_i)\right]f(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{i=I}^{s}\rho_i f(x) + \sum_{i=I}^{s}(I-\rho_i)\prod_{\substack{j=I\\ j\neq i}}^{s}\rho_j f(x) + \sum_{I\leq i<j\leq s}(I-\rho_i)(I-\rho_j)\prod_{\substack{k=I\\ k\neq i,j}}^{s}\rho_k f(x) + \ldots \\ &+ \sum_{i=I}^{s}\rho_i\prod_{\substack{j=I\\ j\neq i}}^{s}(I-\rho_j)f(x) + \prod_{i=I}^{s}(I-\rho_i)f(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{i=I}^{s}f_i(x) + \sum_{I\leq i<j\leq s}f_{ij}(x) + \ldots + f_{12\ldots s}(x) \tag{II.40}$$

olarak yazılabilir. Burada eğer $s = n$ ise terim terime eşleşme yapılabilir.

Her bir ρ_i dönüşümü n-değişkenli $f(x)$ fonksiyonunu daha az değişkenli bir fonksiyona dönüştürür. K_i pozitif bir tamsayı, $f\left(\overline{x}_i^{\mu_i}, x^i\right)$ ise $f(x)$ fonksiyonunun sabit bir x_i'deki değerini göstermek üzere

$$\rho_i f(x) = \sum_{\mu_i=I}^{K_i}\varphi_{\mu_i}(x_i)f(\overline{x}_i^{\mu_i}, x^i)$$

olarak yazılır. Burada $\varphi_{\mu_i}(x_i)$ bilinen bir fonksiyondur. Görüldüğü gibi $s = n$ ise $f(x)$ fonksiyonu K_i tane (n-1) değişkenli $f(\overline{x}_i^{\mu_i}, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ fonksiyonlarının toplamı olarak yazılmaktadır. Eğer $\varphi_{\mu_i}(x_i)$

$$\varphi_{\mu_i}(x_i) = \begin{Bmatrix} 1 & K_i = 1 \\ \prod\limits_{\substack{\nu_i=1 \\ \nu_i \neq \mu_i}}^{K_i} \dfrac{x_i - \overline{x}_i^{\nu_i}}{\overline{x}_i^{\mu_i} - \overline{x}_i^{\nu_i}} & K_i > 1 \end{Bmatrix} \tag{II.41}$$

Lagrange interpolasyon fonksiyonu ile verilirse, Lagrange interpolasyon polinomu Bölünen Farklar Newton interpolasyonuna eşit olduğundan $\rho_i f(x)$ ifadesi

$$f\left[\overline{x}_i^1, \overline{x}_i^2\right] = \frac{f\left(\overline{x}_i^2, x^i\right) - f\left(\overline{x}_i^1, x^i\right)}{\overline{x}_i^2 - \overline{x}_i^1} \tag{II.42}$$

ve

$$f\left[\overline{x}_i^1, \overline{x}_i^2, \overline{x}_i^3\right] = \frac{f\left[\overline{x}_i^2, \overline{x}_i^3\right] - f\left[\overline{x}_i^1, \overline{x}_i^2\right]}{\overline{x}_i^3 - \overline{x}_i^1} \tag{II.43}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho_i f(x) = {} & f\left(\overline{x}_i^1, x^i\right) + \left(x^i - \overline{x}_i^1\right) f\left[\overline{x}_i^1, \overline{x}_i^2\right] + \left(x^i - \overline{x}_i^1\right)\left(x^i - \overline{x}_i^2\right) f\left[\overline{x}_i^1, \overline{x}_i^2, \overline{x}_i^3\right] \\ & + \left(x^i - \overline{x}_i^1\right)\left(x^i - \overline{x}_i^2\right) \ldots \left(x^i - \overline{x}_i^{K_i - 1}\right) f\left[\overline{x}_i^1, \overline{x}_i^2, ..., \overline{x}_i^{K_i}\right] \end{aligned} \tag{II.44}$$

olarak yazılabilir. $K_i = 1$ olursa (II.44) denklemi tek bir referans noktası ile verilen Kesme YBMG'ye dönüşür. $K_i > 1$ olduğunda ise sabit terim

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{\mu_1=1}^{K_1} \sum_{\mu_2=1}^{K_2} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{K_n} \left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_{\mu_i}(x_i) f\left(\overline{x}_1^{\mu_1}, \overline{x}_2^{\mu_2}, ..., \overline{x}_n^{\mu_n}\right)\right] \\ &= \sum_{\mu_1=1}^{K_1} \sum_{\mu_2=1}^{K_2} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{K_n} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{\nu_i=1 \\ \nu_i \neq \mu_i}}^{K_i} \frac{x_i - \overline{x}_i^{\nu_i}}{\overline{x}_i^{\mu_i} - \overline{x}_i^{\nu_i}} \right) f\left(\overline{x}_1^{\mu_1}, \overline{x}_2^{\mu_2}, ..., \overline{x}_n^{\mu_n}\right)\right] \end{aligned} \tag{II.45}$$

olarak yazılır. Görüldüğü gibi sabit terim $f(x)$ fonksiyonunun $\left(\bar{x}_1^{\mu_1}, \bar{x}_2^{\mu_2}, \ldots, \bar{x}_n^{\mu_n}\right)$ noktalarındaki değerinin lineer kombinasyonudur.

Benzer şekilde tek değişkenli terim

$$
\begin{aligned}
f_i(x) &= \sum_{\mu_1=1}^{K_1} \sum_{\mu_{i-1}=1}^{K_{i-1}} \sum_{\mu_{i+1}=1}^{K_{i+1}} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{K_n} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \varphi_{\mu_j}(x_j) f\left(\bar{x}_1^{\mu_1}, \ldots, \bar{x}_{i-1}^{\mu_{i-1}}, x_i, \bar{x}_{i+1}^{\mu_{i+1}}, \ldots, \bar{x}_n^{\mu_n}\right) \right] - f_0 \\
&= \sum_{\mu_1=1}^{K_1} \sum_{\mu_{i-1}=1}^{K_{i-1}} \sum_{\mu_{i+1}=1}^{K_{i+1}} \cdots \sum_{\mu_n=1}^{K_n} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\prod_{\substack{\nu_j=1 \\ \nu_j\neq \mu_j}}^{K_j} \frac{x_j - \bar{x}_j^{\nu_j}}{\bar{x}_j^{\mu_j} - \bar{x}_j^{\nu_j}} \right) f\left(\bar{x}_1^{\mu_1}, \ldots, \bar{x}_{i-1}^{\mu_{i-1}}, x_i, \bar{x}_{i+1}^{\mu_{i+1}}, \ldots, \bar{x}_n^{\mu_n}\right) \right] - f_0
\end{aligned}
\tag{II.46}
$$

olarak elde edilir. Tek değişkenli terimin, $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$ olmak üzere K tane sabit noktadaki $f(x_i, x^i)$ değerlerinin yani $s = n$ olursa $f_i(x_i)$ fonksiyonunun lineer kombinasyonu olduğu açıktır.

İki değişkenli terim ise

$$
\begin{aligned}
f_{ij}(x) = &\sum_{\mu_1=1}^{K_1} \cdots \sum_{\mu_{i-1}=1}^{K_{i-1}} \sum_{\mu_{i+1}=1}^{K_{i+1}} \cdots \sum_{\mu_{j-1}=1}^{K_{j-1}} \sum_{\mu_{j+1}=1}^{K_{j+1}} \cdots \\
&\sum_{\mu_n=1}^{K_n} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} \varphi_{\mu_k}(x_k) f\left(\bar{x}_1^{\mu_1}, \ldots, \bar{x}_{i-1}^{\mu_{i-1}}, x_i, \bar{x}_{i+1}^{\mu_{i+1}}, \ldots, \bar{x}_{j-1}^{\mu_{j-1}}, x_j, \bar{x}_{j+1}^{\mu_{j+1}}, \ldots, \bar{x}_n^{\mu_n}\right) \right] \\
&- f_i - f_j - f_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{ij}(x) = &\sum_{\mu_1=1}^{K_1} \sum_{\mu_{i-1}=1}^{K_{i-1}} \sum_{\mu_{i+1}=1}^{K_{i+1}} \cdots \sum_{\mu_{j-1}=1}^{K_{j-1}} \sum_{\mu_{j+1}=1}^{K_{j+1}} \cdots \\
&\sum_{\mu_n=1}^{K_n} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} \left(\prod_{\substack{\nu_k=1 \\ \nu_k\neq \mu_k}}^{K_k} \frac{x_k - \bar{x}_k^{\nu_k}}{\bar{x}_k^{\mu_k} - \bar{x}_k^{\nu_k}} \right) f\left(\bar{x}_1^{\mu_1}, \ldots, \bar{x}_{i-1}^{\mu_{i-1}}, x_i, \bar{x}_{i+1}^{\mu_{i+1}}, \ldots, \bar{x}_{j-1}^{\mu_{j-1}}, x_j, \bar{x}_{j+1}^{\mu_{j+1}}, \ldots, \bar{x}_n^{\mu_n}\right) \right] \\
&- f_i - f_j - f_0
\end{aligned}
\tag{II.47}
$$

olarak yazılır. $f_{ij}(x)$ fonksiyonu ise $f(x_i, x_j, x^{ij})$ fonksiyonlarının lineer birleşimidir.

$s = n$ olduğunda $f_0(x)$, $f_i(x)$ ve $f_{ij}(x)$ sırasıyla f_0, $f_i(x_i) f_{ij}(x_i, x_j)$ ve $f_{ij}(x_i, x_j)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olacaktır. Dolayısıyla (II.40) açılımı Çoklu-Kesme YBMG açılımı olarak adlandırılır.

"Multicut HDMR with an Application to an Ionospheric Model" isimli makalede İyonosferic model, hem 3 alt tanım kümesi kullanılarak Kesme YBMG ile, hem de aynı 3 referans noktası için Çoklu Kesme YBMG ile çözülmüştür [22]. Sonuçlar karşılaştırıldığında ikincisi biraz daha iyi olmak üzere hemen hemen eşit doğrulukta değerler vermiştir. İşlem maliyeti de hemen hemen aynı olmak üzere Kesme YBMG sadece referans noktasının civarında iyi sonuçlar verirken Çoklu Kesme YBMG bölgenin tamamı üzerinde daha iyi sonuçlar vermektedir.

II.5 SEÇKİSİZ ÖRNEKLEMELİ YBMG (RS-HDMR)

H. Rabitz tarafından ortaya atılan Seçkisiz örneklemeli-YBMG (SÖ-YBMG), Kesme YBMG'ye göre daha genel yapıdadır [23]. Burada girdilerin örneklem uzayının düzgün bir şekilde olması gerekmemektedir. Rastgele dağılmış veriler olması yukarıda anlatılan formülasyonları kullanmayı da imkansız kılar. SÖ-YBMG bileşenleri bulunurken daha önceden bildiğimiz

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_N}^{b_N} W(x_1, x_2, \ldots x_N) f(x_1, x_2, \ldots, x_N) dx_1 dx_2 \ldots dx_N \tag{II.48}$$

$$f_i(x_i) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \ldots \int_{a_N}^{b_N} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} w_k(x_k) f(x_1, x_2, \ldots, x_N) dx^i - f_0 \tag{II.49}$$

$$f_{ij}(x_i, x_j) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \ldots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \ldots \int_{a_N}^{b_N} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{N} w_k(x_k) f(x_1, x_2, \ldots, x_N) dx^{ij} - f_i(x_i) - f_j(x_j) - f_0 \tag{II.50}$$

tanımlarından yararlanılır.

SÖ-YBMG bileşenlerinin elde edilmesi düğüm noktalarındaki girdi-çıktı değerleri tarafından YBMG açılımının sağlanması gerekliliğine dayanmaktadır. Dolayısıyla nümerik veri tabloları oluşturularak incelenen fonksiyonun keyfi bir noktadaki değeri kolaylıkla bulunabilir. Fakat burada ortaya çıkan problem düğüm sayısı arttıkça integrallerin hesaplanmasının zorlaşmasıdır. Veri sayısı arttıkça hesaplanması gereken integral sayısının da üstel olarak artmasına bağlı işlem maliyetinin yüksekliği bu yöntemin pratikte kullanılımını engeller. İşte Monte-Carlo integrasyonu bu problemin çözümünü olanaklı kılar. Buna göre M düğüm sayısını ve $x^{(s)} = \left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, ..., x_N^{(s)}\right)$, $1 \le s \le M$, s. düğüm girdisini göstermek üzere

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}...\int_{a_N}^{b_N} W(x_1, x_2, ..., x_N) f(x_1, x_2, ..., x_N) dx_1 dx_2 ... dx_N \qquad \text{(II.51)}$$

integrali Monte-Carlo integrayonu kullanılarak

$$f_0 \approx \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} f(x^{(s)})$$

yaklaşık ilişkisi ile hesaplanır. Burada M sonsuza giderken f_0'ın değeri elde edilecektir. Monte-Carlo integrasyonu genellikle çok hızlı yakınsama gösterdiğinden M'nin çok büyük olmayan değerleri için oldukça iyi sonuçlar elde edilir. Monte-Carlo kullanılarak bir integralin yaklaşık değerinin hesaplanması integraldeki lineer bağımsız değişken sayısından bağımsızdır ve bu özellik büyük boyutlu sistemlerde çalışırken büyük kolaylıklar getirmektedir.

Bütün SÖ-YBMG bileşenlerinin doğrudan hesaplanabilmesi için çok fazla sayıda rastgele örnekleme ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin tek değişkenli $f_i(x_i)$ SÖ-YBMG bileşenlerini elde etmeye çalışalım. Buna göre

$$\left(x_i, x^i\right)^{(s)} = \left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, ..., x_{i-1}^{(s)}, x_i, x_{i+1}^{(s)}, ..., x_N^{(s)}\right) \qquad \text{(II.52)}$$

olmak üzere tek değişkenli bileşenler

$$f_i(x_i) \approx \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} f\left((x_i, x^i)^{(s)}\right) - \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} f(x^i) \qquad \text{(II.53)}$$

ile belirlenir. Eğer x_i değişkeni ağ üzerinde m tane farklı değer alıyorsa, tek değişkenli $f_i(x_i)$ SÖ-YBMG bileşenlerinin nümerik tablosunu oluşturmak için mM tane örnekleme ihtiyaç duyulmaktadır. Benzer şekilde

$$\left(x_i, x_j, x^{ij}\right)^{(s)} = \left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \ldots, x_{i-1}^{(s)}, x_i, x_{i+1}^{(s)}, \ldots, x_{j-1}^{(s)}, x_j, x_{j+1}^{(s)}, \ldots, x_N^{(s)}\right) \qquad \text{(II.54)}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_i, x_j) \approx \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} f\left((x_i, x_j, x^{ij})^{(s)}\right) - \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} f\left((x_i, x^i)^{(s)}\right) \\ - \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} f\left((x_j, x^j)^{(s)}\right) + \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} f(x^i) \end{aligned} \qquad \text{(II.55)}$$

iki değişkenli SÖ-YBMG bileşeninin nümerik tablosunu oluşturmak için x_i ve x_j ağ üzerinde m farklı değer alıyorsa m^2M tane noktaya ihtiyaç duyulur. Görüldüğü gibi bileşen sayısı arttıkça kullanılması gereken örneklem sayısı da üstel olarak artmaktadır. Dolayısıyla RS-YBMG bileşenlerini doğrudan hesaplamak hala çok maliyetlidir. Bunu azaltmak için RS-YBMG bileşenlerine ortonormal polinomlar, spline fonksiyonları gibi uygun fonksiyonlarla yaklaşılabilir.

Buna göre $\{\phi_{ik}(x_i)\}_{k=1}^{s}$, $[0,1]$ birim aralığında x_i değişkenin ve tek değişkenli fonksiyonların, lineer bağımsız yaklaştırım tabanının ailesi olsun. Bu ailedeki her fonksiyonun $k = 1,2,\ldots,s$ olmak üzere

$$\int_0^1 \phi_{ik}(x_i)dx_i = 0 \qquad \text{(II.56)}$$

koşulunu sağladığını kabul edelim. Eğer seçilen $\{\hat{\phi}_{ik}(x_i)\}_{k=1}^{s}$ taban fonksiyonları bu koşulu sağlamıyorsa

$$\phi_{ik}(x_i) \equiv \hat{\phi}_{ik}(x_i) - \int_{[0,1]} \hat{\phi}_{ik}(x_i)dx_i \tag{II.57}$$

dönüşümü yardımıyla bu sorun ortadan kaldırılabilir. Ayrıca ν_i

$$\nu_i = \mathrm{Span}\{\phi_{i1}(x_i), \phi_{i2}(x_i), ..., \phi_{is}(x_i)\} \tag{II.58}$$

ile tanımlanmak üzere herhangi bir $u \in \nu_i$ elemanı $u = \sum_{k=1}^{s} c_{ik}\phi_{ik}(x_i)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla tek değişkenli SÖ-YBMG bileşenleri

$$f_i(x_i) = \sum_{k=1}^{s} c_{ik}\phi_{ik}(x_i) \tag{II.59}$$

yardımıyla hesaplanır.

Benzer şekilde iki değişkenli SÖ-YBMG bileşenlerini elde etmek için iki değişkenli taban fonksiyonları kullanılacaktır. Dolayısıyla $\{\phi_{ijk}(x_i, x_j)\}_{k=1}^{s}$ lineer bağımsız iki değişkenli fonksiyonların ailesi olsun. Bu ailenin elemanları $k = 1,2,...,s$ olmak üzere

$$\int_0^1 \phi_{ijk}(x_i, x_j)dx_i = 0 \tag{II.60}$$

ve

$$\int_0^1 \phi_{ijk}(x_i, x_j)dx_j = 0 \tag{II.61}$$

koşullarını sağlaması gerekir. Burada eğer seçilen aile bu koşulu sağlamıyorsa

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \phi_{ijk}(x_i, x_j)dx_i \equiv & \int_0^1 \hat{\phi}_{ijk}(x_i, x_j)dx_i - \int_0^1\int_0^1 \hat{\phi}_{ijk}(x_i, x_j)dx_i dx_i \\
& - \int_0^1\int_0^1 \hat{\phi}_{ijk}(x_i, x_j)dx_i dx_j + \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \hat{\phi}_{ijk}(x_i, x_j)dx_i dx_j dx_i \ldots
\end{aligned}
\tag{II.62}
$$

dönüşümü yapılarak istenilen sağlanabilir. Burada ν_{ij} ise

$$
\nu_{ij} \equiv \mathrm{Span}\{\phi_{ij1}(x_i, x_j), \phi_{ij2}(x_i, x_j), \ldots, \phi_{ijs}(x_i, x_j)\} \tag{II.63}
$$

göstermektedir. Dolayısıyla herhangi bir $u \in \nu_i$ elemanı $u = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\phi_{ijk}(x_i, x_j)$ şeklinde yazılabilmektedir. Benzer şekilde iki değişkenli SÖ-YBMG bileşeni de

$$
f_{ij}(x_i, x_j) = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\phi_{ijk}(x_i, x_j) \tag{II.64}
$$

yardımıyla hesaplanmaktadır.

Daha büyük boyutlu bileşenler için çok değişkenli baz elemanları da yukarıdaki ifadeler genelleştirilerek benzer şekilde oluşturulabilir. Ancak bu baz fonksiyonlarının $k = 1,2,\ldots,s$ ve $m = 1,2,\ldots,\ell$ olmak üzere

$$
\int_0^1 \phi_{i_1 i_2 \ldots i_l k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l})dx_{i_m} = 0 \tag{II.65}
$$

koşulunu sağlamaları gerekmektedir. Burada $k \equiv (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ olmak üzere

$$
\phi_{i_1, i_2, \ldots, i_l k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}) = \phi_{i_1 k_1}(x_{i_1})\phi_{i_2 k_2}(x_{i_2}) \ldots\phi_{i_l k_l}(x_{i_l}) \tag{II.66}
$$

olacak şeklide seçilmelidir.

Benzer şekilde $f_{i_1, i_2, \ldots, i_l}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l})$ bileşeni

$$f_{i_1,i_2,\ldots,i_l}(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_l})=\sum_{k=1}^{s}c_{i_1,i_2,\ldots,i_lk}\phi_{i_1,i_2,\ldots,i_lk}(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_l}) \qquad \text{(II.67)}$$

ile belirlenebilir. Buradaki $c_{i_1,i_2,\ldots,i_lk}$ katsayıları ise

$$J=\int_{[0,1]^M}\left[f(x)-f_0-\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)-\ldots\right]^2 dx \qquad \text{(II.68)}$$

fonksiyonelini minimize edilerek bulunabilir. Buna göre $\ell=2$ için

$$J=\int_{[0,1]^M}\left[f(x)-c_0-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}c_{ik}\phi_{ik}(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}c_{ijk}\phi_{ijk}(x_i,x_j)\right]^2 dx \qquad \text{(II.69)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada üç ve daha çok değişkenli terimler ihmal edilmektedir ve bilinmeyenler sadece c_0, c_{ik}, c_{ijk} katsayılarıdır. Bu katsayıların çözümü ise tektir. Yani minimizasyon probleminin çözümü SÖ-YBMG bileşenlerini tek türlü olarak elde edilmesini sağlayacaktır. Yukarıdaki fonksiyonelin minimum olabilmesi için c_0, c_{ik}, c_{ijk} bilinmeyen katsayılarına göre türevinin sıfır olması gerekmektedir.

İlk olarak c_0 'ı belirleyebilmek için $\frac{\partial J}{\partial c_0}=0$ gerekliliğini dikkate alarak,

$$\frac{\partial J}{\partial c_0}=-2\int_{[0,1]^M}\left[f(x)-c_0-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}c_{ik}\phi_{ik}(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}c_{ijk}\phi_{ijk}(x_i,x_j)\right]dx=0 \qquad \text{(II.70)}$$

ifadesi elde edilir. Taban fonksiyonlarının integralinin sıfır olması göz önüne alınarak

$$-2\int_{[0,1]^M}\left[f(x)-c_0\right]dx=0 \qquad \text{(II.71)}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$c_0 = \int_{[0,1]^M} f(x)dx \qquad \text{(II.72)}$$

elde edilir. Benzer şekilde birinci mertebeden $\{c_{ik}\}$ bulmak için de

$$\frac{\partial J}{\partial c_{[\chi]}} = -2 \int_{[0,1]^M} \left[f(x) - c_0 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} c_{ik}\phi_{ik}(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\phi_{ijk}(x_i, x_j) \right] \phi_{pq}(x_p)dx = 0 \qquad \text{(II.73)}$$

ifadesi ele alınır ki burada yapılan düzenlemelerle

$$\int_{[0,1]^M} f(x)\phi_{pq}(x_p)dx - \sum_{k=1}^{s} c_{pk} \int_{[0,1]} \phi_{pk}(x_p)\phi_{pq}(x_p)dx_p = 0 \qquad \text{(II.74)}$$

olarak bulunur. . İki değişkenli katsayılar da benzer işlemlerle hesaplandığında,

$$\int_{[0,1]^M} f(x)\phi_{opm}(x_0, x_p)dx - \sum_{k=1}^{s} c_{opk} \int_{[0,1]^2} \phi_{opk}(x_0, x_p)\phi_{opm}(x_0, x_p)dx_0 dx_p = 0 \qquad \text{(II.75)}$$

elde edilir. c_0, c_{ik}, c_{ijk} katsayılarının belirlenebilmesi için yukarıda elde edilen ifadeler,

$$Ay = b$$

şeklinde bir denklem sistemine dönüştürülebilir. Bu sistemin tek türlü olarak çözülebilmesi için A katsayılar matrisinin tersinin alınabilir olması gerekmektedir. c_{ik} 'nın elde edilebilmesi için oluşturulan sistemin $A = \{M^i\}$ katsayılar matrisi

$$M^i_{kl} = \int_{[0,1]} \phi_{ik}(x_i)\phi_{il}(x_i)dx_i \qquad \text{(II.76)}$$

elemanlarınından oluşacaktır. Burada b vektörü ise

$$
b = \begin{bmatrix} \int\limits_{[0,1]^M} f(x)\phi_{p1}(x_p)dx \\ \int\limits_{[0,1]^M} f(x)\phi_{p2}(x_p)dx \\ \vdots \\ \int\limits_{[0,1]^M} f(x)\phi_{ps}(x_p)dx \end{bmatrix} \tag{II.77}
$$

şeklindedir. Benzer şekilde c_{ijk} ların belirlenebilmesi için elemanları

$$
M_{kl}^{ij} = \int\limits_{[0,1]^2} \phi_{ijk}(x_i, x_j)\phi_{ijl}(x_i, x_j)dx_i dx_j \tag{II.78}
$$

olan $A = \{M^{ij}\}$ katsayılar matrisinin tersinir olması gerekmektedir. Burada taban fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan $\{M^i\}$ ve $\{M^{ij}\}$ matrislerinin determinantı sıfırdan farklı olacaktır dolayısıyla her iki katsayılar matrisinin de tersi mevcuttur ve matrislerin boyutu da tersi kolaylıkla hesaplanacak kadar küçüktür. Katsayılar matrislerinin tersleri hesaplanıp depolanabildiğinden SÖ-YBMG üretilirken bilgisayara ek bir işlemsel yük getirmemektedir.

Buradaki matrisler hesaplanırken veriler keyfi olarak seçilmiş olduğundan integrallerin hesaplanmasında Monte-Carlo integrasyonu kullanılacaktır. Yukarıdaki integraller için Monte-Carlo integrasyonu

$$
c_0 = \int\limits_{[0,1]^M} f(x)dx \approx \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} f\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_N^{(r)}\right) \tag{II.79}
$$

$$
c_{ij} = \int\limits_{[0,1]^M} f(x)\phi_{ij}(x_i)dx \approx \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} f\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_N^{(r)}\right)\phi_{ij}(x_i^{(r)}) \tag{II.80}
$$

$$
c_{ijk} = \int\limits_{[0,1]^M} f(x)\phi_{ijk}(x_i, x_j)dx \approx \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} f\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_N^{(r)}\right)\phi_{ijk}(x_i^{(r)}, x_j^{(r)}) \tag{II.81}
$$

Monte-Carlo toplamlarının yakınsak bir davranış göstermesi için girdilerin bağımsız rastgele değişkenler olması gerekmektedir. Katsayıların Monte-Carlo yaklaştırımında yapılan hata N'den bağımsızdır ve M örneklem sayısı olmak üzere $1/\sqrt{M}$ ile orantılıdır.

"Correlation Method for Variance Reduction of Monte Carlo Integration in RS-HDMR" isimli makalede bir fotokimyasal kutu modeli (photochemical box problem) hem ortogonal taban fonksiyonları hem de doğrudan Monte-Carlo integrasyonu uygulanarak çözülmüştür [24]. Yukarıdaki işlemler "Practical Approaches to Construct RS-HDMR Compenents" isimli makalede ortonormal polinomlar ve kübik B-splinelar kullanılarak yapılmıştır [25]. Bu işlemler sonucunda da Monte-Carlo metodunda binlerce düğüm kullanılarak elde edilen yaklaşıklık, ortonormal polinomlar kullanıldığında sadece birkaç yüz düğümle işlem yapıldığında elde edilebilmektedir. Bu dört yaklaşımdan en iyi sonucu ortonormal polinomlar, en kötü sonucu ise kübik B-spline vermiştir.

II.6 GENELLEŞTİRİLMİŞ YBMG (GENERALIZED HDMR)

M. Demiralp tarafından ortaya atılan GYBMG bileşenleri hesaplanırken YBMG ve YBMG'nin şimdiye kadar gördüğümüz çeşitlerindekinden farklı olarak, genel bir $W(x_1, x_2, ..., x_N)$ çok değişkenli ağırlık fonksiyonu kullanılmaktadır [19]. Ağırlık fonksiyonunun tek değişkenli fonksiyonların çarpımı olarak seçimi gerçek hayatta ortaya çıkan daha genel problemler ciddi bir sınırlama olarak ortaya çıkmaktadır. Bu sınırlamayı mümkün olduğunca ortadan kaldırabilmek için çarpımsal yapıda yardımcı bir ağırlık fonksiyonu kullanılarak $W(x_1, x_2, ..., x_N)$ ağırlık fonksiyonu YBMG'ye açılır. Böylece bu sınırlama da ortadan kalkar. Bu yöntemle çözüm yapılırken ağırlık fonksiyonu yerine, ağırlık fonksiyonunun YBMG açılımı kullanılarak incelenen ağırlık fonksiyonun YBMG bileşenleri hesaplanır. Buna göre ifade

$$W(x_1, x_2, ..., x_N) = w_0 + \sum_{i=1}^{N} w_i(x_i) + \sum_{1 \le i < j \le N} w_{ij}(x_i, x_j) + ... + w_{12...N}(x_1, x_2, ..., x_N) \quad \text{(II.82)}$$

şeklindedir ve hesaplama yapılırken yardımcı ağırlık fonksiyonu

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{j=1}^{N} \Omega_j(x_j) \tag{II.83}$$

halinde tamamen çarpımsal bir yapıda seçilir. Yardımcı ağırlık fonksiyonu da benzer olarak köşeleri $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_N, b_N)$ olan hiperprizma üzerinde normalize edilir yani $1 \leq j \leq N$ olmak üzere

$$\int_{a_j}^{b_j} \Omega_j(x_j) dx_j = 1 \tag{II.84}$$

olmalıdır. $W(x_1, x_2, ..., x_N)$ ağırlık fonksiyonunun YBMG bileşenleri $1 \leq j \leq k \leq N$ ve $x_j \in (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_N})$ olmak üzere

$$\int_{a_j}^{b_j} \Omega_j(x_j) w_{i_1 i_2 ... i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}) dx_j = 0 \tag{II.85}$$

integral altında yok etme koşulunu sağlarlar ve aynı zamanda ortoganaldirler. Bununla birlikte ağırlık fonksiyonun

$$\int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_N}^{b_N} W(x_1, x_2, ..., x_N) f_{i_1 i_2 ... i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}) dx_1 dx_2 ... dx_N = 0 \tag{II.86}$$

integral altında yok etme koşulunu da sağlaması gerekmektedir. Bu koşul GYBMG için yeniden düzenlenirse

$$\int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_N}^{b_N} \Omega(x_1, x_2, ..., x_N) W(x_1, x_2, ..., x_N) f_i(x_i) dx_1 dx_2 ... dx_N = 0 \tag{II.87}$$

koşulu elde edilir.

GYBMG bileşenleri ise Toplamsal YBMG'deki gibi çok değişkenli fonksiyon ağırlıkla çarpılıp integre edilerek bulunur. Fakat bu sefer integre edilecek ifade en genel hali ile

$$W(x_1,x_2,...,x_N)f(x_1,x_2,...,x_N)=\left[w_0+\sum_{i=1}^{N}w_i(x_i)+\sum_{1\le i<j\le N}w_{ij}(x_i,x_j)+...\right]\left[f_0+\sum_{i=1}^{N}f_i(x_i)+\sum_{1\le i<j\le N}f_{ij}(x_i,x_j)+...\right] \tag{II.88}$$

şeklindedir. Burada ortaya çıkan ifadeler daha öncekiler gibi tamamen cebirsel yapıda olmayacaktır. Tek veya daha çok değişken içeren terimler integral denklemler içerecektir. Bu integral denklemler çözülebilir fakat GYBMG bileşenleri hesaplamanın maliyeti ağırlık fonksiyonunun seçimine bağlıdır ve çok büyük olabilir. M. Demiralp ve M.A Tunga tarafından "Data Partitoning Via Generalized high Dimensional Model Representation and Multivariate Interpolative Applications " isimli makalesinde sonlu hiperprizma üzerindeki düğümlerdeki değerleri bilinen birçok değişkenli fonksiyon incelenmiştir [19].

Yukarıdaki YBMG açılımının sağ yanındaki terimleri adım adım belirlenmelidir. Burada işlemlerde kolaylık sağlanması açısından öncelikle I_0 operatörü tanımlanmalıdır. Bu operatör keyfi, $\Omega(x_1,x_2,...,x_N)$ ağırlık fonksiyonu ile çarpılan, karesi integrallenebilir $F(x_1,x_2,...,x_N)$ fonksiyonunun N katlı integralinin hesabı şeklinde tanımlanmıştır. Yani daha açık şekilde ifade edilirse

$$I_0F(x_1,x_2,...,x_N)=\int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_N}^{b_N}\Omega(x_1,x_2,...,x_N)F(x_1,x_2,...,x_N)dx_1dx_2...dx_N \tag{II.89}$$

olarak tanımlanır. f_0 sabit bileşenini belirleyebilmek için GYBMG açılımının her iki yanı ağırlıkla çarpılıp bütün bağımsız değişkenlere göre integre edilmelidir. Yani bu işlem I_0 operatörünü kullanarak

$$I_0\{W(x_1,x_2,...,x_N)f(x_1,x_2,...,x_N)\}=$$
$$I_0\left\{\left[w_0+\sum_{i=1}^{N}w_i(x_i)+\sum_{1\le i<j\le N}w_{ij}(x_i,x_j)+...\right]\left[f_0+\sum_{i=1}^{N}f_i(x_i)+\sum_{1\le i<j\le N}f_{ij}(x_i,x_j)+...\right]\right\} \quad (II.90)$$

ile gösterilebilir.

$$\int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_N}^{b_N}\Omega(x_1,x_2,...,x_N)W(x_1,x_2,...,x_N)f_i(x_i)dx_1dx_2...dx_N=0 \quad (II.91)$$

özelliğinden dolayı yukarıdaki ifade

$$I_0\left[W(x_1,x_2,...,x_N)f(x_1,x_2,...,x_N)\right]=w_0f_0 \quad (II.92)$$

eşitliğine özdeştir. Ağırlığın, tanımlanan aralıkta N-katlı integralinin bire eşit olması gerektiğinden w_0,

$$I_0W(x_1,x_2,...,x_N)=\int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_N}^{b_N}\Omega(x_1,x_2,...,x_N)W(x_1,x_2,...,x_N)dx_1dx_2...dx_N=0 \quad (II.93)$$

$$w_0=1 \quad (II.94)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$f_0=I_0\left[W(x_1,x_2,...,x_N)f(x_1,x_2,...,x_N)\right] \quad (II.95)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $F(x_1,x_2,...,x_N)$ karesi integre edilebilir keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$I_iF(x_1,x_2,...,x_N)=\int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_N}^{b_N}\prod_{\substack{i_1=1\\ i_1\neq i}}^{N}\Omega_k(x_k)F(x_1,x_2,...,x_N)dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_N \quad (II.96)$$

operatörü tanımlanır. Tek değişkenli GYBMG bileşenlerini bulmak için ise tek bir değişken dışındaki bütün değişkenlere göre integral almak gerekmektedir. Bu işlem I_i operatörü yardımıyla

$$I_i\left[W(x_1,x_2,...,x_N)f(x_1,x_2,...,x_N)\right]=I_i\left[w_0+\sum_{i_1=1}^{N}w_{i_1}(x_{i_1})+\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\i_1<i_2}}^{N}w_{i_1i_2}(x_{i_1},x_{i_2})+...\right]\left[f_0+\sum_{i_1=1}^{N}f_{i_1}(x_{i_1})+\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\i_1<i_2}}^{N}f_{i_1i_2}(x_{i_1},x_{i_2})+...\right] \quad \text{(II.97)}$$

olarak ifade edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra bu eşitlik δ_{i_1i} Kronecker Deltası olmak üzere

$$\begin{aligned}I_i\left[W(x_1,x_2,...,x_N)f(x_1,x_2,...,x_N)\right]&=(1+w_i(x_i))f_0+(1+w_i(x_i))f_i(x_i)\\&+(1+w_i(x_i))\sum_{\substack{i_1=1\\i_1\neq i}}^{N}\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\Omega_{i_1}(x_{i_1})(1+w_{i_1}(x_{i_1}))f_{i_1}(x_{i_1})dx_{i_1} \qquad \text{(II.98)}\\&+\sum_{\substack{i_1,i_2=1,i_1<i_2\\(i_1=i)\vee(i_2=i)}}^{N}\int_{(1-\delta_{i_1i})a_{i_1}+\delta_{i_1i}a_{i_2}}^{(1-\delta_{i_1i})b_{i_1}+\delta_{i_1i}b_{i_2}}\begin{matrix}\left[(1-\delta_{i_1i})\Omega_{i_1}(x_{i_1})dx_{i_1}+\delta_{i_1i}\Omega_{i_2}(x_{i_2})dx_{i_2}\right]\times\\\left[w_{i_1i_2}(x_{i_1},x_{i_2})-w_{i_1}(x_{i_1})w_{i_2}(x_{i_2})\right]\times\\\left[(1-\delta_{i_1i})f_{i_1}(x_{i_1})+\delta_{i_1i}f_{i_2}(x_{i_2})dx_{i_1}\right]\end{matrix}\end{aligned}$$

haline gelir. Görüldüğü gibi GYBMG açılımının tek değişkenli bileşenlerinin hesaplanabilmesi için öncelikle ağırlık fonksiyonunun YBMG açılımının sabit, tek değişkenli ve iki değişkenli bileşenlerinin hesaplanması gerekmektedir. GYBMG metodunda uygun boyutta veri tabloları oluşturularak, Lagrange, Hermite gibi interpolasyon yöntemleri yardımıyla istenilen değerler elde edilebilir.

GYBMG'de fonksiyonun bir ağ üzerindeki düğümlerde aldığı değerler kullanılarak fonksiyonun analitik yapısı belirlenmeye çalışılmaktadır. Buradaki düğümlar rasgele veya düzgün saçılmış olabilir. Bu tip problemleri çözmek için kullanılan Genelleştirilmiş YBMG'de bazı bileşenler ihmal edilerek yani bağımsız değişken sayısı azaltılarak işlemler yapılmaktadır. Buna örnek olarak M. Demiralp ile M. A. Tunga'nın "Data Partitioning via GHDMR and Multivariate Interpolative

Applications" isimli makalesi gösterilebilir. Geometrisi düzgün olmayan bölgeler üzerinde tanımlanmış olan bir difüzyon denkleminin çözümlerinin bulunmasında daha da etkin ve yeni bir yöntem olan GYBMG kullanılmıştır [27].

BÖLÜM III

ÇEŞİTLİ AĞIRLIK FONKSİYONLARI İLE YBMG

Bu bölümde inceleyeceğimiz fonksiyonlar için [0,1] aralığını göz önünde bulunduracağız. Ele alacağımız tüm fonksiyonlar için amacımıza uygun düştüğüne inandığımız aşağıdaki ağırlık fonksiyonlarının etkisini inceleyeceğiz.

a) $w_i(x_i) = 1 \qquad 1 \le i \le N$

b) $w_i(x_i) = A_i x_i^2 \qquad 1 \le i \le N$

c) $w_i(x_i) = A_i\left(1 - x_i^2\right) \qquad 1 \le i \le N$

d) $w_i(x_i) = A_i x_i^i \qquad 1 \le i \le N$

Fonksiyonlara YBMG yöntemini uygulayabilmemiz için gerekli bazı koşullar vardır. YBMG hesaplamasını kolaylaştıran bu koşullardan biri ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olması yani normalize olduğunun varsayılmasıdır. Buna göre (II.1) denkleminin sağ yanındaki terimlerin diklik koşuluna (II.4), (II.5) ve (II.6) de verildiği şekilde uymaları gerekmektedir. Bu bağlamda ele alacağımız örneklerde ilgileneceğimiz ağırlık fonksiyonlarının [0,1] integral aralığında 1 olduğunu gösterelim.

Ilk olarak ele aldığımız $w_i(x_i) = 1$ ağırlık fonksiyonunun [0,1] aralığında,

$$\int_0^1 w_i(x_i)dx_i = 1$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Şimdi de ele aldığımız diğer ağırlık fonksiyonlarının [0,1] integral aralığında normalize olması için A_i değerlerini $1 \le i \le N$ için belirleyelim. $w_i(x_i) = A_i x_i^2$ ağırlık fonksiyonu [0,1] aralığında (II.3) özelliği gereğince $\int_0^1 A_i x_i^2 dx_i = 1$ olmak üzere $A_i = 3$ olarak belirlenir. $w_i(x_i) = A_i\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu ise [0,1] aralığında (II.3) özelliği gereğince $\int_0^1 A_i\left(1 - x_i^2\right)dx_i = 1$ olmak üzere $A_i = \frac{3}{2}$ olarak belirlenir. $w_i(x_i) = A_i x_i^i$ ağırlık fonksiyonu [0,1] aralığında (II.3) özelliği gereğince $\int_0^1 A_i x_i^i dx_i = 1$ olmak üzere $A_i = (i+1)$ olarak belirlenir.

Sonuç olarak ilgileneceğimiz normalize ağırlık fonksiyonları [0,1] aralığı için şöyle olur.

a) $w_i(x_i) = 1$ $\qquad 1 \le i \le N$ (III.1)

b) $w_i(x_i) = 3x_i^2$ $\qquad 1 \le i \le N$ (III.2)

c) $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ $\qquad 1 \le i \le N$ (III.3)

d) $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ $\qquad 1 \le i \le N$ (III.4)

Ilk olarak,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m \qquad \text{(III.5)}$$

fonksiyonunu [0,1] integral aralığında, bu bölümün başında verilen dört adet ağırlık fonksiyonu için inceleyelim.

Verilere göre

$$f(x_1,x_2,...,x_N)=f_0+\sum_{i=1}^{N}f_i(x_i)+\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\langle i_2}}^{N}f_{i_1i_2}(x_{i_1},x_{i_2})+\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1\\ i_1\langle i_2\langle i_3}}^{N}f_{i_1,i_2,i_3}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})+...$$
$$+f_{1,2,...,N}(x_1,x_2...,x_N)$$

olarak verilen (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri genelleştirilmiş (II.9) denklemi ile elde edelim.

a) $w_i(x_i)=1$ ve $1\le i\le N$ olmak üzere (II.9) genelleştirilmiş operatör

yardımıyla (II.1) formunun terimlerini bulalım. Buna göre I_0 operatörünün tanımını kullanarak

$$f_0=I_0f(x_1,x_2...,x_N)$$

elde edilir.

$$f_0=\int_0^1...\int_0^1 dx_1dx_2...dx_N(\sum_{i=1}^{N}x_i^m)$$

$$f_0=\int_0^1 x_1^m dx_1\int_0^1 dx_2...\int_0^1 dx_N+\int_0^1...\int_0^1 dx_1...dx_N(x_2^m+...+x_N^m)$$

$$f_0=\frac{N}{m+1} \qquad \text{(III.6)}$$

olarak bulunur. Tek terimliler için,

$$f_i(x_i)=I_if(x_1,x_2,...,x_N)-f_0 \qquad 1\le i\le N$$

olarak ele alınır. Bu ifadeden tek terimliler genel olarak

$$f_i(x_i)=x_i^m-\frac{1}{m+1}, \qquad 1\le i\le N \qquad \text{(III.7)}$$

şeklinde bulunur.

Fonksiyonun iki terimlilerini aşağıda tanımlanan operatör yardımıyla bulalım.

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = I_{i_1, i_2} f(x_1, x_2, \ldots x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0 \qquad 1 \leq i_k, i_m \leq N, \;\; k < m$$

Ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olması ve bileşenlerin diklik koşuluna göre ikililer 0 olarak bulunur.

Üç terimliler için,

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, \ldots, x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ - f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0 \end{aligned}$$

operatöründen faydalanalım. Denklemde bilinmeyenler önceki işlemlerde elde edilmişti. O halde bu bilinmeyenlerin yerine yazılması, ağırlık fonksiyonlarının her birini ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 oluşu ve bileşenlerin diklik koşulu gereği, fonksiyonun üçlüleri de 0 olarak bulunmaktadır. Diğer terimler de "0" olarak elde edilir.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 < i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3 = 1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^{N} f_{i_1, i_2, i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + \ldots + f_{1,2,\ldots,N}$$

ifadesinden,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{N}{m+1} + \left(x_1^m - \frac{1}{m+1} \right) + \left(x_2^m - \frac{1}{m+1} \right) + \ldots + \left(x_N^m - \frac{1}{m+1} \right) + 0 + ..$$

(III.6) denklemine dönüşür. Buradan (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu durumda değişmezlik ölçeni,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\|f_0\|^2}{\|f\|^2}$$

ifadesi gereği,

$$\|f_0\|^2 = \left(\frac{N}{m+1}\right)^2 \quad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = \frac{N}{2m+1} + \frac{2N(N-1)}{2(m+1)^2}$$

olmak üzere

$$\sigma_0 \equiv \frac{\dfrac{N^2}{(m+1)^2}}{\dfrac{N}{2m+1} + \dfrac{N(N-1)}{(m+1)^2}} = \frac{N(2m+1)}{(m+1)^2 + (N-1)(2m+1)} \tag{III.8}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_0 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,7500	0,8571	0,9000	0,9231
2	0,5556	0,7143	0,7895	0,8333
3	0,4375	0,6087	0,7000	0,7568
4	0,3600	0,5294	0,6279	0,6923

Tablo III.1: (III.5) fonksiyonu için (III.1) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

Tablodan çıkarılan sonuçlara f_0, göre N'nin artan değerleri için 1'e yaklaşmaktadır. m arttıkça f_0 'ın fonksiyona katkısı azalmaktadır.

σ_1 'i hesaplamak için

$$f_{j_1}(x_{j_1}) = x_{j_1}^m - \frac{1}{m+1} \qquad 1 \le j_1 \le N$$

olmak üzere $f_{j_1}(x_{j_1})$ 'in normunun karesini bulmalıyız.

$$\left\|f_{j_1}(x_{j_1})\right\|^2 = \int_0^1 \left(x_{j_1}^m - \frac{1}{m+1} \right)^2 dx_{j_1} = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}$$

Bulduğumuz değerleri (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda σ_1 değişmezlik ölçeni

$$\sigma_1 \equiv \frac{N(2m+1)}{(m+1)^2 + (N-1)(2m+1)} + \frac{N\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right)}{\frac{N}{2m+1} + \frac{N(N-1)}{(m+1)^2}} = 1 \qquad \text{(III.9)}$$

olarak bulunur ki bu σ_1 in beklenilen değeridir zira ele alınan fonksiyon tamamen toplamsaldır.

b) $w_i(x_i) = 3x_i^2,\ 1 \le i \le N$ olmak üzere (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri genelleştirilmiş (II.9) denklemi ile elde edelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına gore f_0,

$$f_0 = \int_0^1 3x_1^2 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^2 dx_N \left(\sum_{i=1}^N x_i^m \right)$$

$$f_0 = \int_0^1 3x_1^{m+2} dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^2 dx_N + \int_0^1 3x_1^2 dx_1 \int_0^1 3x_2^{m+2} dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^2 dx_N +$$
$$\ldots + \int_0^1 3x_1^2 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^{m+2} dx_N$$

$$f_0 = \frac{3N}{m+3} \qquad \text{(III.10)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = x_i^m - \frac{3}{m+3} \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(III.11)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak 0 olarak bulunmaktadır.

Üç terimliler için,

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = I_{i_1,i_2,i_3} f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ - f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0 \end{aligned}$$

operatöründen faydalandığımızda ikililerin bulunmasına benzer işlemler sonucunda üçlüler de 0 olarak bulunmaktadır

Buna göre kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler "0" olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler (II.1) genel denkleminde yerine yazılırsa,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{3N}{m+3} + \left(x_1^m - \frac{3}{m+3}\right) + \left(x_2^m - \frac{3}{m+3}\right) + ... + \left(x_N^m - \frac{3}{m+3}\right) + 0 + ..$$

(III.6) denklemine dönüşür. Dolayısıyla (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu durumda değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\|f_0\|^2 = \left(\frac{3N}{m+3}\right)^2 \qquad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = \frac{3N}{2m+3} + \frac{9N(N-1)}{(m+3)^2}$$

olmak üzere σ_0,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\dfrac{9N^2}{(m+3)^2}}{\dfrac{3N}{2m+3}+\dfrac{9N(N-1)}{(m+3)^2}} = \frac{3N(2m+3)}{(m+3)^2+3(N-1)(2m+3)} \qquad \text{(III.12)}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_0 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ **N**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,7895	0,9677	0,9783	0,9836
2	0,7635	0,9130	0,9403	0,9546
3	0,7500	0,8571	0,9000	0,9231
4	0,6735	0,8049	0,8609	0,8919

Tablo III.2: (III.5) fonksiyonu için (III.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

Buna göre N'nin artan değerleri için f_0'ın $\sum_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna katkısı artmaktadır. m arttıkça N'nin artan değerlerine karşılık σ_0 daha yavaş 1'e yaklaşmaktadır. Ağırlık fonksiyonu $w = 1$'e karşılık $w = 3x_i^2$'in $\sum_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna katkısı daha olumludur.

σ_1'i hesaplamak için önce

$$f_{j_1}(x_{j_1}) = x_{j_1}^m - \frac{3}{m+3} \qquad 1 \le j_1 \le N$$

olmak üzere $f_{j_1}(x_{j_1})$ normunun karesini bulmalıyız.

$$\left\| f_{j_1}(x_{j_1}) \right\|^2 = I_0\left[\left(x_{j_1}^m - \frac{3}{m+3}\right)^2\right] = \frac{3}{2m+3} - \frac{9}{(m+3)^2} \text{ ve } \|f\|^2$$

değerleri ile daha önce bulunan değişmezlik ölçenini (II.15.b) formunda yerine yazdığımızda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$\sigma_1 \equiv \frac{3N(2m+3)}{(m+3)^2+3(N-1)(2m+3)} + \frac{N\left(\frac{3}{2m+3}-\frac{9}{(m+3)^2}\right)}{\frac{3N}{2m+3}+\frac{9N(N-1)}{(m+3)^2}} = 1 \qquad \text{(III.13)}$$

olarak elde edilmektedir. Yine bu σ_1'in beklenilen değeridir zira ele alınan fonksiyon tamamen toplamsaldır.

c) Fonksiyonu $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu altında inceleyelim. Verilere göre aşağıdaki (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla bulalım ve elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0=\int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_1^2)dx_1\int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_2^2)dx_2 \ldots \int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_N^2)dx_N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^m\right)$$

$$\begin{aligned} f_0 = {} & \int_0^1 \frac{3}{2}(x_1^m - x_1^{m+2})dx_1\int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_2^2)dx_2 \ldots \int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_N^2)dx_N + \\ & \int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_1^2)dx_1\int_0^1 \frac{3}{2}(x_2^m - x_2^{m+2})dx_2 \ldots \int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_N^2)dx_N + \ldots + \\ & \int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_1^2)dx_1\int_0^1 \frac{3}{2}(1-x_2^2)dx_2 \ldots \int_0^1 \frac{3}{2}(x_N^m - x_N^{m+2})dx_N \end{aligned}$$

$$f_0=\frac{3N}{2}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+3}\right)=\frac{3N}{(m+3)(m+1)} \qquad \text{(III.14)}$$

olarak bulunmaktadır.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz. $1 \le i \le N$ olmak üzere

$$f_i(x_i) = x_i^m - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right) = x_i^m - \frac{3}{(m+3)(m+1)} \qquad \text{(III.15)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak 0 olarak bulunmaktadır.

Üç terimliler için,

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = {} & I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ & - f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0 \end{aligned}$$

operatöründen faydalandığımızda ikililerin bulunmasına benzer işlemler sonucunda üçlüler de 0 olarak bulunmaktadır

Buna göre kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler “0” olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler (II.1) genel denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_N) = {} & \frac{3N}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right) + \left[x_1^m - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)\right] + \\ & \left[x_2^m - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)\right] + ... + \left[x_N^m - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)\right] + 0 + .. \end{aligned}$$

(III.6) denklemine dönüşür. Dolayısıyla (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu durumda değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\|f_0\|^2 = \left[\frac{3N}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)\right]^2 = \left(\frac{3N}{(m+1)(m+3)}\right)^2 \qquad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = \frac{3N}{2}\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+3}\right) + \frac{9N(N-1)}{4}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)^2$$
$$= \frac{3N}{(2m+1)(2m+3)} + \frac{9N(N-1)}{(m+1)^2(m+3)^2}$$

olmak üzere σ_0,

$$\sigma_0 = \frac{\left[\frac{3N}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)\right]^2}{\frac{3N}{2}\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+3}\right) + \frac{9N(N-1)}{4}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)^2}$$

$$\sigma_0 = \frac{3N}{(m+1)^2(m+3)^2 + 3(N-1)(2m+1)(2m+3)} \qquad \text{(III.16)}$$

Bulduğumuz σ_0 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	1	2	3	4
1	0,0469	0,0550	0,0584	0,0603
2	0,0133	0,0182	0,0300	0,0222
3	0,0052	0,0078	0,0094	0,0105
4	0,0025	0,0039	0,0050	0,0056

Tablo III.3: (III.5) fonksiyonu için (III.3) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

olarak bulunur. Buna göre σ_0 değeri, N'nin artan değerleri için artmaktadır. Bununla beraber m'nin etkisi de göz önüne alınırsa f_0'ın fonksiyona katkısı azalmaktadır. Ağırlık fonksiyonlarının değerleri 1'e ne kadar yakınsa, ele alınan fonksiyona olan etkisi o kadar iyi olmaktadır. Buna göre bir önceki ağırlık fonksiyonlarının tablo sonuçları ele alınırsa, $w = 1$ kullanılarak bulunan f_0'ın katkısının $w = \frac{3}{2}(1 - x_i)^2$ kullanılarak bulunan f_0'ın katkısına göre daha iyi olduğu görülmekle beraber $w = 3x_i^2$

kullanılarak bulunan f_0'ın fonksiyona katkısının en iyi olduğu kolaylıkla görülmektedir.

σ_1'i hesaplamak için önce

$$f_k(x_k) = x_k^m - \frac{3}{(m+1)(m+3)} \qquad 1 \le k \le N$$

olmak üzere $f_k(x_k)$ normunun karesini bulmalıyız.

$$\|f_k(x_k)\|^2 = I_0\left[\left(x_k^m - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)\right)^2\right]$$

$$\|f_k(x_k)\|^2 = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+3}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)^2\right]$$

$$\|f_k(x_k)\|^2 = \frac{3}{(2m+1)(2m+3)} - \frac{9}{(m+1)^2(m+3)^2}$$

ve $\|f\|^2$ değerleri ile daha önce bulunan değişmezlik ölçenini (II.15.b) formunda yerine yazdığımızda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır

$$\sigma_1 = \frac{\dfrac{9N^2 - 9N}{(m+1)^2(m+3)^2} + \dfrac{3N}{(2m+1)(2m+3)}}{\dfrac{3N}{(2m+1)(2m+3)} + \dfrac{9N(N-1)}{(m+1)^2(m+3)^2}} = 1 \qquad \text{(III.17)}$$

olarak bulunur. Bu σ_1'in beklenilen değeridir zira ele alınan fonksiyon tamamen toplamsaldır.

d) $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ olmak üzere [0,1] integral aralığında (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla (II.1) formu oluşturan tüm terimleri bulalım ve elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 2x_1 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 (N+1)x_N^N dx_N (\sum_{i=1}^{N} x_i^m)$$

$$f_0 = \int_0^1 2x_1^{m+1} dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 (N+1)x_N^N dx_N + \int_0^1 2x_1 dx_1 \int_0^1 3x_2^{m+2} dx_2 \ldots \int_0^1 (N+1)x_N^N dx_N +$$
$$\ldots + \int_0^1 2x_1 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 (N+1)x_N^{m+N} dx_N$$

$$f_0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{m+k+1} \tag{III.18}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = x_i^m - \frac{i+1}{m+i+1} \qquad 1 \le i \le N \tag{III.19}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak 0 olarak bulunmaktadır.

Üç terimliler için,

$$f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, \ldots, x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) -$$
$$- f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0$$

operatöründen faydalandığımızda ikililerin bulunmasına benzer işlemler sonucunda üçlüler de 0 olarak bulunmaktadır

Buna göre kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler “0” olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler (II.1) genel denkleminde yerine yazılırsa,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{m+k+1} + \left(x_1^m - \frac{2}{m+2} \right) + \left(x_2^m - \frac{3}{m+3} \right) + ... + \left(x_N^m - \frac{N}{m+N+1} \right) + 0 + ...$$

haline dönüşerek f fonksiyonu elde edilir. Dolayısıyla (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu durumda değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\|f_0\|^2 = \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{m+k+1} \right]^2 \qquad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{2m+k+1} + \left[\frac{2.3}{(m+2)(m+3)} + \frac{2.4}{(m+2)(m+4)} + ... + \frac{N(N+1)}{(N+m)(N+m+1)} \right]$$

olmak üzere σ_0,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k+1}{m+k+1} \right)^2}{\sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{2m+k+1} + 2\left[\frac{2.3}{(m+2)(m+3)} + ... + \frac{N(N+1)}{(N+m)(N+m+1)} \right]} \qquad \text{(III.20)}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_0 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	1	2	3	4
1	0,8890	0,4791	0,3264	0,2476
2	0,7501	0,4482	0,3168	0,2434
3	0,6403	0,4173	0,2438	0,2367
4	0,5562	0,3889	0,2412	0,2315

Tablo III.4: (III.5) fonksiyonu için (III.4) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

N'nin artan değerleri için σ_0 değerleri küçülmektedir. m arttıkça N'nin artan değerlerine karşılık σ_0 daha hızlı küçülmektedir. Bu da bize m ve N'nin artan değerlerine karşılık ağırlık fonksiyonun etkisinin kötüleştiğini göstermektedir. Çünkü teorik olarak beklenen, ağırlık fonksiyonunun ele alınan fonksiyona etkisinin iyi olması için tablo sonuçlarının 1 ya da 1'e yakın olmasıdır.

σ_1'i hesaplamak için önce

$$f_k(x_k) = x_k^m - \frac{k+1}{m+k+1} \qquad\qquad 1 \le k \le N$$

olmak üzere $f_k(x_k)$ normunun karesini bulmalıyız.

$$\|f_k\|^2 = \frac{k+1}{2m+k+1} - \left(\frac{k+1}{m+k+1}\right)^2$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{2m+k+1} + 2\left[\frac{2.3}{(m+2)(m+3)} + \frac{2.4}{(m+2)(m+4)} + \dots + \frac{N(N+1)}{(N+m)(N+m+1)}\right]$$

olmak üzere bulduğumuz değerleri ve değişmezlik ölçeninin değerlerini (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$\sigma_1 \equiv \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k+1}{m+k+1}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k+1}{2m+k+1} - \left(\frac{k+1}{m+k+1}\right)^2\right) + 2\prod_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1<k_2}}^{N} \frac{k_1+1}{m+k_1+1}\,\frac{k_2+1}{m+k_2+1}}{\sum_{k=1}^{N}\frac{k+1}{2m+k+1} + 2\prod_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1<k_2}}^{N} \frac{k_1+1}{m+k_1+1}\,\frac{k_2+1}{m+k_2+1}} = 1 \qquad \text{(III.21)}$$

olarak bulunur. Bu σ_1'in beklenilen değeridir zira ele alınan fonksiyon tamamen toplamsaldır ve beklenen de budur.

Elde edilen sonuçlarla $\sum_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna, başta belirtilen ağırlık fonksiyonlarının etkileri belli değerler için incelenmiştir. Buna göre [0,1] aralığında tepe noktası (0,0) olmak üzere artan yapıdaki $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna sabit $w_i(x_i) = 1$ ve [0,1] aralığında tepe noktası (0,0) olmak üzere artan yapıdaki $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonları ile bulunan f_0'ların katkısı olumludur. N ve m'nin artan değerleri için bu katkı daha da iyi hale gelmektedir. [0,1] aralığında tepe noktası sırasıyla (0,3/2) ve (0,0) olan $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ve $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonların katkısı olumsuzdur. Dolayısıyla $w_i(x_i) = 1$ ve $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonları artan değerlerle 1'e yaklaşan, $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ve $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonları azalan değerlerle 0'a yaklaşan bir etki bulunmaktadır. Bununla beraber $w_i(x_i) = 3x_i^2$, $w_i(x_i) = 1$'e göre, $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$'e göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmektedir.

İkinci olarak

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m \tag{III.22}$$

fonksiyonunu, [0,1] integral aralığında, bu bölümün başında verilen dört adet ağırlık fonksiyonu için inceleyelim.

a) $f(x_1, x_2, ..., x_N) = x_1^m x_2^m ... x_N^m$ fonksiyonun $1 \le i \le N$ integaral aralığında (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla (II.1) formuna uygun terimlerini bulalım. Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 ... \int_0^1 dx_1 dx_2 ... dx_N \left(\prod_{i=1}^{N} x_i^m\right)$$

$$f_0 = \int_0^1 x_1^m dx_1 \int_0^1 x_2^m dx_2 ... \int_0^1 x_N^m dx_N$$

$$f_0 = \left(\frac{1}{m+1} \right)^N \tag{III.23}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = \left(\frac{1}{m+1} \right)^{i-1} \left(x_i^m - \frac{1}{m+1} \right), \qquad 1 \le i \le N \tag{III.24}$$

Verilen fonksiyonun,

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = I_{i_1, i_2} f(x_1, x_2, ... x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0, \qquad 1 \le i_k, i_m \le N, \ \ k < m$$

operatörü yardımıyla iki terimlileri ifadeleri bulalım.

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \int_0^1 ... \int_0^1 f(x_1, x_2, ..., x_N) dx^{i_1 i_2} - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0$$

ifadesine bağlı yapılan işlemlere, ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olması ve bileşenlerin diklik koşuluna göre fonksiyonun ikilileri genel olarak aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \left[x_{i_1}^m x_{i_2}^m \left(\frac{1}{m+1} \right)^{N-2} \right] - \left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m \right) \left(\frac{1}{m+1} \right)^{N-1} + \left(\frac{1}{m+1} \right)^N \tag{III.25}$$

Fonksiyonun üç terimlileri için,

$$f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) -$$
$$- f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0$$

operatöründen faydalanalım. Üç terimlilerin bulunmasını sağlayan denklemde bilinmeyenler önceki işlemlerde elde edilmişti. O halde bu bilinmeyenlerin yerine yazılması, ağırlık fonksiyonlarının her birini ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 oluşu ve bileşenlerin diklik koşulu gereği fonksiyonun üç terimlileri genel olarak aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$
\begin{aligned}
f_{i_1,i_2,i_3} &= x_{i_1}^m x_{i_2}^m x_{i_3}^m \left(\frac{1}{m+1}\right)^{N-3} - \left(x_{i_1}^m x_{i_2}^m + x_{i_1}^m x_{i_3}^m + x_{i_2}^m x_{i_3}^m\right)\left(\frac{1}{m+1}\right)^{N-2} \\
&\quad + \left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m + x_{i_3}^m\right)\left(\frac{1}{m+1}\right)^{N-1} - \left(\frac{1}{m+1}\right)^{N}
\end{aligned}
\tag{III.26}
$$

Buna göre diğer terimleri genelleştirirsek,

$$
\begin{aligned}
f_{i_1,i_2,\dots,i_N} &= (-1)^{2N}\left(\frac{1}{m+1}\right)^{0}\left(x_{i_1}^m x_{i_2}^m \dots x_{i_N}^m\right) + \dots + (-1)^{N+1}\left(\frac{1}{m+1}\right)^{N-1}\left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m + \dots + x_{i_N}^m\right) \\
&\quad + (-1)^{N}\left(\frac{1}{m+1}\right)^{N}
\end{aligned}
\tag{III.27}
$$

elde edilir. Bulunan tüm bu terimler (II.1) genel ifadesinde yerine yazıldığında, (III.30) denklemine dönüşmektedir. Dolayısıyla (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir. Daha önce tanımlandığı üzere, fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$
\|f_0\|^2 = \left(\frac{1}{m+1}\right)^{2N}
\tag{III.28}
$$

$$
\|f\|^2 = \prod_{j=1}^{N} \int_0^1 x_j^{2m} dx_j = \left(\frac{1}{2m+1}\right)^{N}
\tag{III.29}
$$

olmak üzere (II.15.a) ifadesi gereği σ_0,

$$\sigma_0 = \frac{\left(\dfrac{1}{m+1}\right)^{2N}}{\left(\dfrac{1}{2m+1}\right)^{N}} = \left(\frac{2m+1}{(m+1)^2}\right)^{N} \tag{III.30}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_0 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	1	2	3	4
1	0,7500	0,5625	0,4198	0,3164
2	0,5555	0,3086	0,1754	0,0953
3	0,4375	0,1914	0,0837	0,0366
4	0,3600	0,1296	0,0501	0,0168

Tablo III.5: (III.22) fonksiyonu için (III.1) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

σ_0, m nin artan değerleri için azalmaktadır. N nin artan değerlerine karşılık, m nin etkisi de göz önüne alındığında σ_0, daha hızlı bir şekilde sıfıra yaklaşmaktadır. Bu da m ve N'nin artan değerleri için, $w_i\,(x_i) = 1$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan sabit fonksiyonun $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ yi temsil etmekten çok uzak olduğunu göstermektedir.

σ_1'i hesaplamak için (III.24) göz önüne almak üzere $f_{j_1}(x_{j_1})$'in normunun karesini bulmalıyız. Buna göre tek terimlilerin normu,

$$\left\|f_{j_1}(x_{j_1})\right\|^2 = \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{m+1}\right)^{N-1}\left(x_{j_1}^m - \frac{1}{m+1}\right)\right)^2 dx_{j_1}$$

$$\left\|f_{j_1}(x_{j_1})\right\|^2 = \left(\frac{1}{m+1}\right)^{2N-2}\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)$$

olarak bulunur. Bulduğumuz değerleri ve (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda σ_1 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_1 \equiv \left(\frac{2m+1}{(m+1)^2} \right)^N \left[1 + \frac{Nm^2}{(2m+1)} \right] \tag{III.31}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_1 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ **N**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,9402	0,8412	0,7383	0,6328
2	0,8012	0,5835	0,4001	0,2646
3	0,6823	0,4142	0,2251	0,1191
4	0,5904	0,2955	0,1362	0,0598

Tablo III.6: (III.22) fonksiyonu için (III.1) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i ler için σ_1 değerleri

N'nin artan değerleri için σ_1'in değeri azalmaktadır. m'nin artan değerleri de göz önüne alınırsa σ_1'in değeri daha da azalmaktadır.

σ_2'i hesaplamak için (III.25) ifadesini göz önüne almak üzere $f_{ij}(x_i, x_j)$'in normunun karesini bulmalıyız.

$$\left\| f_{i_1 i_2} \right\|^2 = I_0 \left[\left[\left(\frac{1}{m+1} \right)^{N-2} x_{i_1}^m x_{i_2}^m \right] - \left(\frac{1}{m+1} \right)^{N-1} \left[\left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m \right) - \frac{1}{m+1} \right] \right]^2$$

$$\left\| f_{ij}(x_i, x_j) \right\|^2 = \left(\frac{1}{m+1} \right)^{2N} \left(\frac{(m+1)^2}{2m+1} - 1 \right)^2$$

Bulduğumuz değerleri (2.15.c) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda σ_2 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_2 \equiv \left(\frac{2m+1}{(m+1)^2}\right)^N \left(1+\frac{Nm^2}{2m+1}+\frac{(N^2-N)m^4}{2(2m+1)^2}\right) \tag{III.32}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_2 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	3	4	5	6
1	0,9812	0,9492	0,8965	0,8305
2	0,9114	0,7662	0,6031	0,4528
3	0,8235	0,5878	0,3834	0,2345
4	0,7369	0,4548	0,2531	0,1299

Tablo III.7: (III.22) fonksiyonu için (III.1) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} ler için σ_2 değerleri

σ_2, N nin artan değerleri için azalmaktadır. Artan m değerleri için σ_2'nin değeri daha da azalmaktadır. Dolayısıyla $w=1$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij}'lerin fonksiyona katkının yetersiz olduğu gözlenmekedir.

b) $w_i(x_i)=3x_i^2,\ 1\le i\le N$ olmak üzere (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri genelleştirilmiş (II.9) operatörü ile bulalım ve elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 3x_1^2dx_1\int_0^1 3x_2^2dx_2...\int_0^1 3x_N^2dx_N f(x_1,x_2,...,x_N)$$

$$f_0 = \int_0^1 3x_1^{m+2}dx_1\int_0^1 3x_2^{m+2}dx_2...\int_0^1 3x_N^{m+2}dx_N$$

$$f_0 = \left(\frac{3}{m+3}\right)^N \tag{III.33}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = x_i^m \left(\frac{3}{m+3}\right)^{i-1} - \left(\frac{3}{m+3}\right)^{i}, \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(III.34)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak

$$f_{i_1,i_2} = x_{i_1}^m x_{i_2}^m \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-2} - \left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m\right)\left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-1} + \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N} \qquad \text{(III.35)}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

Üç terimliler için,

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) &= I_{i_1,i_2,i_3} f(x_1, x_2, \ldots, x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ &- f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0 \end{aligned}$$

operatöründen faydalanalım. İfadenin çözümü ile fonksiyonun üç terimlileri genel olarak aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$\begin{aligned} f_{i_1,i_2,i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) &= (x_{i_1}^m x_{i_2}^m x_{i_3}^m)\left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-3} - \left(x_{i_1}^m x_{i_2}^m + x_{i_1}^m x_{i_2}^m + x_{i_2}^m x_{i_3}^m\right)\left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-2} \\ &- \left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m + x_{i_3}^m\right)\left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-1} - \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N} \end{aligned} \qquad \text{(III.36)}$$

Kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler genel bir ifade ile

$$\begin{aligned} f_{i_1,i_2,\ldots,i_N} &= (-1)^{2N}\left(\frac{3}{m+3}\right)^{0} x_{i_1}^m x_{i_2}^m \ldots x_{i_N}^m + \ldots + (-1)^{N+1}\left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-1}\left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m + \ldots + x_{i_N}^m\right) \\ &+ (-1)^N \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan ifadeler (II.1) genel denkleminde yerine yazıldığında (II.1) denkleminin sağladığı açıkça görülmektedir. Daha önce yapılan tanımlar doğrultusunda fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0 'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\|f_0\|^2 = \left(\frac{3}{m+3}\right)^{2N} \tag{III.37}$$

$$\|f\|^2 = I_0\left(\prod_{j=1}^{N} x_j^{2m}\right) = \left(\frac{3}{2m+3}\right)^{N} \tag{III.38}$$

olmak üzere (II.15.a) gereği σ_0,

$$\sigma_0 = \frac{\left(\frac{3}{m+3}\right)^{2N}}{\left(\frac{3}{2m+3}\right)^{N}} = \left(\frac{3(2m+3)}{(m+3)^2}\right)^{N} \tag{III.39}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_0 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,9423	0,8821	0,8198	0,7781
2	0,8432	0,7122	0,5456	0,5072
3	0,7456	0,5635	0,4232	0,3175
4	0,6735	0,4535	0,3054	0,2057

Tablo III.8: (III.22) fonksiyonu için (III.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

σ_0, m nin artan değerleri için azalmaktadır. m arttıkça N'nin artan değerlerine karşılık σ_0'ın değeri azalmaktadır. Bu bize sabit terimin $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna katkısının azaldığını söylemektedir. Dolayısıyla

$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonunu ele aldığımızda, $w_i\,(x_i) = 1$ ağırlık fonksiyonunun kullanılarak bulunan f_0 'ın katkısının, $w_i\,(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 'ın katkısına göre az olduğu tablo sonuçlarına göre gözlenmektedir. Buna göre $w_i\,(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonun etkisi daha olumludur.

σ_1 'i hesaplamak için,

$$f_j(x_j) = \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-1} x_j^m - \left(\frac{3}{m+3}\right)^N$$

olmak üzere, $f_j(x_j)$ 'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\left\| f_j(x_j) \right\|^2 = \left(\frac{3}{m+3}\right)^{2N-2} \left(\frac{3}{2m+3} - \frac{9}{(m+3)^2}\right)$$

ve (II.15.b) denklemini kullanarak σ_1 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_1 \equiv \left(\frac{3(2m+3)}{(m+3)^2}\right)^N \left(1 + \frac{Nm^2}{3(2m+3)}\right) \qquad \text{(III.40)}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_1 ifadelerinin belli değerler için karşılıkları aşağıda gösterilmektedir.

m \ N	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,9961	0,9892	0,9785	0,9656
2	0,9742	0,9311	0,8773	0,8165
3	0,9384	0,8430	0,7383	0,6328
4	0,8935	0,7499	0,6047	0,4746

Tablo III.9: (III.22) fonksiyonu için (III.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i ler için σ_1 değerleri

σ_1, $N=1$ olarak alındığında m'nin tüm değerleri için 1 olarak bulunmaktadır. Bu zaten teorik olarak da beklenen bir sonuçtur. Yukarıdaki tabloda yapılan gözlem, m ve N arttıkça σ_1'in değeri azalmakta olduğudur. Ayrıca $w=1$ e göre daha iyi sonuçlar vermektedir.

σ_2'i hesaplamak için,

$$f_{i_1,i_2} = x_{i_1}^m x_{i_2}^m \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-2} - \left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m\right)\left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-1} + \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N}$$

olmak üzere, $f_{ij}(x_i x_j)$'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\left\|f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})\right\|^2 = I_0\left(x_{i_1}^m x_{i_2}^m \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-2} - \left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m\right)\left(\frac{3}{m+3}\right)^{N-1} + \left(\frac{3}{m+3}\right)^{N}\right)^2$$

$$\left\|f_{ij}(x_i, x_{j1})\right\|^2 = \frac{3^{2N-2}}{(m+3)^{2N}}\frac{1}{(2m+3)^2}\left[3(2m+3)(-2m^2-14m-21)+(m+3)^4\right]$$

ve (II.15.c) denklemini kullanarak σ_2 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_2 \equiv \left(\frac{3(2m+3)}{(m+3)^2}\right)^N \left(1+\frac{Nm^2}{3(2m+3)}+\frac{N(N-1)\left((6m+9)(-2m^2-14m-21)+(m+3)^4\right)}{18(2m+3)^2}\right) \quad \text{(III.41)}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_2 ifadelerinin belli değerler için karşılıkları aşağıda gösterilmektedir.

m \ N	3	4	5	6
1	0,9997	0,9987	0,9899	0,9835
2	0,9921	0,9862	0,9634	0,9127
3	0,9871	0,9714	0,9072	0,8903
4	0,9720	0,9532	0,8803	0,8620

Tablo III.10: (III.22) fonksiyonu için (III.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} ler için σ_2 değerleri

σ_2, teorik olarak da beklenildiği gibi, $N = 1$ ve $N = 2$ alındığında m'nin tüm değerlerine karşılık 1 olarak bulunmaktadır. N'nin artan değerlerine karşılık σ_2 değeri azalmaktadır. N'nin artan değerleri için m arttıkça bu azalma daha fazla olmaktadır. Ayrıca σ_2 tablo sonuçlarına göre $w_i(x_i) = 3x_i^2$ de $w_i(x_i) = 1$ e göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Sonuç olarak, $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonunun etkisi, $w_i(x_i) = 1$ ağırlık fonksiyonu etkisine göre çok daha iyidir.

c) Fonksiyonu $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu altında [0,1] integral aralığında inceleyelim. Verilere göre aşağıdaki (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri (II.9) genelleştirilmiş operatörü yardımıyla bulalım ve elde edilenler doğrultusunda bu formun sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_1^2)dx_1 \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_2^2)dx_2 ... \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_N^2)dx_N \left(\prod_{i=1}^{N} x_i^m\right)$$

$$f_0 = \int_0^1 \frac{3}{2}(x_1^m - x_1^{m+2})dx_1 \int_0^1 \frac{3}{2}(x_2^m - x_2^{m+2})dx_2 ... \int_0^1 \frac{3}{2}(x_N^m - x_N^{m+2})dx_N$$

$$f_0 = \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^N \qquad \text{(III.42)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz. $1 \le i \le N$ olmak üzere,

$$f_i(x_i) = \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^{N-1} \left(x_i^m - \frac{3}{(m+1)(m+3)}\right) \qquad \text{(III.43)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak

$$f_{i_1 i_2} = x_{i_1}^m x_{i_2}^m \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)} \right)^{N-2} - \left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m \right) \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)} \right)^{N-1} + \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)} \right)^{N} \qquad \text{(III.44)}$$

şeklinde ifade olmaktadır.

Uygun işlemler doğrultusunda diğer terimler genel bir ifade ile

$$f_{1,2,\ldots,j}(x_1, x_2 \ldots, x_j) = I_{1,2,\ldots,j} f - \begin{bmatrix} f_0 + \sum_{i=1}^{j} I_i f(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \langle i_2}}^{j} I_{i_1 i_2} f(x_{i_1}, x_{i_2}) + \\ \ldots + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{j-1} = 1}^{j} I_{i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}} f \end{bmatrix}, \qquad 1 \le j \le N$$

şeklinde gösterilebilmektedir. Bulunan ifadeler aşağıdaki genel denklemde yerine yazılırsa, (II.1) denkleminin sağladığı açıkça görülmektedir. Daha önce yapılan tanımlar doğrultusunda fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\|f_0\|^2 = \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)} \right)^{2N} \qquad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^N \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+3} \right)^N$$

olmak üzere değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\sigma_0 \equiv \frac{3^N (2m+1)^N (2m+3)^N}{(m+1)^{2N} (m+3)^{2N}} \qquad \text{(III.45)}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_0 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	1	2	3	4
1	0,7015	0,4946	0,3815	0,2444
2	0,4721	0,2214	0,1012	0,0474
3	0,3352	0,1135	0,0351	0,0116
4	0,2425	0,0588	0,0143	0,0035

Tablo III.11: (III.22) fonksiyonu için (III.3) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

σ_0, N'nin artan değerleri için azalma göstermektedir. m arttıkça $w = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'ın fonksiyonuna katkısı hızla azalma gösterir. Tablo sonuçlarına göre $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'ların katkısının, $w_i(x_i) = 1$ ve $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonlarına göre daha olumsuz olduğu açıktır.

σ_1'i hesaplamak için önce

$$f_k(x_k) = \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^{N-1} \left(x_k^m - \frac{3}{(m+1)(m+3)}\right) \qquad 1 \le k \le N \quad \text{(III.46)}$$

olmak üzere $f_k(x_k)$ normunun karesini bulmalıyız.

$$\left\|f_k(x_k)\right\|^2 = I_0\left[\left(\left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^{N-1} \left(x_k^m - \frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)\right)^2\right]$$

$$\left\|f_k(x_k)\right\|^2 = \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^{2N} \left(\frac{(m+1)^2(m+3)^2}{3(2m+1)(2m+3)} - 1\right)$$

ve $\|f\|^2$ değerleri ile daha önce bulunan değişmezlik ölçenini (II.15.b) formunda yerine yazdığımızda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$\sigma_1 \equiv \left(\frac{3(2m+1)(2m+3)}{(m+1)^2(m+3)^2}\right)^N \left[1-N+\frac{N(m+1)^2(m+3)^2}{3(2m+1)(2m+3)}\right] \qquad \text{(III.47)}$$

Bulduğumuz σ_1 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,9118	0,7879	0,6572	0,5345
2	0,7157	0,4502	0,2647	0,1484
3	0,6563	0,3051	0,1298	0,0522
4	0,4851	0,1693	0,0542	0,0172

Tablo III.12: (III.22) fonksiyonu için (III.3) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i ler için σ_1 değerleri

σ_1, N arttıkça azalmaktadır. Bununla beraber m'nin artan değerleri için N'nin artışının da etkisiyle bu azalma daha fazla görülmektedir. Bu bize $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i 'lerin $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna katkısının yetersiz olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca N'nin artan değerleri için $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonunun diğer ağırlık fonksiyonlarına göre de katkısı f_i ler açısından daha olumsuzdur.

İkinci basamaktan toplamsallık ölçeni σ_2'i hesaplamak için (III.44) ifadesini ele almak üzere, $f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2})$'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\left\|f_{i_1i_2}\right\|^2 = I_0\left[x_{i_1}^m x_{i_2}^m\left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^{N-2} - \left(x_{i_1}^m + x_{i_2}^m\right)\left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^{N-1} + \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^{N}\right]^2$$

$$\left\|f_{i_1,i_2}\right\|^2 = \left(\frac{3}{(m+1)(m+3)}\right)^{2N-4}\left(\frac{9}{(2m+1)^2(2m+3)^2}\right) \qquad \text{(III.48)}$$

Bulduğumuz değerler doğrultusunda (II.15.c) ifadesi gereği σ_2,

$$\sigma_2 \equiv \left(\frac{3(2m+1)(2m+3)}{(m+1)^2(m+3)^2}\right)^N \left[2-N+\frac{N(m+1)^2(m+3)^2}{3(2m+1)(2m+3)}+\frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{(m+1)^4(m+3)^4}{9(2m+1)^2(2m+3)^2}-\frac{2(m+1)^2(m+3)^2}{3(2m+1)(2m+3)}\right)\right] \qquad \text{(III.49)}$$

olarak bulunur.

Bulduğumuz σ_2 ifadelerinin belli değerler için karşılıkları aşağıda gösterilmektedir.

m \ N	3	4	5	6
1	0,9356	0,8967	0,7965	0,6535
2	0,8421	0,5662	0,3564	02317
3	0,7865	0,4955	0,3542	0,0803
4	0,4981	0,2693	0,0782	0,0562

Tablo III.13: (III.22) fonksiyonu için (III.3) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} ler için σ_2 değerleri

σ_0 ve σ_1'in durumuna benzer şekilde σ_2'de m ve N artıkça azalma göstermektedir. Ele alınan ağırlık fonksiyonları için değişmezlik ölçenlerinin gösterdiği durumları sonuç olarak şöyle ifade edebiliriz. σ_0, σ_1, σ_2 N'nin artan değerlerine göre azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. m nin artan değerlerine karşılık

N'ninde değeri arttıkça azalma hızlanmaktadır. Bununla beraber $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$, $w_i(x_i) = 1$ ve $w_i(x_i) = 3x_i^2$ 'ye göre katkısı daha azdır.

d) $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ $1 \le i \le N$ olmak üzere (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri genelleştirilmiş (II.9) operatörü ile bulalım ve elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 2x_1 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 (N+1)x_N^N dx_N f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

$$f_0 = \int_0^1 2x_1^{m+1} dx_1 \int_0^1 3x_2^{m+2} dx_2 \ldots \int_0^1 (N+1)x_N^{m+N} dx_N$$

$$f_0 = \frac{(n+1)!(m+1)!}{(m+n+1)!} \tag{III.50}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = \frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\left[\frac{(m+i+1)}{i+1}x_i^m - 1\right], \qquad 1 \le i \le N \tag{III.51}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2} = {} & \frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\frac{(m+i_1+1)(m+i_2+1)}{(i_1+1)(i_2+1)}x_{i_1}^m x_{i_2}^m - \frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\frac{(m+i_1+1)}{(i_1+1)}x_{i_1}^m - \\ & \frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\frac{(m+i_2+1)}{(i_2+1)}x_{i_2}^m + \frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!} \end{aligned} \tag{III.52}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Üç terimliler için,

$$f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, \ldots, x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ - f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0$$

operatöründen faydalanalım. İfadenin çözümü ile fonksiyonun üç terimlileri genel olarak aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = \frac{(m+1)!(N+1)!}{(m+N+1)!} \times \left[\begin{array}{l} \frac{(m+i_1+1)(m+i_2+1)(m+k+1)}{(i_1+1)(i_2+1)(k+1)} (x_{i_1}^m x_{i_2}^m x_k^m) - \frac{(m+i_1+1)(m+i_2+1)}{(i_1+1)(i_2+1)} x_{i_1}^m x_{i_2}^m \\ - \frac{(m+i_1+1)(m+i_3+1)}{(i_1+1)(i_3+1)} x_{i_1}^m x_{i_3}^m - \frac{(m+i_2+1)(m+i_3+1)}{(i_2+1)(i_3+1)} x_{i_2}^m x_{i_3}^m \\ - \frac{(m+i_1+1)}{m+i_1} x_{i_1}^m - \frac{(m+i_2+1)}{i_2+1} x_{i_2}^m - \frac{(m+i_3+1)}{i_3+1} x_{i_3}^m - 1 \end{array} \right] \quad \text{(III.53)}$$

Kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler genel bir ifade ile

$$f_{1,2,\ldots,j}(x_1, x_2 \ldots, x_j) = I_{1,2,\ldots,j} f - \left[\begin{array}{l} f_0 + \sum_{i=1}^{j} I_i f(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \langle i_2}}^{j} I_{i_1 i_2} f(x_{i_1}, x_{i_2}) + \\ \ldots + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{j-1} = 1}^{j} I_{i_1, i_2, \ldots, i_{j-1}} f \end{array} \right], \qquad 1 \leq j \leq N$$

olarak bulunur. Bulunan ifadeler aşağıdaki genel denklemde yerine yazılırsa, (II.1) denkleminin sağladığı açıkça görülmektedir. Daha önce yapılan tanımlar doğrultusunda fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\|f\|^2 = I_0\left(\prod_{j=1}^{N} x_j^{2m}\right) = \frac{(N+1)!(2m+1)!}{(2m+N+1)!} \quad \text{ve}$$

$$\left\|f_0\right\|^2=\left(\frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\right)^2$$

olmak üzere (II.15.a) ifadesi gereği değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0=\frac{\left(\frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\right)^2}{\frac{(N+1)!(2m+1)!}{(2m+N+1)!}}=(N+1)!\frac{(m+1)!^2\,(2m+N+1)!}{(m+N+1)!^2\,(2m+1)!} \qquad \text{(III.54)}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_0 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	1	2	3	4
1	0,8936	0,8323	0,8012	0,7778
2	0,7522	0,6323	0,5546	0,5143
3	0,6432	0,4854	0,3932	0,3367
4	0,5556	0,3742	0,2806	0,2251

Tablo III.14: (III.22) fonksiyonu için (III.4) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

Buna göre σ_0'ın değeri m'nin artan değerlerine karşılık N'nin de etkisi ile azalmaktadır. $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$ denklemine $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$'nin katkısı azalma yönündedir. Ancak $w_i(x_i)=(i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonunun katkısı $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre daha iyidir.

σ_1'i hesaplamak için,

$$f_j(x_j)=\frac{(m+1)!(N+1)!}{(m+N+1)!}\left[\frac{(m+j+1)}{(j+1)}x_j^m-1\right], \qquad 1\le j\le N$$

olmak üzere, $f_j(x_j)$ 'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\left\| f_j(x_j) \right\|^2 = \left(\frac{(m+1)!(N+1)!}{(m+N+1)!} \right)^2 \left(\frac{(m+j+1)^2}{(j+1)(2m+j+1)} - 1 \right)$$

ve (II.15.b) denklemini kullanarak σ_1 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_1 \equiv \left(\frac{(N+1)!(m+1)!^2\,(2m+N+1)!}{(m+N+1)!^2\,(2m+1)!} \right) \left((1-N) + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{(m+j+1)^2}{(j+1)(2m+j+1)} \right) \right) \quad \text{(III.55)}$$

olarak bulunur.

Bulduğumuz σ_1 ifadelerinin belli değerler için karşılıkları aşağıda gösterilmektedir.

m \ N	2	3	4	5
1	0,9901	0,9841	0,9730	0,9602
2	0,9632	0,8954	0,8814	0,8698
3	0,9110	0,8335	0,7691	0,7211
4	0,8549	0,7347	0,6450	0,5779

Tablo III.15: (III.22) fonksiyonu için (III.4) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i ler için σ_1 değerleri

σ_1, N'nin artan değerlerine karşılık azalma göstermektedir. Bununla beraber m arttıkça N'nin artan değerleri için, $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i lerin fonksiyona katkısı azalmaktadır. Ayrıca $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonunun katkısı, $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre katkısı çok daha iyidir.

σ_2 'i hesaplamak için,

$$f_{i_1i_2} = \frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\frac{(m+i_1+1)(m+i_2+1)}{(i_1+1)(i_2+1)}x_{i_1}^m x_{i_2}^m - \frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\frac{(m+i_1+1)}{(i_1+1)}x_{i_1}^m -$$
$$\frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}\frac{(m+i_2+1)}{(i_2+1)}x_{i_2}^m + \frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!}$$

olmak üzere, $f_{i_1i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\left\| f_{i_1i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \right\|^2 = \left(\frac{(N+1)!(m+1)!}{(m+N+1)!} \right)^2 \left(\frac{(m+i_1+1)^2(m+i_2+1)^2}{(i_1+1)(i_2+1)(2m+i_1+1)(2m+i_2+1)} + 1 \right)$$

ve (II.15.c) denklemini kullanarak σ_2 toplamsallık ölçeni (III.64) ile gösterilmek üzere,

$$\sigma_2 \equiv \frac{(N+1)!(m+1)!^2\,(2m+N+1)!}{(m+N+1)!^2\,(2m+1)!}\left(1 - N + \sum_{j=1}^{N}\frac{(m+j+1)^2}{(j+1)(2m+j+1)} + \sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{N}\left(1 + \frac{(m+i_1+1)^2(m+i_2+1)^2}{(i_1+1)(i_2+1)(2m+i_1+1)(2m+i_2+1)}\right)\right) \quad \text{(III.56)}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz σ_2 ifadesinin belli değerler için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	3	4	5	6
1	0,9991	0,9987	0,9887	0,9824
2	0,9813	0,9520	0,9342	0,9005
3	0,9716	0,9322	0,8903	0,8540
4	0,9511	0,8873	0,8106	0,7907

Tablo III.16: (III.22) fonksiyonu için (III.4) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} lar için σ_2 değerleri

σ_2, N'nin artan değerlerine karşılık azalma göstermektedir. m'nin etkisi de göz önüne alınınca bu azalma hızlanmakta ve f_{ij}'nin fonksiyona katkısı kötüye gitmektedir. Bununla berbaer $w_i(x_i)=(i+1)x_i^i$'nin fonksiyona katkısı etkisi $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$'e göre daha iyidir.

$f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonlarının etkileri belli değerler için incelenmiştir. Artan $w_i(x_i)=3x_i^2$ ağırlık fonksiyonunun [0,1] aralığında tepe noktası (0,0)dır. Bu ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerin, tepe noktası (0,0) ve artan yapıda olan $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$ fonksiyonuna katkısı olumludur. Ancak m ve N'nin artan değerleri için katkı yavaşlayan bir azalma göstermektedir. Azalan $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonunun [0,1] aralığında tepe noktası (0,3/2)dir. Bu ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerin, $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$ fonksiyonuna katkısı olumsuzdur ve m ile N'nin artan değerleri için katkı daha da azalmaktadır. Artan $w_i(x_i)=(i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonunun [0,1] aralığında tepe noktası (0,0)dır. Bu ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerin, $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$ fonksiyonuna katkısı olumludur. Ayrıca m ve N'nin artan değerleri için σ_k'ların değeri azalmaktadır. Burada dikkat çeken bir husus vardır. Artan yapıdaki ağırlık fonksiyonları ile bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerin fonksiyona katkısı olumlu, azalan yapıdaki ağırlık fonksiyonları ile bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerin fonksiyona katkısı olumsuz olmaktadır. Ağırlık fonksiyonları ile ele alınan fonksiyonun yapıları birbirine benzedikçe, başta verilen ağırlık fonksiyonları kullanılarak bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerinde katkısı çok olumlu sonuçlar vermektedir. Buna göre $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$ fonksiyonuna, sırasıyla $w_i(x_i)=3x_i^2$, $w_i(x_i)=(i+1)x_i^i$, $w_i(x_i)=1$ ve $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonlarının katkıları azalan bir etki göstermişlerdir. Bunların içinde $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ 'de en iyi katkı sağlayan $w_i(x_i) = 3x_i^2$ 'dir.

Üçüncü olarak

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i \qquad \text{(III.57)}$$

fonksiyonunu [0,1] integral aralığında, bu bölümün başında verilen dört adet ağırlık fonksiyonu için inceleyelim.

a) $w_i(x_i) = 1,\ 1 \le i \le N$ olmak üzere (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla (II.1) formunu terimlerini bulalım.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 ... \int_0^1 dx_1 dx_2 ... dx_N (\sum_{i=1}^{N} x_i^i)$$

$$f_0 = \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^1 dx_2 ... \int_0^1 dx_N + \int_0^1 ... \int_0^1 dx_1 ... dx_N (x_2^2 + ... + x_N^N)$$

$$f_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j+1} \qquad \text{(III.58)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_j(x_j) = x_j^j - \frac{1}{j+1}, \qquad 1 \le j \le N \qquad \text{(III.59)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olması ve bileşenlerin diklik koşuluna göre ikililer 0 olarak bulunur.

Üç terimliler için,

$$f_{i_1i_2i_3}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}) = I_{i_1,i_2,i_3} f(x_1,x_2,...,x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ - f_{i_1i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) - f_{i_1i_3}(x_{i_1},x_{i_3}) - f_{i_2i_3}(x_{i_2},x_{i_3}) - f_0$$

operatöründen faydalanalım. Denklemde bilinmeyenler önceki işlemlerde elde edilmişti. O halde bu bilinmeyenlerin yerine yazılması, ağırlık fonksiyonlarının her birini ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 oluşu ve bileşenlerin diklik koşulu gereği, fonksiyonun üçlüleri de 0 olarak bulunmaktadır. Dolayısıyla diğer terimlerde “0” olarak bulunur. Bulunan terimlilerin değerleri (II.1) de yani ifadesinde yerine yazıldığında,

$$f(x_1,x_2,...,x_N) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j+1} + \left(x_1^1 - \frac{1}{2}\right) + \left(x_2^2 - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(x_N^N - \frac{1}{N+1}\right) + 0 + ...$$

(III.75) denklemini sağladığı açıkça görülmektedir.

Bu durumda değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\|f_0\|^2 = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j+1}\right)^2 \quad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = I_0\left(\left(x_1 + x_2^2 + ... + x_N^N\right)^2\right)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1} + 2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{i+1} + \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{N}\frac{1}{i+1} + ... + \frac{1}{N-1}\sum_{i=N-1}^{N}\frac{1}{i+1} + \frac{1}{N}\frac{1}{N+1}\right)$$

olmak üzere σ_0,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i+1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2i+1}+2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{i+1}+\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{N}\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{N-1}\sum_{i=N-1}^{N}\frac{1}{i+1}+\frac{1}{N}\frac{1}{N+1}\right)} \qquad \text{(III.60)}$$

şeklinde ifade olur.

Bulduğumuz σ_0 ifadesinin N'nin bazı değerleri için karşılıkları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
0,7512	0,8032	0,8312	0,8623	0,8907

Tablo III.17: (III.57) fonksiyonu için (III.1) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

Ağırlık fonksiyonları etkisiyle artan N değerleri için, σ_0'lar 1'e yaklaşmaktadır.

σ_1'i hesaplamak için

$$f_j(x_j) = x_j^j - \frac{1}{j+1} \qquad 1 \le j \le N$$

olmak üzere $f_j(x_j)$'in normunun karesini bulmalıyız.

$$\left\|f_j(x_j)\right\|^2 = \int_0^1 \left(x_j^j - \frac{1}{j+1}\right)^2 dx_j = \frac{1}{2j+1} - \frac{1}{(j+1)^2}$$

Bulduğumuz değerleri (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda σ_1 değişmezlik ölçeni

$$\sigma_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{i+1}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{i+1}+\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{N}\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{N}\frac{1}{N+1}\right)+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2i+1}-\left(\frac{1}{i+1}\right)^2\right]}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2i+1}+2\left(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{i+1}+\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{N}\frac{1}{i+1}+\ldots+\frac{1}{N-1}\sum_{i=N-1}^{N}\frac{1}{i+1}+\frac{1}{N}\frac{1}{N+1}\right)} = 1 \qquad \text{(III.61)}$$

σ_1 N'nin tüm değerleri için 1 olmaktadır ki bu teorik olarak beklenen bir sonuçtur ve kontrol amacı ile sonuca gidilmiştir.

b) $w_i(x_i) = 3x_i^2$, $1 \le i \le N$ olmak üzere aşağıdaki (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla bularak elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 3x_1^2 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^2 dx_N \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^i\right)$$

$$f_0 = \int_0^1 3x_1^3 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^2 dx_N + \int_0^1 3x_1^2 dx_1 \int_0^1 3x_2^4 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^2 dx_N + \ldots + \int_0^1 3x_1^2 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^{N+2} dx_N$$

$$f_0 = 3\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+3} \qquad \text{(III.62)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = x_i^i - \frac{3}{i+3} \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(III.63)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak 0 olarak bulunmaktadır.

Üç terimliler için,

$$f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) -$$
$$- f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0$$

operatöründen faydalandığımızda ikililerin bulunmasına benzer işlemler sonucunda üçlüler de 0 olarak bulunmaktadır

Buna göre kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler "0" olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler (II.1) genel denkleminde yerine yazılırsa,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = 3\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+3} + \left(x_1 - \frac{3}{4} \right) + \left(x_2^2 - \frac{3}{5} \right) + ... + \left(x_N^N - \frac{3}{N+3} \right) + 0 + ..$$

(III.75) denklemine dönüşür. Dolayısıyla (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu durumda değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\| f_0 \|^2 = \left(3\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+3} \right)^2 \quad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = I_0\left(\left(x_1 + x_2^2 + ... + x_N^N \right)^2 \right)$$

$$\|f\|^2 = 3\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+3} + 18\left(\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i+3} + \frac{1}{5}\sum_{i=3}^{N} \frac{1}{i+3} + ... + \frac{1}{N+2}\frac{1}{N+3} \right)$$

olmak üzere

$$\sigma_0 \equiv \frac{9\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+3} \right)^2}{3\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+3} + 18\left(\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i+3} + \frac{1}{5}\sum_{i=3}^{N} \frac{1}{i+3} + ... + \frac{1}{N+2}\frac{1}{N+3} \right)} \qquad \text{(III.64)}$$

olarak bulunur. σ_0'ın N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

1	2	3	4	5
0,9381	0,9452	0,9481	0,9629	0,9784

Tablo III.18: (III.57) fonksiyonu için (III.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

Ağırlık fonksiyonları etkisiyle artan N değerleri için σ_0'lar 1'e yaklaşmaktadır. Bununla birlikte fonksiyon, $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 ların katkısı $w_i(x_i) = 1$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 ların katkısına göre daha iyi sonuçlar vermektedir.

σ_1'i hesaplamak için önce

$$f_j(x_j) = x_j^j - \frac{3}{j+3} \qquad 1 \le j \le N$$

olmak üzere $f_j(x_j)$ normunun karesini bulmalıyız.

$$\left\| f_j(x_j) \right\|^2 = I_0\left[\left(x_j^j - \frac{3}{m+3}\right)^2\right] = \frac{3}{2j+3} - \frac{9}{(j+3)^2}$$

ve

$$\left\| f \right\|^2 = 3\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+3} + 18\left(\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i+3} + \frac{1}{5}\sum_{i=3}^{N} \frac{1}{i+3} + \dots + \frac{1}{N+2}\frac{1}{N+3}\right)$$

olmak üzere bulduğumuz değerleri ve değişmezlik ölçeninin değerlerini (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$\sigma_1 \equiv \frac{9\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+3}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{3}{2i+3} - \frac{9}{(i+3)^2}}{3\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+3} + 18\left(\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i+3} + \frac{1}{5}\sum_{i=3}^{N} \frac{1}{i+3} + \dots + \frac{1}{N+2}\frac{1}{N+3}\right)} = 1 \qquad \text{(III.65)}$$

olarak elde edilmektedir. σ_1 N'nin tüm değerleri için 1 olmaktadır.

c) Fonksiyonu $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu altında inceleyelim.

Verilere göre (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri bularak elde edeceğimiz ifadelerle formun sağlandığını göreceğiz. Bunun için (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla (II.1) formunun terimlerini bulalım.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_1^2)dx_1 \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_2^2)dx_2 ... \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_N^2)dx_N (\sum_{i=1}^{N} x_i^i)$$

$$f_0 = \int_0^1 \frac{3}{2}(x_1 - x_1^3)dx_1 \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_2^2)dx_2 ... \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_N^2)dx_N +$$
$$\int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_1^2)dx_1 \int_0^1 \frac{3}{2}(x_2^2 - x_2^4)dx_2 ... \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_N^2)dx_N + ... +$$
$$\int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_1^2)dx_1 \int_0^1 \frac{3}{2}(1 - x_2^2)dx_2 ... \int_0^1 \frac{3}{2}(x_N^N - x_N^{N+2})dx_N$$

$$f_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right) \qquad \text{(III.66)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = x_i^i - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+3}\right) \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(III.67)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak 0 olarak bulunmaktadır.

Üç terimliler için,

$$f_{i_1i_2i_3}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3}) = I_{i_1,i_2,i_3} f(x_1,x_2,...,x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ - f_{i_1i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) - f_{i_1i_3}(x_{i_1},x_{i_3}) - f_{i_2i_3}(x_{i_2},x_{i_3}) - f_0$$

operatöründen faydalandığımızda ikililerin bulunmasına benzer işlemler sonucunda üçlüler de 0 olarak bulunmaktadır

Buna göre kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler "0" olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler (II.1) genel denklemde yerine yazılırsa,

$$f(x_1,x_2,...,x_N) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right)+\left[x_1^m-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]+ \\ \left[x_2^2-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]+...+\left[x_N^N-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+3}\right)\right]+0+..$$

(III.75) denklemine dönüşür. Dolayısıyla (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu durumda değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\|f_0\|^2 = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right)\right]^2 \qquad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{2j+3}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\sum_{j=3}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+ \\ 3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\sum_{j=4}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+...+3\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+3}\right)$$

olmak üzere σ_0,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right)\right]^2}{\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{2j+3}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\sum_{j=3}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+ 3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\sum_{j=4}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+\ldots+3\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+3}\right)} \tag{III.68}$$

olarak bulunur. σ_0 ’ın N’nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
0,7031	0,7588	0,7814	0,7993	0,8013

Tablo III.19: (III.57) fonksiyonu için (III.3) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

Ağırlık fonksiyonları etkisiyle N’nin artan değerleri için σ_0 ’lar 1’e yaklaşmaktadır. Artan N değerleri için, $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 ların fonksiyona katkısı, $w_i(x_i) = 1$ ve $w_i(x_i) = 3x_i^2$ kullanılarak bulunan f_0 ların katkısından daha azdır.

σ_1 'i hesaplamak için önce

$$f_k(x_k) = x_k^k - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) \qquad 1 \le k \le N$$

olmak üzere $f_k(x_k)$ normunun karesini bulmalıyız.

$$\|f_k(x_k)\|^2 = I_0\left[\left(x_k^m - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\right)^2\right]$$

$$\|f_k(x_k)\|^2 = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)-\frac{9}{4}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)^2\right]$$

$$\|f\|^2=\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{2j+3}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\sum_{j=3}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+$$
$$3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\sum_{j=4}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+\ldots+3\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+3}\right)$$

Bulduğumuz değerleri ve değişmezlik ölçeninin değerlerini (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$\sigma_1\equiv\frac{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right)\right]^2+\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)-\frac{9}{4}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)^2\right]}{\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2j+1}-\frac{1}{2j+3}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sum_{j=2}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\sum_{j=3}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\sum_{j=4}^{N}\left(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j+3}\right)+\ldots+3\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+3}\right)}=1 \quad \text{(III.69)}$$

olarak elde edilmektedir. σ_1 N'nin tüm değerleri için beklenildiği gibi 1 olmaktadır.

d) Fonksiyonu $w_i(x_i)=(i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonu altında inceleyelim. Verilere göre (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri bularak elde edeceğimiz ifadelerle formun sağlandığını göreceğiz. Bunun için (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla (II.1) formunun terimlerini bulalım.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0=\int_0^1 2x_1dx_1\int_0^1 3x_2^2dx_2\ldots\int_0^1 (N+1)x_N^N dx_N\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^i\right)$$

$$f_0=\int_0^1 2x_1^2dx_1\int_0^1 3x_2^2dx_2\ldots\int_0^1 (N+1)x_N^N dx_N+\int_0^1 2x_1dx_1\int_0^1 3x_2^4dx_2\ldots\int_0^1 (N+1)x_N^N dx_N+$$
$$\ldots+\int_0^1 2x_1dx_1\int_0^1 3x_2^2dx_2\ldots\int_0^1 (N+1)x_N^{2N} dx_N$$

$$f_0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{2k+1} \tag{III.70}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = x_i^i - \frac{i+1}{2i+1} \qquad 1 \le i \le N \tag{III.71}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak 0 olarak bulunmaktadır.

Üç terimliler için,

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) &= I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ &- f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0 \end{aligned}$$

operatöründen faydalandığımızda ikililerin bulunmasına benzer işlemler sonucunda üçlüler de 0 olarak bulunmaktadır

Buna göre kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler "0" olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler (II.1) genel denkleminde yerine yazılırsa,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{2k+1} + \left(x_1 - \frac{2}{3}\right) + \left(x_2^2 - \frac{3}{5}\right) + ... + \left(x_N^N - \frac{N+1}{2N+1}\right) + 0 + ...$$

(III.75) denkelmine dönüşür. Dolayısıyla (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir.

Bu durumda değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{3k+1} + 2\left[\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{N} \frac{k+1}{2k+1} + \frac{3}{5}\sum_{k=3}^{N} \frac{k+1}{2k+1} + ... + \frac{N}{2N-1}\frac{N+1}{2N+1}\right]$$

değeri de göz önüne alınarak σ_0,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{2k+1}\right)^2}{\sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{3k+1} + 2\left[\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{N} \frac{k+1}{2k+1} + \frac{3}{5}\sum_{k=3}^{N} \frac{k+1}{2k+1} + \ldots + \frac{N}{2N-1}\frac{N+1}{2N+1}\right]} \qquad \text{(III.72)}$$

olarak bulunur.

σ_0 'ın N nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

1	2	3	4	5
0,8912	0,9323	0,9354	0,9479	0,9706

Tablo III.20: (III.57) fonksiyonu için (III.4) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

σ_0, N'nin artan değerleri için artmaktadır. Dolayısyla $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 ların fonksiyona katkısı olumlu yöndedir.

σ_1'i hesaplamak için önce

$$f_k(x_k) = x_k^k - \frac{k+1}{2k+1} \qquad 1 \le k \le N$$

olmak üzere $f_k(x_k)$ normunun karesini bulmalıyız. Buna göre

$$\|f_k\|^2 = \frac{k+1}{3k+1} - \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^2 \quad \text{ve}$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{k+1}{3k+1} + 2\left[\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{N} \frac{k+1}{2k+1} + \frac{3}{5}\sum_{k=3}^{N} \frac{k+1}{2k+1} + \ldots + \frac{N}{2N-1}\frac{N+1}{2N+1}\right]$$

olmak üzere bulduğumuz değerleri ve değişmezlik ölçeninin değerlerini (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$\sigma_1 \equiv \frac{\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{k+1}{2k+1}\right)^2+\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k+1}{3k+1}-\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^2\right]}{\sum_{k=1}^{N}\frac{k+1}{3k+1}+2\left[\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{N}\frac{k+1}{2k+1}+\frac{3}{5}\sum_{k=3}^{N}\frac{k+1}{2k+1}+\ldots+\frac{N}{2N-1}\frac{N+1}{2N+1}\right]}=1 \qquad \text{(III.73)}$$

olarak bulunur. σ_1 N'nin tüm değerleri için 1 olmaktadır. Toplamsal $f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonunun [0,1] aralığında tepe noktası (0,0)'dır ve artan yapıdadır. Bu fonksiyona en iyi katkı tepe noktası (0,0) ve artan yapıda olan $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'lardan gelmektedir daha sonra sırasıyla tepe noktası (0,0) olan $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$, sabit fonksiyon olan $w_i(x_i) = 1$ ve tepe noktası (0,3/2) olan $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonları da olumlu etkilere vesile olmaktadır. Burada en kötü sonuçların $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonundan gelmesi onun azalan fonksiyon olması hasebiyle doğal karşılanmaktadır. Zira daha önce de benzer yorumlara ulaşmıştık. Ele alınan fonksiyon ile ağırlık fonksiyonunun tepe noktası ve artan-azalan olma bakımından benzer olması, bu ağırlık fonksiyonları kullanılarak bulunan f_0'ların fonksiyona katkısının gayet olumlu sonuçlar vermesine sebep olmaktadır. σ_0'lar 1'e yaklaşmaktadır. Sonuç olarak tüm ağırlık fonksiyonlarının $f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonuna etkisi belli değerler için tablo sonuçları ile gözlenmektedir. Buna göre $N = 1$ için fonksiyona en iyi etkiyi $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu vermiştir. Bununla beraber $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$, $w_i(x_i) = 1$ ve $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonları da sırasıyla iyi bir sonuca yaklaşmaktadır. Ayrıca N'nin büyük değerleri için $w_i(x_i) = 3x_i^2$, $w_i(x_i) = \frac{3}{2}\left(1 - x_i^2\right)$ ve $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ birbirine yakın değerlerle iyi sonuçlar vererek, teorik üst sınır olan 1 değerine epeyce yaklaşmışlardır.

Dördüncü olarak

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i \qquad \text{(III.74)}$$

fonksiyonunu [0,1] integral aralığında, bu bölümün başında verilen dört adet ağırlık fonksiyonu için inceleyelim.

a) $w_i(x_i) = 1$ olmak üzere [0,1] integral aralığında (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla (II.1) formu oluşturan tüm terimleri bulalım ve elde edilenlerle (II.1) formunun sağlandığını görelim. Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 ... \int_0^1 dx_1 dx_2 ... dx_N \left(\prod_{i=1}^{N} x_i^i\right)$$

$$f_0 = \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^1 x_2^2 dx_2 ... \int_0^1 x_N^N dx_N$$

$$f_0 = \frac{1}{(N+1)!} \qquad \text{(III.75)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = \frac{1}{(N+1)!}\left((i+1)x_i^i - 1\right), \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(III.76)}$$

Verilen fonksiyonun,

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = I_{i_1, i_2} f(x_1, x_2, ... x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0 \qquad 1 \le i_k, i_m \le N, \;\; k < m$$

operatörü yardımıyla iki terimlileri ifadeleri bulalım.

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2, \ldots, x_N) dx^{i_1 i_2} - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0$$

ifadesine bağlı yapılan işlemlere, ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olması ve bileşenlerin diklik koşuluna göre fonksiyonun ikilileri genel olarak aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \frac{1}{(N+1)!}\left[\left((i_1+1)(i_2+1)x_{i_1}^m x_{i_2}^m\right) - \left((i_1+1)x_{i_1}^m\right) - \left((i_2+1)x_{i_2}^m\right) + 1\right]$$

Fonksiyonun üç terimlileri için,

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, \ldots, x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ - f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0 \end{aligned}$$

operatöründen faydalanalım. Üç terimlilerin bulunmasını sağlayan denklemde bilinmeyenler önceki işlemlerde elde edilmişti. O halde bu bilinmeyenlerin yerine yazılması, ağırlık fonksiyonlarının her birini ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 oluşu ve bileşenlerin diklik koşulu gereği fonksiyonun üç terimlileri genel olarak aşağıdaki şekilde ifade olmaktadır.

$$f_{i_1, i_2, i_3} = \frac{1}{(N+1)!}\begin{bmatrix} \left((i_1+1)(i_2+1)(i_3+1)x_{i_1}^{i_1} x_{i_2}^{i_2} x_{i_3}^{i_3}\right) - \left((i_1+1)(i_2+1)x_{i_1}^{i_1} x_{i_2}^{i_2}\right) - \left((i_1+1)(i_3+1)x_{i_1}^{i_1} x_{i_3}^{i_3}\right) \\ + \left((i_2+1)(i_3+1)x_{i_2}^{i_2} x_{i_3}^{i_3}\right) + \left(2(i_1+1)x_{i_1}^{i_1}\right) + \left(2(i_2+1)x_{i_2}^{i_2}\right) + \left(2(i_3+1)x_{i_3}^{i_3}\right) - 4 \end{bmatrix} \quad \text{(III.77)}$$

Buna göre diğer terimlerde benzer operatörler yardımıyla elde edilmektedir. Bulunan tüm bu terimler (II.1) genel denkleminde yerine yazıldığında,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = x_1 x_2^2 \ldots x_N^N$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla (II.1) denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir. Daha önce tanımlandığı üzere, fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\|f\|^2 = I_0 f(x_1, x_2, ..., x_N)^2$$

$$\|f\|^2 = \prod_{j=1}^{N} \int_0^1 x_j^{2j} dx_j = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1} \quad \text{ve}$$

$$\|f_0\|^2 = \left(\frac{1}{(N+1)!}\right)^2$$

olmak üzere (II.15.a) ifadesi gereği σ_0,

$$\sigma_0 = \frac{\left(\frac{1}{(N+1)!}\right)^2}{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1}} \qquad \text{(III.78)}$$

olarak bulunur. σ_0'ın N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

1	2	3	4	5
0,7526	0,4203	0,1801	0,0656	0,0128

Tablo III.21: (III.74) fonksiyonu için (III.1) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

σ_0 N'nin artan değerleri için azalmaktadır. Bu da bize $w = 1$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'ın fonksiyona katkısının yetersiz olduğunu gösterir.

σ_1'i hesaplamak için

$$f_k(x_k) = \frac{1}{(N+1)!}\left((j+1)x_k^k - 1\right), \qquad 1 \le k \le N$$

olmak üzere $f_k(x_k)$'in normunun karesini bulmalıyız.

$$\|f_k(x_k)\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{(N+1)!} \left((j+1)x_k^k - 1 \right) \right)^2 dx_k$$

$$\|f_k(x_k)\|^2 = \frac{1}{(N+1)!} \int_0^1 \left((k+1)^2 x_k^{2k} - 2(k+1)x_k^k + 1 \right) dx_k = \left[\frac{1}{(N+1)!} \right]^2 \left[\frac{(j+1)^2}{2j+1} - 1 \right]$$

Bulduğumuz değerleri ve (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda σ_1 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_1 = \frac{\dfrac{1}{(N+1)!^2} \left[1 + \sum_{j=1}^{N} \dfrac{j^2}{2j+1} \right]}{\prod_{j=1}^{N} \dfrac{1}{2j+1}} \tag{III.79}$$

olarak bulunur. σ_1 'ın N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

2	**3**	**4**	**5**	**6**
0,8921	0,6232	0,3403	0,1496	0,0544

Tablo III.22: (III.74) fonksiyonu için (III.1) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i ler için σ_1 değerleri

$N = 1$ için σ_1 1 olarak bulunmaktadır ki bu beklenen bir sonuçtur. $w = 1$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i lerin fonksiyona katkısı yetersizdir.

σ_2 'i hesaplamak için

$$f_{i_1,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \frac{1}{(N+1)!} \left[\left((i_1+1)(i_2+1) x_{i_1}^m x_{i_2}^m \right) - \left((i_1+1) x_{i_1}^m \right) - \left((i_2+1) x_{i_2}^m \right) + 1 \right]$$

olmak üzere $f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ 'in normunun karesini bulmalıyız.

$$\|f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})\|^2 = \frac{1}{(N+1)!^2} \left[\frac{(i_1+1)^2 (i_2+1)^2}{(2i_1+1)(2i_2+1)} - \frac{(i_1+1)^2}{2i_1+1} - \frac{(i_2+1)^2}{2i_2+1} + 1 \right]$$

Bulduğumuz değerleri (II.15.c) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda σ_2 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_2 \equiv \frac{\left(\frac{1}{(N+1)!}\right)^2 \left\{1+\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{j^2}{2j+1}\right]+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N}\left[\frac{(i+1)^2(j+1)^2}{(2i+1)(2j+1)}-\frac{(i+1)^2}{2i+1}-\frac{(j+1)^2}{2j+1}+1\right]\right\}}{\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{2j+1}} \quad \text{(III.80)}$$

olarak bulunur. σ_2 'ın N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

3	**4**	**5**	**6**
0,9402	0,7358	0,4621	0,2504

Tablo III.23: (III.74) fonksiyonu için (III.1) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} ler için σ_2 değerleri

$N=1$ ve $N=2$ için σ_2 1 olarak bulunmaktadır. Bu teorik olarak da beklenen bir sonuçtur. Bununla beraber N'nin artan değerleri için σ_2 'nin değeri azalmaktadır.

b) $w_i(x_i)=3x_i^2$ olmak üzere [0,1] integral aralığında (II.1) formu oluşturan tüm terimleri (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla bulalım ve elde edilenlerle (II.1) formunun sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 3x_1^2 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^2 dx_N f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

$$f_0 = \int_0^1 3x_1^3 dx_1 \int_0^1 3x_2^4 dx_2 \ldots \int_0^1 3x_N^{N+2} dx_N$$

$$f_0 = \frac{2.3^{N+1}}{(N+3)!} \quad \text{(III.81)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = \frac{2.3^N}{(N+3)!}\left[(i+3)x_i^i - 3\right], \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(III.82)}$$

Fonksiyonun ikililerini bulmak için aşağıdaki ifadeyi ele alalım.

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = I_{i_1, i_2} f(x_1, x_2, \ldots x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0, \qquad (1 \le i_k, i_m \le N,\ \ k < m)$$

önceden elde ettiğimiz değerler dahilinde yukarıdaki ifadenin çözümü ile fonksiyonun ikilileri,

$$f_{i_1 i_2} = \frac{2.3^{N-1}(i_1+3)(i_2+3)x_{i_1}^{i_1} x_{i_2}^{i_2} - 2.3^N\left[(i_1+3)x_{i_1}^{i_1} + (i_2+3)x_{i_2}^{i_2}\right] + 2.3^{N+1}}{(N+3)!}$$

şeklinde genel olarak ifade edilmektedir.

Diğer terimlerde benzer operatörler yardımıyla bulunmaktadır. Buna göre bulunan ifadeler yerine yazıldığında (II.1) genel denkleminin sağlandığı açıkça görülmektedir. Daha önce yapılan tanımlar doğrultusunda fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\|f\|^2 = I_0 f(x_1, x_2, \ldots, x_N)^2$$

$$\|f\|^2 = I_0\left(\prod_{j=1}^{N} x_j^{2j}\right) = \prod_{j=1}^{N} \frac{3}{2j+3} \quad \text{ve}$$

$$\|f_0\|^2 = \frac{4.3^{2N+2}}{(N+3)!^2}$$

olmak üzere (II.15.a) ifadesi gereği değişmezlik ölçeni

$$\sigma_0 = \frac{\dfrac{4.3^{2N+2}}{(N+3)!^2}}{\prod_{j=1}^{N} \dfrac{3}{2j+3}} \qquad \text{(III.83)}$$

olarak bulunur. σ_0 'ın N nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
0,9445	0,7932	0,5921	0,3978	0,2424

Tablo III.24: (III.74) fonksiyonu için (III.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

σ_0, N'nin artan değerleri için azalmaktadır. Ancak $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'ın fonksiyona katkısının $w_i(x_i) = 1$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'ın fonksiyona olan katkısına göre daha iyi olduğu kolayca görülmeketdir. Zira σ_0'ın değeri $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu etkisi 1'e daha yakındır.

σ_1 'i hesaplamak için,

$$f_j(x_j) = \frac{2.3^N}{(N+3)!}\left[(j+3)x_j^j - 3\right], \qquad 1 \le j \le N$$

olmak üzere, $f_j(x_j)$ 'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\|f_j(x_j)\|^2 = I_0\left(\frac{2.3^N}{(N+3)!}\left[(j+3)x_j^j - 3\right]\right)^2$$

$$\|f_j(x_j)\|^2 = \frac{4.3^{2N}}{(N+3)!^2}\left(\frac{3(j+3)^2}{2j+3} - 9\right)$$

ve (II.15.b) denklemini kullanarak σ_1 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_1 \equiv \frac{\dfrac{4.3^{2N+2}}{(N+3)!^2} + \sum_{j=1}^{N}\left[\dfrac{4.3^{2N}}{(N+3)!^2}\left(\dfrac{3(j+3)^2}{2j+3} - 9\right)\right]}{\prod_{j=1}^{N}\dfrac{3}{2j+3}} = \frac{\dfrac{4.3^{2N}}{(N+3)!^2}\left(9 + \sum_{j=1}^{N}\dfrac{3j^2}{2j+3}\right)}{\prod_{j=1}^{N}\dfrac{3}{2j+3}} \qquad \text{(III.84)}$$

olarak bulunur. σ_1 'ın N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

2	**3**	**4**	**5**	**6**
0,9821	0,9441	0,8253	0,6582	0,4325

Tablo III.25: (III.74) fonksiyonu için (III.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i ler için σ_1 değerleri

$N = 1$ için σ_1, teorik olarak da beklenildiği gibi 1'dir. Bununla beraber N'nin artan değerleri için σ_1'in değeri azalmaktadır. Fonksiyona $w_i(x_i) = 3x_i^2$'nin etkisi $w_i(x_i) = 1$'e göre daha olumlu gözükmektedir.

σ_2 'i hesaplamak için,

$$f_{i_1 i_2} = \frac{2.3^{N-1}(i_1+3)(i_2+3)x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2} - 2.3^{N}\left[(i_1+3)x_{i_1}^{i_1} + (i_2+3)x_{i_2}^{i_2}\right] + 2.3^{N+1}}{(N+3)!} \qquad \text{(III.85)}$$

olmak üzere, $f_{i_1 i_2}(x_{i_1} x_{i_2})$ 'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\left\| f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \right\|^2 = I_0\left(\frac{2.3^{N-1}(i_1+3)(i_2+3)x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2} - 2.3^{N}\left[(i_1+3)x_{i_1}^{i_1} + (i_2+3)x_{i_2}^{i_2}\right] + 2.3^{N+1}}{(N+3)!}\right)^2$$

$$\left\| f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \right\|^2 = \frac{4.3^{2N}}{(N+3)!^2}\left[\frac{(i_1+3)^2(i_2+3)^2}{(2i_1+3)(2i_2+3)} - \frac{12(i_1+3)^2}{2i_1+3} - \frac{12(i_2+3)^2}{2i_2+3} + 36\right]$$

ve (II.15.c) denklemini kullanarak σ_2 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_2 \equiv \frac{\frac{4.3^{2N}}{(N+3)!^2}\left(9+\sum_{j=1}^{N}\frac{3j^2}{2j+3}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N}\left[\frac{(i+3)^2(j+3)^2}{(2i+3)(2j+3)}-\frac{12(i+3)^2}{2i+3}-\frac{12(j+3)^2}{2j+3}+36\right]\right)}{\prod_{j=1}^{N}\frac{3}{2j+3}} \quad \text{(III.86)}$$

olarak bulunur. σ_2'nin N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

3	4	5	6
0,9621	0,9004	0,8403	0,7621

Tablo III.26: (III.74) fonksiyonu için (III.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} ler için σ_2 değerleri

σ_2, $N=1$ ve $N=2$ için 1'dir. Bu beklenen bir sonuç olmakla beraber N'nin artan değerleri için de σ_2'nin azalmaktadır. Daha önce belirtildiği gibi $w_i(x_i)=3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} lerin fonksiyona katkısı $w_i(x_i)=1$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} lerin fonksiyona katkısına göre çok daha iyi sonuçlar vermektedir.

c) Fonksiyonu $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonu altında inceleyelim. Verilere göre (II.1) genel formunu oluşturan tüm terimleri (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla bulalım ve elde edilenler doğrultusunda (II.1) formunu sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0=\int_0^1\frac{3}{2}(1-x_1^2)dx_1\int_0^1\frac{3}{2}(1-x_2^2)dx_2\ldots\int_0^1\frac{3}{2}(1-x_N^2)dx_N\left(\prod_{i=1}^{N}x_i^i\right)$$

$$f_0=\int_0^1\frac{3}{2}(x_1-x_1^3)dx_1\int_0^1\frac{3}{2}(x_2^2-x_2^4)dx_2\ldots\int_0^1\frac{3}{2}(x_N^N-x_N^{N+2})dx_N$$

$$f_0 = \frac{6.3^N}{(N+1)!(N+3)!} \tag{III.87}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_j(x_j) = \frac{3^N}{(N+1)!(N+3)!}\left(2(j+1)(j+3)x_j^j - 6\right) \qquad 1 \le j \le N \tag{III.88}$$

İki terimliler,

$$f_{ij}(x_i, x_j) = I_{i,j} f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_i(x_i) - f_j(x_j) - f_0 \qquad (1 \le i, j \le N, \; i < j)$$

operatörü yardımıyla, önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak

$$f_{i_1 i_2} = \frac{2.3^{N-1}}{(N+1)!(N+3)!}\left[(i_1+1)(i_1+3)(i_2+1)(i_2+3)x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2} - 3(i_1+1)(i_1+3)x_{i_1}^{i_1} - 3(i_2+1)(i_2+3)x_{i_2}^{i_2} + 9\right] \tag{III.89}$$

şeklinde ifade olmaktadır.

Uygun işlemler doğrultusunda diğer terimler genel bir ifade ile

$$f_{1,2,...,j}(x_1, x_2 ..., x_j) = I_{1,2,...,j} f - \begin{bmatrix} f_0 + \sum_{i=1}^{j} I_i f(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \langle i_2}}^{j} I_{i_1 i_2} f(x_{i_1}, x_{i_2}) + \\ ... + \sum_{i_1, i_2, ..., i_{j-1}=1}^{j} I_{i_1, i_2, ..., i_{j-1}} f \end{bmatrix}, \qquad 1 \le j \le N$$

şeklinde gösterilebilmektedir. Bulunan ifadeler aşağıdaki genel denklemde yerine yazılırsa, (II.1) denkleminin sağladığı açıkça görülmektedir. Daha önce yapılan tanımlar doğrultusunda fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\|f_0\|^2 = \frac{6.3^{2N}}{(N+1)!^2\,(N+3)!^2} \text{ ve}$$

$$\|f\|^2 = I_0 f(x_1, x_2, ..., x_N)^2$$

$$\|f\|^2 = 3^N \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$$

olmak üzere (II.15.a) ifadesini gereği σ_0,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\dfrac{6.3^N}{(N+1)!^2\,(N+3)!^2}}{\prod_{i=1}^{N} \dfrac{1}{(2i+1)(2i+3)}} = \frac{6.3^N \prod_{i=1}^{N}(2i+1)(2i+3)}{(N+1)!^2\,(N+3)!^2} \qquad \text{(III.90)}$$

olarak bulunur. σ_0'ın N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

1	2	3	4	5
0,1172	0,0547	0,0201	0,0174	0,0035

Tablo III.27: (III.74) fonksiyonu için (III.3) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

N'nin artan değerlerine karşılık σ_0'ın değeri azalmaktadır. $w = 1$ ve $w = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonlarına göre f_0'ın fonksiyona katkısı hayli kötüdür.

σ_1'i hesaplamak için önce

$$f_j(x_j) = \frac{3^N}{(N+1)!(N+3)!}\left(2(j+1)(j+3)x_j^j - 6\right) \qquad 1 \le j \le N$$

olmak üzere $f_j(x_j)$ normunun karesini bulmalıyız.

$$\|f_j(x_j)\|^2 = I_0\left[\left(\frac{3^N}{(N+1)!(N+3)!}\left(2(j+1)(j+3)x_j^j - 6\right)\right)^2\right]$$

$$\left\|f_j(x_j)\right\|^2 = \frac{2.3^{2N+1}}{(N+1)!^2\,(N+3)!^2}\left[\frac{(j+1)^2(j+3)^2}{(2j+1)(2j+3)}+2\right]$$

ve

$$\left\|f\right\|^2 = 3^N\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$$

olmak üzere bulduğumuz değerleri ve değişmezlik ölçeninin değerlerini (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni

$$\sigma_1 \equiv \frac{\dfrac{2.3^{2N+1}}{(N+1)!^2\,(N+3)!^2}+\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{2.3^{2N+1}}{(N+1)!^2\,(N+3)!^2}\left[\frac{(j+1)^2(j+3)^2}{(2j+1)(2j+3)}+2\right]}{3^N\displaystyle\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}} \qquad \text{(III.91)}$$

olarak bulunmaktadır. σ_1 'in N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

2	**3**	**4**	**5**
0,8587	0,5364	0,4163	0,2076

Tablo III.28: (III.74) fonksiyonunu için (III.3) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i ler için σ_1 değerleri

σ_1, teorik olarak da beklenildiği üzere, $N=1$ için 1'dir. N'nin artan değerlerine göre σ_1 'in değeri azalmaktadır. Ayrıca bu azalmanın fonksiyona etkisi diğer ağırlık fonksiyonlarına göre daha kötüdür.

İkinci basamaktan toplamsallık ölçeni σ_2'i hesaplamak için,

$$f_{i_1 i_2} = \frac{2.3^{N-1}}{(N+1)!(N+3)!}\left[(i_1+1)(i_1+3)(i_2+1)(i_2+3)x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2} - 3(i_1+1)(i_1+3)x_{i_1}^{i_1} - 3(i_2+1)(i_2+3)x_{i_2}^{i_2} + 9\right]$$

olmak üzere, $f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\left\|f_{i_1,i_2}\right\|^2 = I_0\left[\frac{2.3^{N-1}}{(N+1)!(N+3)!}\begin{bmatrix}(i_1+1)(i_1+3)(i_2+1)(i_2+3)x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2}-3(i_1+1)\\(i_1+3)x_{i_1}^{i_1}-3(i_2+1)(i_2+3)x_{i_2}^{i_2}+9\end{bmatrix}\right]^2$$

$$\left\|f_{i_1,i_2}\right\|^2 = \frac{4.3^{2N-2}}{(N+1)!^2(N+3)!^2}\begin{bmatrix}\dfrac{(i_1+1)^2(i_1+3)^2(i_2+1)^2(i_2+3)^2}{(2i_1+1)(2i_1+3)(2i_2+1)(2i_2+3)}+\\\dfrac{(i_1+1)^2(i_1+3)^2}{(2i_1+1)(2i_1+3)}+\dfrac{(i_2+1)^2(i_2+3)^2}{(2i_2+1)(2i_2+3)}+81\end{bmatrix}$$

Bulduğumuz değerler doğrultusunda (II.15.b) ifadesi gereği σ_2,

$$\sigma_2 \equiv \frac{2.3^{N+1}\prod\limits_{i_1=1}^{N}(2i_1+1)(2i_1+3)}{(N+1)!^2(N+3)!^2}\left\{\begin{array}{l}1+2N+\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{(i+1)^2(i+3)^2}{(2i+1)(2i+3)}+\\ \sum\limits_{\substack{i_1,i_2=1\\i_1<i_2}}^{N}\dfrac{4}{27}\begin{bmatrix}\dfrac{(i_1+1)^2(i_1+3)^2(i_2+1)^2(i_2+3)^2}{(2i_1+1)(2i_1+3)(2i_2+1)(2i_2+3)}+\\\dfrac{(i_1+1)^2(i_1+3)^2}{(2i_1+1)(2i_1+3)}+\dfrac{(i_2+1)^2(i_2+3)^2}{(2i_2+1)(2i_2+3)}+81\end{bmatrix}\end{array}\right\} \qquad \text{(III.92)}$$

olarak bulunur. σ_2'nin N nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

3	**4**	**5**	**6**
0,9103	0,7278	0,4528	0,2401

Tablo III.29: (III.74) fonksiyonu için (III.3) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} ler için σ_2 değerleri

σ_2, N'nin artan değerleri için azalma göstermektedir. Bu azalmanın etkisi diğer ağırlık fonksiyonlarına göre daha kötüdür.

d) Fonksiyonu $w_i(x_i)=(i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonunu [0,1] integral aralığında (II.9) genelleştirilmiş operatör yardımıyla inceleyerek. (II.1) genel formunu oluşturan tüm terimleri bulalım ve elde edilenlerle (II.1) formunun sağlandığını görelim.

Buna göre (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 2x_1 dx_1 \int_0^1 3x_2^2 dx_2 ... \int_0^1 (N+1)x_N^N dx_N f(x_1, x_2, ..., x_N)$$

$$f_0 = \int_0^1 2x_1^2 dx_1 \int_0^1 3x_2^4 dx_2 ... \int_0^1 (N+1)x_N^{2N} dx_N$$

$$f_0 = (N+1)! \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1} \qquad \text{(III.93)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz..

$$f_i(x_i) = (N+1)! \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1} \left[\frac{(2i+1)}{i+1} x_i^i - 1 \right], \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(III.94)}$$

Fonksiyonun ikililerini bulmak için aşağıdaki ifadeden faydalanalım.

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = I_{i_1, i_2} f(x_1, x_2, ... x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_0, \qquad (1 \le i_k, i_m \le N, \;\; k < m)$$

önceden elde ettiğimiz değerler dahilinde yukarıdaki ifadenin çözümü ile fonksiyonun ikilileri,

$$f_{i_1 i_2} = (N+1)! \prod_{i_1=1}^{N} \frac{1}{2i_1+1} \left[\frac{(2i_1+1)(2i_2+1)}{(i_1+1)(i_2+1)} x_{i_1}^{i_1} x_{i_2}^{i_2} - \frac{(2i_1+1)}{(i_1+1)} x_{i_1}^{i_1} - \frac{(2i_2+1)}{(i_2+1)} x_{i_2}^{i_2} + 1 \right] \qquad \text{(III.95)}$$

şeklinde genel olarak ifade edilmektedir.

Kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki terimler genel bir ifade ile

$$f_{1,2,\dots,j}(x_1,x_2\dots,x_j)=I_{1,2,\dots,j}f-\left[\begin{array}{l} f_0+\sum_{i=1}^{j}I_i f(x_i)+\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\langle i_2}}^{j}I_{i_1 i_2}f(x_{i_1},x_{i_2})+ \\ \dots+\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}=1}^{j}I_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}}f \end{array}\right],\qquad 3\le j\le N$$

olarak bulunur. Bulunan ifadeler yerine yazıldığında (II.1) denkleminin sağladığı açıkça görülmektedir.

Daha önce yapılan tanımlar doğrultusunda fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\|f\|^2=I_0 f(x_1,x_2,\dots,x_N)^2$$

$$\|f\|^2=I_0\left(\prod_{i=1}^{N}x_i^{2i}\right)=(N+1)!\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{3i+1}\ \text{ ve}$$

$$\|f_0\|^2=(N+1)!^2\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{2i+1}\right)^2$$

olmak üzere (II.15.a) ifadesi gereği değişmezlik ölçeni σ_0,

$$\sigma_0=\frac{(N+1)!^2\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{2i+1}\right)^2}{(N+1)!\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{3i+1}}=(N+1)!\left[\frac{\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{2i+1}\right)^2}{\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{3i+1}}\right]\qquad \text{(III.96)}$$

olarak bulunmaktadır. σ_0'ın N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
0,8889	0,7466	0,6087	0,4891	0,3880

Tablo III.30: (III.74) fonksiyonu için (III.4) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0 lar için σ_0 değerleri

σ_0'ın değeri, N'nin artan değerleri için azalmaktadır. $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonunu etkileyen diğer ağırlık fonksiyonları da göz önüne alınırsa, en iyi sonucu $w_i(x_i) = 3x_i^2$ sonra sırasıyla $w_i(x_i) = 1$, $w_i(x_i) = \frac{3}{2}(1 - x_i^2)$ ve $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ vermektedir.

σ_1'i hesaplamak için,

$$f_k(x_k) = (N+1)! \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1} \left[\frac{(2k+1)}{k+1} x_k^k - 1 \right], \qquad 1 \le k \le N \qquad \text{(III.97)}$$

olmak üzere, $f_k(x_k)$'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\|f_k(x_k)\|^2 = I_0 \left[(N+1)! \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1} \left[\frac{(2k+1)}{k+1} x_k^k - 1 \right] \right]^2$$

$$\|f_k(x_k)\|^2 = \left((N+1)! \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2i+1} \right)^2 \left(\frac{k^2}{(k+1)(3k+1)} \right)$$

ve (II.15.b) denklemini kullanarak σ_1 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_1 = \frac{(N+1)! \left(\prod_{i=1}^{N} 3i+1 \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{(k+1)(3k+1)} \right)}{\left(\prod_{i=1}^{N} 2i+1 \right)^2} \qquad \text{(III.98)}$$

olarak bulunur. σ_1'nin N'nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

2	**3**	**4**	**5**
0,9356	0,9088	0,8736	0,7941

Tablo III.31: (III.74) fonksiyonu için (III.4) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i lar için σ_1 değerleri

Teorik olarak da beklenildiği σ_1, $N=1$ için 1 olarak bulunmuştur. σ_1'in değeri N'nin artan değerleri için azalmaktadır.

σ_2'i hesaplamak için,

$$f_{i_1 i_2} = (N+1)!\prod_{i_1=1}^{N}\frac{1}{2i_1+1}\left[\frac{(2i_1+1)(2i_2+1)}{(i_1+1)(i_2+1)}x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2} - \frac{(2i_1+1)}{(i_1+1)}x_{i_1}^{i_1} - \frac{(2i_2+1)}{(i_2+1)}x_{i_2}^{i_2} + 1\right]$$

olmak üzere, $f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$'in normunun karesini hesaplamalıyız.

$$\left\| f_{ij}(x_i, x_j)\right\|^2 = \left((N+1)!\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{2i+1}\right)^2\left(\frac{(2i+1)^2(2j+1)^2}{(i+1)(j+1)(3i+1)(3j+1)}+1\right)$$

ve (II.15.c) denklemini kullanarak σ_2 toplamsallık ölçeni;

$$\sigma_2 = \frac{\left((N+1)!\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{2i+1}\right)^2\left[1+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k^2}{(k+1)(3k+1)}\right)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N}\left(\frac{(2i+1)^2(2j+1)^2}{(i+1)(j+1)(3i+1)(3j+1)}+1\right)\right]}{(N+1)!\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{3i+1}} \quad \text{(III.99)}$$

olarak bulunur. σ_2'ın N nin değişen değerlerine göre tablosu aşağıda verildiği gibidir.

3	**4**	**5**	**6**
0,9998	0,9937	0,9861	0,9701

Tablo III.32: (III.74) fonksiyonu için (III.4) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} ler için σ_2 değerleri

σ_2, $N=1$ ve $N=2$ için 1 olarak bulunmuştur. Bu zaten teorik olarak beklenen bir sonuçtur. Bununla beraber σ_2, N'nin artan değerleri için 1'den itibaren σ_1'e göre daha yavaş bir azalma göstermektedir. Diğer ağırlık fonksiyonlarını da göz önüne alırsak $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonuna en iyi etkiyi $w_i(x_i) = 3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij} ler vermektedir. $w_i(x_i)=1$, $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ve $w_i(x_i)=(i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij}'lerin fonksiyona katkısı sırayla olumlu katkılar vermektedir.

Ele alınan fonksiyonlara ağırlık fonksiyonlarının etkileri belli değerler için gözlenmiştir. Ağırlık fonksiyonlarının sonuçları 1'e ne kadar yakın ise sonuç teorik olarak o kadar iyi kabul edilir. Buna göre $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^m$ fonksiyonunda en iyi sonuç, $w_i(x_i)=3x_i^2$'nin etkisi ile elde edilmiştir. Benzer şekilde $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$, $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^i$ ve $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^i$ fonksiyonunda da en iyi etki $w_i(x_i)=3x_i^2$ ile elde edilmiştir.

Buna göre $w_i(x_i)=1$ ağırlık fonksiyonunun etkisini ele alırsak; en iyi sonucu $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^m$ fonksiyonunda vermiştir. Sonra sırasıyla $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^i$, $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$ ve $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^i$ fonksiyonlarında görülmektedir. Benzer şekilde, $w_i(x_i)=3x_i^2$ ağırlık fonksiyonunun etkisinde en iyi sonuç $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^m$ fonksiyonunda elde edilmiştir. Sonra sırasıyla $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^i$, $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$ ve $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^i$ fonksiyonlarında görülmüştür. $w_i(x_i)=\frac{3}{2}\left(1-x_i^2\right)$ ağırlık fonksiyonunun etkisini ele alırsak en iyi sonuç $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^i$ fonksiyonunda azalan yönde elde edilmiştir. Buna göre bu azalan etki ile beraber elde edilen sonuçlar için, olumlu katkı da iyi olma sırası $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N}x_i^i$, $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^m$,

$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m$ ve $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ şeklindedir. $w_i(x_i) = (i+1)x_i^i$ ağırlık fonksiyonunun etkisini ele alırsak en iyi sonuç $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonunda elde edilmiştir. $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$, $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ ve $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonları da sırasıyla azalan bir etki göstermiştir. Buna göre, [0,1] aralığında fonksiyon ile ağırlık fonksiyonunun tepe noktaları ne kadar yakınsa ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen f_0, f_i, f_{ij}'lerin fonksiyona katkıları o kadar olumlu sonuçlar vermektedir. Fonksiyon ile ağırlık fonksiyonu artan fonksiyon ya da yine her ikisi azalan ise fonksiyona katkı yine olumlu olmaktadır. Aksi durumların katkıyı olumsuz hale getirdiği yaptığımız incelemelerden kolayca görülmektedir. Ayrıca N'nin artan değerleri için katkının olumlu ya da olumsuzluğu katlanarak ilerleme göstermektedir.

BÖLÜM IV

TRİGONOMETRİK AĞIRLIK FONKSİYONU İLE YBMG

Bu bölümde, daha önce ele alınmış olan fonksiyonlar için yine [0,1] integral aralığında

$$w_i(x_i) = A_i \sin(Bx_i) \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(IV .1)}$$

trigonmetrik ağırlık fonksiyonunun etkisini inceleyeceğiz.

Fonksiyonlara YBMG yöntemini uygulayabilmemiz için gereken bazı koşullar vardır. YBMG hesaplamasını kolaylaştıran bu koşullardan biri ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olması yani normalize olduğunun varsayılmasıdır. Buna göre (II.1) denkleminin sağ yanındaki terimlerin diklik koşuluna (II.4), (II.5) ve (II.6) de verildiği şekilde uymaları gerekmektedir. Bu bağlamda ele alacağımız örnek için ağırlık fonksiyonunun [0,1] integral aralığında 1 olacak şekilde A_i katsayılarını belirleyelim. $w_i(x_i) = A_i \sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonu, $1 \le i \le N$ aralığında,

$$\int_0^1 A_i \sin(Bx_i)\,dx_i = 1\,,\ A_i = \frac{B}{1-\cos B}$$

$$w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i) \qquad \text{(IV .2)}$$

olarak bulunur.

Ilk olarak,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m \qquad \text{(IV.3)}$$

fonksiyonunu [0,1] integral aralığında,

$$w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i) \qquad\qquad 1 \le i \le N$$

ağırlık fonksiyonu için inceleyelim. Şimdi,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^{N} f_{i_1,i_2,i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + ...$$
$$+ f_{1,2,...,N}(x_1, x_2 ..., x_N)$$

olarak verilen (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri genelleştirilmiş (II.9) denklemi ile bulalım ve elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim. Buna gore (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1 \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2 ... \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^m\right)$$

$$\begin{aligned} f_0 = & \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)x_1^m dx_1 \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2 ... \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N + \\ & \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1 \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)x_2^m dx_2 ... \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N + ... + \\ & \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1 \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2 ... \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)x_N^m dx_N \end{aligned}$$

m'nin tek değerleri için,

$$f_0 = \frac{BN}{1-\cos B}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B \end{array}\right] \qquad \text{(IV.4.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$f_0 = \frac{BN}{1-\cos B}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\end{array}\right] \qquad \text{(IV.4.b)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için,

$$f_i(x_i) = I_i f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_0 \qquad 1 \le i \le N$$

operatörünü ele alalım. Buna göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz.

m'nin tek değerleri için,

$$f_i(x_i) = x_i^m - \frac{B}{1-\cos B}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\end{array}\right] \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(IV.5.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$f_i(x_i) = x_i^m - \frac{B}{1-\cos B}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\end{array}\right] \qquad 1 \le i \le N \qquad \text{(IV.5.b)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak 0 olarak bulunmaktadır.

Üç terimliler için,

$$f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = I_{i_1,i_2,i_3} f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) -$$
$$- f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0$$

operatöründen faydalandığımızda ikililerin bulunmasına benzer işlemler sonucunda üçlüler de 0 olarak bulunmaktadır

Buna göre kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler "0" olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler (II.1) genel denkleminde yerine yazılırsa fonksiyonun sağlandığı açıkca görülmektedir.

$\|f_0\|^2$ ve $\|f\|^2$ aşağıdaki gibi tanımlanmak üzere, sırasıyla m'nin tek ve çift değerleri için,

$$\|f_0\|^2 = \left(\frac{BN}{1-\cos B}\right)^2 \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \end{bmatrix}^2 \quad \text{(IV.6.a)}$$

$$\|f\|^2 = N(N-1)\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^2 \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \end{bmatrix}^2 \quad \text{(IV.7.a)}$$
$$+ \frac{BN}{1-\cos B} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!} \sin B \end{bmatrix}$$

$$\|f_0\|^2 = \left(\frac{BN}{1-\cos B}\right)^2 \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \end{bmatrix}^2 \quad \text{(IV .6.b)}$$

$$\|f\|^2 = N(N-1)\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^2 \left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right]^2 + \frac{BN}{1-\cos B}\left[\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!}\sin B\right] \quad \text{(IV.7.b)}$$

olarak tanımlanmak üzere değişmezlik ölçeni (II.15) gereği m'nin tek ve çift değerleri için

$$\sigma_0 = \frac{\left(\dfrac{BN}{1-\cos B}\right)^2 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right]^2}{N(N-1)\left(\dfrac{B}{1-\cos B}\right)^2 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right]^2 + \dfrac{BN}{1-\cos B}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!}\sin B\right]} \quad \text{(IV.8.a)}$$

$$\sigma_0 = \frac{\left(\dfrac{BN}{1-\cos B}\right)^2 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right]^2}{N(N-1)\left(\dfrac{B}{1-\cos B}\right)^2 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right]^2 + \dfrac{BN}{1-\cos B}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!}\sin B\right]} \quad \text{(IV.8.b)}$$

olarak bulunmaktadır.

σ_0 ifadesinin $B = \frac{\pi}{2}$, m ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,8770	0,9345	0,9605	0,9662
2	0,7251	0,8406	0,8878	0,9134
3	0,5601	0,7181	0,7926	0,8359
4	0,3471	0,4251	0,5624	0,6715

Tablo IV.1 (IV.3) fonksiyonunun $B = \pi$ için (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_0 değerleri

σ_0 ifadesinin $B = \pi$, m ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,8412	0,9137	0,9408	0,9549
2	0,2768	0,3313	0,4547	0,05676
3	0,1835	0,3102	0,4027	0,4734
4	0,1597	0,2408	0,2743	0,3268

Tablo IV.2 (IV.3) fonksiyonunun $B = \frac{\pi}{2}$ için (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_0 değerleri

σ_0'ın değeri, N'nin artan değerleri için artmaktadır. m arttıkça f_0 ın fonksiyona olan katkısı azalmaktadır. Bununla beraber σ_0 üzerinde $B = \frac{\pi}{2}$, $B = \pi$'ye göre daha iyi sonuçlar vermektedir.

σ_1'i hesaplamak için önce (III.24.a) ve (III.24.b) göz önüne alınarak

m'nin tek değerleri için,

$$f_k(x_k) = x_k^m - \frac{B}{1-\cos B}\left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B \end{array}\right] \qquad 1 \le k \le N \qquad \text{(IV.9.a)}$$

m’nin çift değerleri için,

$$f_k(x_k) = x_k^m - \frac{B}{1-\cos B}\left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B \end{array}\right] \qquad 1 \le k \le N \qquad \text{(IV.9.b)}$$

olmak üzere $f_k(x_k)$ normunun karesini bulmalıyız.

m’nin tek değerleri için,

$$\begin{aligned} \|f_k\|^2 = {} & -\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^2 \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B \end{array}\right]^2 \\ & + \frac{B}{1-\cos B}\left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!}\cos B + \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!}\sin B \end{array}\right] \end{aligned} \qquad \text{(IV.10.a)}$$

m’nin çift değerleri için,

$$\left\|f_k\right\|^2 = -\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^2 \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \end{array}\right]^2 \qquad \text{(IV.10.b)}$$

$$+\frac{B}{1-\cos B}\left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!} \sin B \end{array}\right]$$

ve $\|f\|^2$ nin değerlerini göz önüne alarak bulunan değerleri (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Buna göre işlemler doğrultusunda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni beklenildiği üzere 1 olarak bulunmaktadır.

Ikinci olarak,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m \qquad \text{(IV.11)}$$

fonksiyonunu [0,1] integral aralığında,

$$w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i) \qquad 1 \le i \le N$$

ağırlık fonksiyonu için inceleyelim.

Verilenler dahilinde,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3 = 1 \\ i_1 \langle i_2 \langle i_3}}^{N} f_{i_1, i_2, i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + ...$$
$$+ f_{1,2,...,N}(x_1, x_2 ..., x_N)$$

olarak verilen (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri genelleştirilmiş (II.9) denklemi ile bulalım ve elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim. Buna gore (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1 \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2 \ldots \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N\, f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

$$f_0 = \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1 \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2 \ldots \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N\, (\prod_{i=1}^{N} x_i^m)$$

integrasyonun çözümünden,

m'nin tek değerleri için,

$$f_0 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B \end{array}\right]^N \qquad \text{(IV.12.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$f_0 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B \end{array}\right]^N \qquad \text{(IV.12.b)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz.

m'nin tek değerleri için,

$$f_j(x_j)=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N-1}\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B+\\ \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\end{bmatrix}^{N-1}x_j^m,\qquad 1\le j\le N \qquad \text{(IV.13.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$f_j(x_j)=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N-1}\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B+\\ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\end{bmatrix}^{N-1}x_j^m,\qquad 1\le j\le N \qquad \text{(IV.13.b)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak, $1\le i_1,i_2\le N$ olmak üzere

m'nin tek değerleri için,

$$f_{i_1,i_2}=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N-2}\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B+\\ \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\end{bmatrix}^{N-2}x_{i_1}^m x_{i_2}^m \qquad \text{(IV.14.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$f_{i_1,i_2}=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N-2}\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B+\\ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\end{bmatrix}^{N-2}x_{i_1}^m x_{i_2}^m \qquad \text{(IV.14.b)}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Uygun işlemler doğrultusunda diğer terimler genel bir ifade ile

$$f_{1,2,\dots,j}(x_1,x_2\dots,x_j)=I_{1,2,\dots,j}f-\begin{bmatrix} f_0+\sum_{i=1}^{j} I_i f(x_i)+\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\langle i_2}}^{j} I_{i_1 i_2} f(x_{i_1},x_{i_2})+ \\ \dots+\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}=1}^{j} I_{i_1,i_2,\dots,i_{j-1}} f \end{bmatrix}, \qquad 1\le j\le N$$

şeklinde gösterilebilmektedir. Bulunan ifadeler aşağıdaki genel denklemde yerine yazılırsa, (II.1) denkleminin sağladığı açıkça görülmektedir. Daha önce yapılan tanımlar doğrultusunda fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\|f\|^2=I_0 f(x_1,x_2,\dots,x_N)^2$$

m'nin tek değerleri için,

$$\|f\|^2=I_0\left(\prod_{j=1}^{N}x_j^{2m}\right)=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!}\cos B+\\ \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!}\sin B\end{bmatrix}^N \qquad \text{(IV.15.a)}$$

$$\|f_0\|^2=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N}\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B+\\ \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\end{bmatrix}^{2N} \qquad \text{(IV.16.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$\|f\|^2=I_0\left(\prod_{j=1}^{N}x_j^{2m}\right)=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!}\cos B+\\ \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!}\sin B\end{bmatrix}^N \qquad \text{(IV.15.b)}$$

$$\left\|f_0\right\|^2 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N} \left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \right]^{2N} \qquad \text{(IV.16.b)}$$

olmak üzere (II.15.a) ifadesi gereği σ_0,

m'nin tek değerleri için,

$$\sigma_0 = \frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N} \left[\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \right]^{2N}}{\left[\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!} \cos B + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!} \sin B \right]^{N}} \qquad \text{(IV.17.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$\sigma_0 = \frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N} \left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \right]^{2N}}{\left[\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!} \cos B + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!} \sin B \right]^{N}} \qquad \text{(IV.17.b)}$$

olarak bulunur.

σ_0 ifadesinin $B=\frac{\pi}{2}$, m ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	1	2	3	4
1	0,8770	0,7691	0,6746	0,5915
2	0,7251	0,5258	0,3813	0,2764
3	0,5601	0,3137	0,1757	0,0984
4	0,4325	0,2865	0,1498	0,0899

Tablo IV.3 (IV.11) fonksiyonunun $B=\frac{\pi}{2}$ için (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_0 değerleri

σ_0 ifadesinin $B=\pi$, m ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	1	2	3	4
1	0,8411	0,7076	0,5951	0,5007
2	0,7078	0,5010	0,3546	0,2509
3	0,4526	0,3452	0,2234	0,1752
4	0,1836	0,0337	0,0062	0,0015

Tablo IV.4 (IV.11) fonksiyonunun $B=\pi$ için (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_0 değerleri

σ_0'ın değeri, N'nin artan değerleri için azalmaktadır. m'nin artan etkisi bu azalmayı hızlandırmaktadır. Bununla beraber σ_0 değerleri $B=\frac{\pi}{2}$ için $B=\pi$ için aldığı değerlerden daha yüksektir. Ayrıca $w_i(x_i)=3x_i^2$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'ın $f(x_1,x_2,...,x_N)=\sum_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonuna katkısı artmakta iken, $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonunda katkı azalmaktadır.

σ_1 'i hesaplamak için, (IV.13.a) ve (IV.13.b) değerlerini göz önüne alarak $f_j(x_j)$ 'in normunun karesini hesaplamalıyız.

m'nin tek değerleri için,

$$\left\|f_j(x_j)\right\|^2 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \end{bmatrix}^{2N-2} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!} \sin B \end{bmatrix} \quad \text{(IV.18.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$\left\|f_j(x_j)\right\|^2 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!} \sin B \end{bmatrix}^{2N-2} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!} \cos B + \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!} \sin B \end{bmatrix} \quad \text{(IV.18.b)}$$

ve (II.15.b) denklemini kullanarak σ_1 toplamsallık ölçeni;

m'nin tek değerleri için,

$$
\sigma_1 = \left[\begin{array}{l}
\left(\dfrac{B}{1-\cos B}\right)^{N}
\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!}
\end{array}\right]^{2N}
\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}
\end{array}\right]^{-N} \\
+N\left(\dfrac{B}{1-\cos B}\right)^{N-1}
\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!}
\end{array}\right]^{2N-2}
\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}
\end{array}\right]^{1-N}
\end{array}\right] \qquad \text{(IV.19.a)}
$$

m'nin çift değerleri için,

$$
\sigma_1 = \left[\begin{array}{l}
\left(\dfrac{B}{1-\cos B}\right)^{N}
\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B
\end{array}\right]^{2N}
\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+2)!}\cos B + \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!}{(2m-2k+1)!}\sin B
\end{array}\right]^{-N} \\
+N\left(\dfrac{B}{1-\cos B}\right)^{N-1}
\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!}
\end{array}\right]^{2N-2}
\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \\
\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}
\end{array}\right]^{1-N}
\end{array}\right] \qquad \text{(IV.19.b)}
$$

olarak bulunur.

σ_1 ifadesinin $B = \frac{\pi}{2}$, m ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,9841	0,9580	0,9232	0,8832
2	0,9252	0,8157	0,6974	0,5909
3	0,8057	0,5927	0,4264	0,2975
4	0,7865	0,5507	0,3721	0,2451

Tablo IV.5 (IV.11) fonksiyonunun $B = \frac{\pi}{2}$ için (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_i 'ler için σ_1 değerleri

σ_1 ifadesinin $B=\pi$, m ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	1	2	3	4
1	0,9750	0,9326	0,8791	0,8261
2	0,4775	0,0975	0,0325	0,0228
3	0,3338	0,0885	0,0212	0,0051
4	0,2201	0,0621	0,0108	0,0024

Tablo IV.6 (IV.11) fonksiyonunun $B=\pi$ için (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_1 değerleri

σ_1, $N=1$ için 1 olarak bulunmuştur. Daha önce de ifade edildiği gibi bu teorik olarak da beklenen bir sonuçtur zira hesaplanan değişmezlik ölçeni birinci basamaktandır. Ayrıca σ_1, N'nin artan değerleri için azalmaktadır ve m'nin artan değerleri bu azalmayı daha da olumsuz hale getirmektedir. Bununla beraber $w_i(x_i)=\dfrac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonunun $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonu üzerindeki katkısı $B=\dfrac{\pi}{2}$ ile daha iyi sonuçlar vermektedir.

σ_2'i hesaplamak için (IV.14.a) ve (IV.14.b) göz önüne alınarak $f_{ij}(x_i,x_j)$'in normunun karesini hesaplamalıyız.

m’nin tek değerleri için,

$$\left\|f_{ij}(x_i,x_j)\right\|^2=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!}+\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!}\end{array}\right]^{2N-4}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!}+\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}\end{array}\right]^2$$

m’nin çift değerleri için,

$$
\left\| f_{ij}(x_i,x_j) \right\|^2 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-2} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \\ \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!} \end{array}\right]^{2N-4} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}\end{array}\right]^2
$$

ve (II.15.c) denklemini kullanarak σ_2 toplamsallık ölçeni;

m'nin tek değerleri için σ_2,

$$
\sigma_2 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \\ \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!} \end{array}\right]^{2N} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}\end{array}\right]^{-N} \times
$$

$$
\left[\begin{array}{l}
1 + N\frac{1-\cos B}{B} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \\ \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!} \end{array}\right]^{-2} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}\end{array}\right] + \\
\frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{1-\cos B}{B}\right)^2 \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \\ \sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!} \end{array}\right]^{-4} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}\end{array}\right]^2
\end{array}\right] \tag{IV.20.a}
$$

m'nin çift değerleri için σ_2,

$$\sigma_2 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N \left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!}\right]^{2N} \left[\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}\right]^{-N} \times$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 + N\dfrac{1-\cos B}{B} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!}\right]^{-2} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}\right] + \\ \dfrac{N(N-1)}{2}\left(\dfrac{1-\cos B}{B}\right)^2 \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!\cos B}{(m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k-1}} \frac{m!\sin B}{(m-2k+1)!}\right]^{-4} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{(2m)!\cos B}{(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{(2m)!\sin B}{(2m-2k+1)!}\right]^2 \end{array}\right] \quad \text{(IV.20.b)}$$

olarak bulunur.

σ_2 ifadesinin $B=\frac{\pi}{2}$, $B=\pi$ m ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

m \ N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,9987	0,9652	0,9253	0,8988
2	0,8852	0,8757	0,8574	0,8329
3	0,8567	0,6928	0,5265	0,4975
4	0,7565	0,6467	0,7456	0,3851

Tablo IV.7 (IV.11) fonksiyonunun $B=\frac{\pi}{2}$ için (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_2 değerleri

m \ N	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0,9877	0,9215	0,8820	0,8388
2	0,5752	0,1051	0,0542	0,0239
3	0,3357	0,0828	0,0255	0,0089
4	0,2855	0,0667	0,0178	0,0065

Tablo IV.8 (IV.11) fonksiyonunun $B=\pi$ için (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_2 değerleri

σ_2, $N = 1$ ve $N = 2$ için teorik olarak da beklenildiği üzere 1 olarak bulunmuştur. Ayrıca σ_2, N'nin artan değerleri için azalmaktadır. m'nin artan değerleri bu azalmayı hızlandırmaktadır. Bununla beraber $w_i(x_i) = \dfrac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij}'nin $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonu üzerindeki etkisi $B = \dfrac{\pi}{2}$ için $B = \pi$'ye göre daha iyidir.

Üçüncü olarak,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i \tag{IV.21}$$

fonksiyonunu [0,1] integral aralığında,

$$w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i) \qquad\qquad 1 \le i \le N$$

ağırlık fonksiyonu için inceleyelim.

Verilenler dahilinde,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = f_0 + \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \langle i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3 = 1 \\ i_1 \langle i_2 \langle i_3}}^{N} f_{i_1, i_2, i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + ...$$
$$+ f_{1,2,...,N}(x_1, x_2 ..., x_N)$$

olarak verilen (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri genelleştirilmiş (II.9) denklemi ile bulalım ve elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim. Buna gore (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0 = \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1 \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2 ... \int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^m\right)$$

$$f_0=\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)x_1^m dx_1\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2\ldots\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N+$$
$$\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)x_2^m dx_2\ldots\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N+\ldots+$$
$$\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2\ldots\int_0^1\frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)x_N^m dx_N$$

integrasyonun çözümünden,

m'nin tek değerleri için,

$$f_0=\frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B+\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right)\right] \quad \text{(IV.22.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$f_0=\frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right] \quad \text{(IV.22.b)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri $1\le k\le N$ olmak üzere genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz.

k'nın tek değerleri için,

$$f_k(x_k)=x_k^k-\frac{B}{1-\cos B}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B+\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right) \quad \text{(IV.23.a)}$$

k'nın çift değerleri için,

$$f_k(x_k) = x_k^k - \frac{B}{1-\cos B}\left(\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}} \frac{(-1)^k}{B^{2k-1}} \frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}} \frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right) \quad \text{(IV.23.b)}$$

Fonksiyonun iki terimlileri (II.13) ifadesindeki operatör yardımıyla önceden bulduğumuz değerler ve integrasyon sonucuna bağlı olarak 0 olarak bulunmaktadır.

Üç terimliler için,

$$\begin{aligned} f_{i_1 i_2 i_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) &= I_{i_1, i_2, i_3} f(x_1, x_2, ..., x_N) - f_{i_1}(x_{i_1}) - f_{i_2}(x_{i_2}) - f_{i_3}(x_{i_3}) - \\ &- f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - f_{i_1 i_3}(x_{i_1}, x_{i_3}) - f_{i_2 i_3}(x_{i_2}, x_{i_3}) - f_0 \end{aligned}$$

operatöründen faydalandığımızda ikililerin bulunmasına benzer işlemler sonucunda üçlüler de 0 olarak bulunmaktadır

Buna göre kolaylıkla görülüyor ki bundan sonraki diğer terimler “0” olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler (II.1) genel denkleminde yerine yazılırsa, fonksiyon elde edilir.

Yapılanlar doğrultusunda değişmezlik ölçeni (II.15.a) ifadesi gereği,

$$\|f\|^2 = I_0\left(\left(x_1^m + x_2^m + ... + x_N^m\right)^2\right)$$

m’nin tek değerleri için,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k (2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right] \\ &+ 2\frac{-B\cos B + \sin B}{(1-\cos B)^2}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right)\right] \end{aligned}$$

ve

$$f_0 = \frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right)\right]$$

m’nin çift değerleri için,

$$\|f\|^2 = \frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+2)!}\right] +$$
$$2\frac{-B\cos B+\sin B}{(1-\cos B)^2}\sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right)$$

ve

$$f_0 = \frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k}{B^{2k-1}}\frac{m!}{(m-2k+2)!}\cos B + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}}{B^{2k}}\frac{m!}{(m-2k+1)!}\sin B\right]$$

olmak üzere σ_0,

m’nin tek değerleri için,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\left\{\frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{(-1)^k(m)!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!} + \frac{(-1)^{k+1}(m)!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right)\right]\right\}^2}{\frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+2)!}\right] + 2\frac{-B\cos B+\sin B}{(1-\cos B)^2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{(-1)^k(m)!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!} + \frac{(-1)^{k+1}(m)!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right)} \qquad \text{(IV.24.a)}$$

m’nin çift değerleri için,

$$\sigma_0 \equiv \frac{\left\{\frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k (m)!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}(m)!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right\}^2}{\frac{B}{1-\cos B}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k (2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+2)!}\right]+ 2\frac{-B\cos B+\sin B}{(1-\cos B)^2}\sum_{m=2}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k (m)!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}(m)!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]} \qquad \text{(IV.24.b)}$$

olarak bulunur.

σ_0 ifadesinin B ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

B \ N	**1**	**2**	**3**	**4**
$\pi/2$	0,8770	0,8883	0,8989	0,9071
π	0,8411	0,8510	0,8612	0,8907

Tablo IV.9 (IV.21) fonksiyonunun (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_0 değerleri

σ_0'ın değeri, N'nin artan değerleri için artmaktadır. Bu $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonuna, $w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'ların katkısının yüksek olduğunu ifade etmektedir. Bununla beraber $w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonunun $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonuna katkısı $B = \frac{\pi}{2}$'de $B = \pi$'ye göre daha iyidir. Ayrıca $w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0'ın katkısı $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonunda $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonuna göre daha etkindir.

σ_1'i hesaplamak için önce (IV.23.a) ve (IV.23.b)'nin norm karesini bulmalıyız.

m'nin tek değerleri için

$$\|f_k\|^2 = \frac{B}{1-\cos B}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]$$
$$-\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^2\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^2 \qquad \text{(IV.25.a)}$$

m'nin çift değerleri için

$$\|f_k\|^2 = \frac{B}{1-\cos B}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]$$
$$-\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^2\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^2 \qquad \text{(IV.25.b)}$$

olmak üzere bulduğumuz değerler ve değişmezlik ölçeninin değerlerini (II.15.b) denkleminde yerine yazalım. Bu durumda birinci basamaktan toplamsallık ölçeni

$$\sigma_1 \equiv 1 \qquad \text{(IV.26)}$$

olarak bulunur.

Dördüncü olarak,

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i \qquad \text{(IV.27)}$$

fonksiyonunu [0,1] integral aralığında,

$$w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i) \qquad 1 \le i \le N$$

ağırlık fonksiyonu için inceleyelim.

Verilenler dahilinde,

$$f(x_1,x_2,...,x_N)=f_0+\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)+\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\langle i_2}}^{N} f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2})+\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1\\ i_1\langle i_2\langle i_3}}^{N} f_{i_1,i_2,i_3}(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3})+...$$
$$+f_{1,2,...,N}(x_1,x_2...,x_N)$$

olarak verilen (II.1) formunu oluşturan tüm terimleri genelleştirilmiş (II.9) denklemi ile bulalım ve elde edilenlerle bu formun sağlandığını görelim. Buna gore (II.8) ifadesindeki operatörün tanımına göre f_0,

$$f_0=\int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_1)dx_1\int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_2)dx_2...\int_0^1 \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_N)dx_N\,(\prod_{i=1}^{N} x_i^m)$$

N'nin tek değerleri için,

$$f_0=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N\prod_{m=1}^{N}\left\{\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right\}^N \qquad \text{(IV.28.a)}$$

N'nin çift değerleri için,

$$f_0=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^N \qquad \text{(IV.28.b)}$$

olarak bulunur.

Tek terimliler için (II.10) ifadesindeki operatör tanımına göre tek terimlileri genel bir ifade ile aşağıdaki şekilde verebiliriz.

m'nin tek değerleri için,

$$f_j(x_j)=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N-1}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N}\left\{\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right\}x_j^j, \qquad 1\le j\le N \text{(IV.29.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$f_j(x_j)=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N-1}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N}\left\{\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right\}x_j^j,\qquad 1\leq j\leq N \quad \text{(IV.29.b)}$$

Fonksiyonun ikililerini bulmak için aşağıdaki ifadeden faydalanalım.

$$f_{i_1i_2}(x_{i_1},x_{i_2})=I_{i_1,i_2}f(x_1,x_2,...x_N)-f_{i_1}(x_{i_1})-f_{i_2}(x_{i_2})-f_0,\qquad 1\leq i_k,i_m\leq N,\ \ k<m$$

önceden elde ettiğimiz değerler dahilinde yukarıdaki ifadenin çözümü ile fonksiyonun ikilileri, $1\leq i,j\leq N$ ve $i<j$ olmak üzere

m'nin tek değerleri için,

$$f_{i_1,i_2}=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N-2}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i_1,i_2}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2}\quad \text{(IV.30.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$f_{i_1,i_2}=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N-2}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i_1,i_2}}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2}\quad \text{(IV.30.b)}$$

şeklinde genel olarak ifade edilmektedir.

Uygun işlemler doğrultusunda diğer terimler genel bir ifade ile

$$f_{1,2,...,j}(x_1,x_2...,x_j)=I_{1,2,...,j}f-\left[\begin{array}{l} f_0+\sum\limits_{i=1}^{j}I_if(x_i)+\sum\limits_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1<i_2}}^{j}I_{i_1i_2}f(x_{i_1},x_{i_2})+\\ ...+\sum\limits_{i_1,i_2,...,i_{j-1}=1}^{j}I_{i_1,i_2,...,i_{j-1}}f\end{array}\right],\qquad 1\leq j\leq N$$

şeklinde gösterilebilmektedir. Bulunan ifadeler aşağıdaki genel denklemde yerine yazılırsa, (II.1) denkleminin sağladığı açıkça görülmektedir. Daha önce yapılan tanımlar doğrultusunda fonksiyonun değişmezlik ölçenini hesaplayalım. Bunun için önce f ve f_0'ın norm kareleri hesaplanmalıdır. N'nin tek ve çift değerleri için,

$$\|f\|^2 = I_0\left(\prod_{j=1}^{N} x_j^{2m}\right) = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N \prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]$$

olmak üzere (II.15.a) ifadesi gereği σ_0,

m'nin tek değerleri için,

$$\sigma_0 = \frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N}\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!} + \frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right]^{2N}}{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N}\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]} \qquad \text{(IV.31.a)}$$

m'nin çift değerleri için,

$$\sigma_0 = \frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N}\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^{2N}}{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N}\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!} + \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]} \qquad \text{(IV.31.b)}$$

olarak bulunur.

σ_0 ifadesinin B ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

B \ **N**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\pi/2$	0,8770	0,6360	0,3564	0,1920
π	0,8411	0,2328	0,1201	0,0532

Tablo IV.10 (IV.27) fonksiyonunun (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_0 değerleri

σ_0'ın değeri, N'nin artan değerleri için azalmaktadır. Bu bize artan N değerleri için $w_i(x_i)=\dfrac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonunun $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^i$ fonksiyonuna katkısının azalmakta olduğunu ifade eder. Ayrıca $B=\dfrac{\pi}{2}$ için $w_i(x_i)=\dfrac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_0 değerleri daha olumlu sonuçlar vermektedir. Bu bize $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N}x_i^i$ fonksiyonuna katkının $B=\dfrac{\pi}{2}$ için daha iyi olduğunu göstermektedir.

σ_1'i hesaplamak için (IV.29.a) ve (IV.29.b) değerlerini göz önüne almak üzere $f_j(x_j)$'in normunun karesi, sırasıyla N'nin tek ve çift değerleri için,

$$\left\|f_j(x_j)\right\|^2=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1}\left[\prod_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right]^2\times$$
$$\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]$$

$$\left\|f_j(x_j)\right\|^2=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1}\left[\prod_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1}m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^2\times$$
$$\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]$$

olarak bulunmaktadır. (II.15.b) denklemini kullanarak σ_1 toplamsallık ölçeni sırasıyla N'nin tek ve çift değerleri için,

$$\sigma_1 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N \frac{\prod\limits_{m=1}^{N}\left[\sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right]^{2N}}{\prod\limits_{m=1}^{N}\left[\sum\limits_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]} +$$

$$\frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1}\sum\limits_{j=1}^{N}\left[\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N}\sum\limits_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right]^2 \times \left[\sum\limits_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]}{\prod\limits_{m=1}^{N}\left[\sum\limits_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]} \qquad \text{(IV.32.a)}$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^N \frac{\prod\limits_{m=1}^{N}\left[\sum\limits_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum\limits_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^{2N}}{\prod\limits_{m=1}^{N}\left[\sum\limits_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]} +$$

$$\frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1}\sum\limits_{j=1}^{N}\left[\left[\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N}\sum\limits_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum\limits_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^2 \times \left[\sum\limits_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]\right]}{\prod\limits_{m=1}^{N}\left[\sum\limits_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]} \qquad \text{(IV.32.b)}$$

olarak bulunur.

σ_1 ifadesinin B ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

B \ N	**2**	**3**	**4**	**5**
$\pi/2$	0,9635	0,8210	0,7210	0,6304
π	0,8855	0,5735	0,2987	0,1201

Tablo IV.11 (IV.27) fonksiyonunun (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_1 değerleri

σ_1, $N=1$ için teorik olarak da beklenildiği üzere 1 olarak bulunmuştur. N'nin artan değerleri için σ_1 azalmaktadır. Bununla beraber $w_i(x_i)=\dfrac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonunun kullanarak bulunan f_i'lerin $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonu üzerindeki katkısıs $B=\dfrac{\pi}{2}$'de $B=\pi$'ye göre daha iyidir. Ayrıca ele alınan ağırlık fonksiyonu kullanarak bulunan f_i'lerin $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonuna katksı $f(x_1,x_2,...,x_N)=\prod_{i=1}^{N} x_i^m$'e göre daha kötüdür.

σ_2'i hesaplamak için (IV.30.a) ve (IV.30.b) değerlerini de göz önüne almak üzere $f_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2})$'in normunun karesi, N'nin tek ve çift değerleri için,

$$\left\|f_{i,j}(x_i,x_j)\right\|^2=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-2}\left[\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i_1,i_2}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right]^2\times$$
$$\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]^2$$

$$\left\|f_{i,j}(x_i,x_j)\right\|^2=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-2}\left[\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i_1,i_2}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^2\times$$
$$\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]^2$$

olarak bulunmaktadır. Bulunan ifadeler doğrultusunda (II.15.c) denklemini kullanarak σ_2 toplamsallık ölçeni;

m'nin tek değerleri için,

$$\sigma_2=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N}\frac{\left[\prod_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^{k}\,m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1}\,m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right]^{2N}}{\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k}(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]}+$$

$$\frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1}\sum_{j=1}^{N}\left[\prod_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^{k}\,m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1}\,m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right]^{2}\times\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k}(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]}{\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k}(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]}+$$

$$\frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1}\sum_{i,j=1}^{N}\left[\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i_1,i_2}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}\left[\frac{(-1)^{k}\,m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\frac{(-1)^{k+1}\,m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]\right]^{2}\times\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k}(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]^{2}}{\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k}(2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]} \qquad \text{(IV.33.a)}$$

m’nin çift değerleri için,

$$\sigma_2=\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{N}\frac{\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^{2N}}{\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k (2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]}+$$

$$\frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1}\sum_{j=1}^{N}\left[\left[\prod_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^{2}\times\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k (2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]\right]}{\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k (2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]}+$$

$$\frac{\left(\frac{B}{1-\cos B}\right)^{2N-1}\left[\prod_{\substack{m=1\\m\neq i_1,i_2}}^{N}\sum_{k=1}^{\frac{m+2}{2}}\frac{(-1)^k m!\cos B}{B^{2k-1}(m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{k+1} m!\sin B}{B^{2k}(m-2k+1)!}\right]^{2}\times\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k (2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]^{2}}{\prod_{m=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^k (2m)!\cos B}{B^{2k-1}(2m-2k+2)!}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m)!\sin B}{B^{2k}(2m-2k+1)!}\right]}\qquad\text{(IV.33.b)}$$

olarak bulunur.

σ_2 ifadesinin B ve N'nin bazı değerleri için sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

B \ **N**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\pi/2$	0,9901	0,9807	0,9749	0,9658
π	0,9897	0,9695	0,9421	0,9104

Tablo IV.12 (IV.27) fonksiyonunun (IV.2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak elde edilen σ_2 değerleri

σ_2, $N=1$ ve $N=2$ için teorik olarak da beklenildiği üzere 1 olarak bulunmuştur. Bununla beraber σ_2, N'nin artan değerleri için azalmaktadır ve $B=\pi$

$B = \frac{\pi}{2}$'ye göre bu azalmayı hızlandırmaktadır. Bu da ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_{ij}'lerin $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonuna katkısının iyi olduğunu ifade eder. Ayrıca $w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonunun $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonuna katkısı $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$'e göre daha kötüdür.

Sonuç olarak, $w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonun $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m$, $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$, $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ ve $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonlarına etkileri m, N, B'nin bazı değerleri $\frac{\pi}{2}$ ve π için gözlenmiştir. Ağırlık fonksiyonlarının etkileri göz önüne alındığında değişmezlik ölçenlerinin sonuçları 1'e yakınsa bu ağırlık fonksiyonları kullanılarak bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerin, ele alınan fonksiyona katksı o derece iyidir. Buna göre m, N'nin artan değerleri için $w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonunun $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m$, $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ fonksiyonlarına olan etkisi iyi, $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ ve $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ etkisi kötüdür. Yani toplamsal fonksiyonlarda fonksiyona katkısı olumludur. Çarpımsal fonksiyonlar da ise fonksiyona katkı artan N değerleri için olumsuz sonuçlar vermektedir. Ele alınan fonksiyonların artan ve [0,1] aralığında tepe noktalarının (0,0) olması göz önüne alınarak toplamsal fonksiyonlarda olumlu sonuçlar vereceği artık kolayca görülmektedir. Çarpımsal fonksiyonlarda da, katkı kötüdür ve m ile N'nin artan değerleri için bu katkı daha da kötüye gitmektedir. $w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonunun [0,1] aralığında $B = \frac{\pi}{2}$ için tepe noktası $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $B = \pi$ için tepe noktası $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olmaktadır. [0,1] aralığında ağırlık fonksiyonu aldığı değerler göz önüne alındığında, fonksiyona katkının tepe noktalarında olumlu olduğu görülmektedir. $B = \frac{\pi}{2}$'nin $B = \pi$'ye göre daha iyi sonuçlar vermesi birinci bölümdeki gözlemlerimizle uyuşan bir sonuçtur zira [0,1] aralığında artan yapısı ve tepe noktası ele alınan fonksiyonlar ile daha çok örtüşmektedir. Yani tepe noktaları yakınlaştıkça ve ağırlık fonksiyonu ile fonksiyon yapısı uyuştukça fonksiyona katkı daha iyi olmaktadır.

BÖLÜM V

SONUÇ

Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi, çok değişkenli fonksiyonların sayısal olarak elde edilmesinde etkin bir yöntem olduğu görülmektedir. Fonksiyonun yapısına bağlı olarak, ikinci veya üçüncü mertebeden yaklaştırım yapmak sonucu yeterli iyilikte kılmaktadır. Ele alınan ağırlığın yaklaştırımı nasıl etkilediğini görmek maksadıyla dört farklı ağırlık fonksiyonu kullanılarak YBMG açılımları hesaplanmıştır. İlk olarak tamamen toplamsal yapıda olan $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonunun YBMG açılımı hesaplanmıştır. Daha sonra ikinci olarak tamamen çarpımsal yapıda olan $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ fonksiyonu incelenmiştir. Bu incelemelere toplamsal $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^i$ ve çarpımsal $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^i$ ile devam edilmektedir. Bu uygulamalar sonucunda elde edilen yaklaştırımın nasıl sonuçlandığını anlamamız için değişmezlik ölçenlerinin artan m ve N değerlerine karşılık gelen sonuçları tablo halinde verilmiştir. Ele aldığımız fonksiyonlar ve ağırlık fonksiyonlarının bazıları artandır. Tablo sonuçlarına göre ağırlık fonksiyonu ile fonksiyon aynı yapıya sahip olduğunda, yaklaşım iyi sonuçlar vermektedir. Azalan ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerin ele alınan fonksiyona katkısı olumsuzdur. Ayrıca bu genelleştirmeye tepe noktalarının durumu da eklenebilir. Ağırlık fonksiyonları ve başta belirlenen fonksiyonların tepe noktaları birbirine yakın ise f_0, f_i, f_{ij}'lerin ele alınan fonksiyona katkısı olumludur. Son olarak $w_i(x_i) = \frac{B}{1-\cos B}\sin(Bx_i)$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bulunan f_0, f_i, f_{ij}'lerin fonksiyona katkısı da incelendi. Bunun için σ_k'ların, m ve N'nin artan bazı değerleri için karşılıkları ele alındı. Ağırlık fonksiyonunun [0,1] aralığında $B = \frac{\pi}{2}$ ve $B = \pi$ için etkileri de göz önüne alınınca, ağırlık fonksiyonu ile fonksiyonun tepe noktalarının birbirine yakın olması yaklaşıma olumlu etki yapmaktadır. Burada genel ifade ile fonksiyonun yapısına da bağlı olmakla beraber yaklaşım [0,1] aralığında uç noktalarda iyidir. Ele alınan fonksiyon ile ağırlık fonksiyonunun yapısı yani artan, azalan oluşu ile tepe noktalarının yakınlığı arasında benzerlikler gözlenmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Sobol, I.M.: “Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models MMCE”, Vol.1, NO.4, pp., **(1993),** 407.

[2] Saltelli, A.; Sobol, I.M.; Archer, G.E.B.: "Sensitivity Measures, ANOVA- Like and the Use of Bootstrap", J. Statis. Comput. Simul., 58 **(1997)**, 99-120

[3] Sobol, I.M.: "Theorems and Examples on High Dimensional Model Representation, Reliability Engineering and System Safety", 79 **(2003)**, 187-193.

[4] Sobol, I.M.; Kucherernko, S.S.:"Global Sensitivity Indices for Non-lineer Mathematical Models", Wilmott Magazine, 2 **(2005)**, 2-7.

[5] A. Kolmogorov: “On the Representation of Continuous Functions of Several Variables by Superpositions of Continuous Functions of Several Variables and Addition”, Dokl. Akad. Nauk, 114 **(1957)**, pp. 953-956. English Translation American Math. Soc. Transl., 2 (28) **(1963)**, pp.55-59.

[6] Demiralp, M.: “High Dimensional Model Representation and Its Application Varieties”, Mathematical Research, Volume 9, St. Petersburg, Russia, June 23-28 **(2003)**, 146-159.

[7] Rabitz, H.; Alis, O.F.: “Additive and Multiplicate High Dimensional Representation General Foundations of High Dimensional Model Representations”, J. Math. Chem., 25 **(1999)**, 197-233.

[8] Demiralp, M: “Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi, Değişmezlik ve Toplamsallık Ölçenleri, Çarpımsal Gösterilim ve Çarpımsallık Ölçenleri”, 12. Ulusal Mekanik Kongresi, Konya, **(2001)**,147-155.

[9] Rabitz, H.; Alış, Ö.F.: “Efficient İmplementation of High Dimensional Model Representitaons”, J. Math. Chem., 29 **(2001)**, 127-142.

[10] Li, G.; Rosenthal, C.; Rabitz, H.: “High Dimensional Model Representitaons”, J. Phys. Chem. A. 105 **(2001)**, 7765-7777.

[11] Li, G.; Wang, S.W.; Rosenthal, C.; “Rabitz, H.: High Dimensional Model Representitaons Generated from Low Dimensional Data Samples. I. Mp-cut-HDMR”, Math. Chem., 30 **(2001)**, 1-30.

[12] Rabitz, H.; Alis, O.F.: “Additive and Multiplicate High Dimensional

Representation General Foundations of High Dimensional Model Representations", J. Math. Chem., 25 **(1999)**, 197-233.

[13] M. A. Tunga; M. Demiralp: "A Factorized High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyberprismatic Reguler Grid", Appliced Mathematics and computation, 164, **(2005)**, 865-883.

[14] M. Demiralp and H. Rabitz: "Factorized High Dimensional Model Representation of Multivariate Functions", Mathematical Research, Volume 9, St. Petersburg, Russia, June 23-28 **(2003)**.

[15] M. Demiralp and H. Rabitz: "New Progresses in the FHDMR Solution of the Boundary Value Problems of Partial Differential Equations", Research Notes 2002-S-1, **(2002)**.

[16] Demiralp, M.; Civelekoğlu, T.: "An HDMR Application to the Schrödinger's Equation for Free Particles Under An External Field with Dipole Polarization and Vanishing Flux Boundary Conditions", Mathematical Research, Volume 9, St. Petersburg, Russia, June 23-28 **(2003)**,110-121.

[17] Demiralp, M.; Kurşunlu, A.: "Additive and Factorized HDMR Applications to the Multivariate Diffusion Equation Under Vanishing Derivative Boundary Conditions", Mathematical Research, Volume 9, St. Petersburg, Russia, June 23-28 **(2003)**, 315-327.

[18] Demiralp, M.; Tunga, B.; "An Hybrid High Dimensional Model Representation Approximants And Their Utilization in Applications, Mathematical Research", Volume 9, St. Petersburg, Russia, June 23-28 **(2003)**, 438-446.

[19] Demiralp, M; Tunga, M.A.: "Data partitioning Via Generalized HDMR and Multivariate Interpolative Applications", Mathematical Research, Volume 9, St. Petersburg, Russia, June 23-28 **(2003)**, 447-462.

[20] Li, G.; S.-W. Wang; Rosenthal, C ve Rabitz H.; "High Dimensional Model Representations Generated From Low Dimensional Data Samples", I.mp-Cut-HDMR, J.Math. chem.30, 1-30, (**2001).**

[21] Rabitz, H.; Alış, Ö.F.; Shorter, J.; Shim, K.: "Efficient Input-Output Model Representation". Computer Phys.Comm. 117 **(1999)**, 11-20.

[22] Li, G.; Schoendorf, J.; Ho, T.; Rabitz. H.: "Multicut HDMR with an Application to an Ionospheric Model", Journal of Computational Chemistry, 25-9 **(2004),**

1149-1156.

[23] Li, G.; Wang, S.-W.; Rabitz, H.: “Practical Approceaches To Construct RS-HDMR Component Functions”, J. Phys. Chem. A.,106 **(2002)**, 8721-8733.

[24] Li, G.; Rabitz, H.; Wang, S.-W.; Georgopoulos, P.G.: “Correlation Moethod forVariance Reduction of Monte Carlo İntegration in RS-HDMR”, J. Comp. Chem., 24 **(2003)**, 277-283.

[25] Li, G.; Wang, S.-W.; Rabitz, H.: “Practical Approceaches To Construct RS-HDMR Component Functions”, J. Phys. Chem. A.,106 **(2002)**, 8721-8733.

[26] Demiralp, M,; Kanmaz, A.A.: “Symbolic Computer Programming for Generalized High Dimensional Model Representation”, Mathematical Research, Volume 9, St. Petersburg, Russia, June 23-28 **(2003)**, 281-289.

ÖZGEÇMİŞ

21 Haziran 1981 yılında İstanbul’da doğdu. Lise eğitimini Pendik Lisesi’nde tamamladı. 2004 yılında Mimar Sinan Üniversitesi, Matematik bölümünden mezun olduktan sonra Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik programında yüksek lisans yapmaktadır.

T.C.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABUL ve ONAY BELGESİ

Pınar TİRYAKİ'nin YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM YÖNTEMLERİ VE ÇEŞİTLİ AĞIRLIK FONKSİYONLARININ ETKİLERİ Lisansüstü tez çalışması, M.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10.03.08 tarih ve 2008/07-41 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programında YÜKSEK LİSANS/DOKTORA Tezi olarak Kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Abdulbaki BAYKARA (Marmara Üniversitesi)

1. Üye : Yrd. Doç.Dr. Bülent YILMAZ (Marmara Üniversitesi)

2. Üye : Yrd. Doç.Dr. Alper TUNGA (Bahçeşehir Üniversitesi) A. Tunga

Tezin Savunulduğu Tarih : 08.04.2008

ONAY

M.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05-05-2008 tarih ve 2008/12-11 sayılı kararı ile Pınar Tiryaki'nin Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programında Y.Lisans (MSc.) / Doktora (Dr. PhD.) derecesi alması onanmıştır.

Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Sevil ÜNAL