

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMINI VEREN GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜME
VE ZAYIF SÜREKLİLİK TİPLERİ**

FİGEN DOĞDU
(MATEMATİK ÖĞRETMENİ)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEORİK MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Prof. Dr. SEMİN AKDOĞAN

İSTANBUL 2006

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMINI VEREN GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜME
VE ZAYIF SÜREKLİLİK TIPLERİ**

FİGEN DOĞDU
(141103020010241)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEORİK MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Prof. Dr. SEMİN AKDOĞAN

İSTANBUL 2006

ÖNSÖZ

Sürekliliğin ayrışımı Reel analizin klasik problemlerinden birisidir. Sürekliliğin zayıf veya kuvvetli bir çok farklı formu verilmiştir. 1961 de Levine bir fonksiyonun sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşulu bu fonksiyonun aynı zamanda zayıf süreklilik ve zayıf-* süreklilik şartlarını gerçekleştirmesi şeklinde vermiştir. Norman Levine'in bu çalışması zamanla Genel Topolojinin bir çok dalına öncülük etmiştir. David Alan Rose bu ifadeyi yani zayıf* süreklilik şartını, yerel zayıf* süreklilik şartı ile değiştirerek genelleştirmiş, ardından başka bir çalışmasında zayıf sürekliliği bir genelleştirilmiş açık küme tipinin belirlediği zayıf α -süreklilik ile değiştirmiştir. Bu ilk çalışmaların ardından sürekliliğin ve açık – kapalı küme kavramlarının genelleştirilmesi topolojinin popüler bir alt dalı olmuştur. Bu öncü çalışmaları sürekliliğin farklı formlarını veren yayınlar takip etmiştir.

Amaç sürekliliğin parçalanışını veren temel çalışmaları inceleyerek bu konunun bir sınıflandırmasını vermek ve genelleştirilmiş açık (kapalı) küme kavramları ile sürekliliğin varyantları arasındaki ilişkileri incelemektir.

Bu tezin hazırlanmasında, hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen ve çalışmamı yapabilmem için bana fırsat veren değerli danışmanım Sn Prof. Dr. Semin AKDOĞAN'a teşekkürlerimi ifade etmek isterim. Ayrıca gerekli kaynak ve materyallere ulaşmamda yol gösteren Sn. Dr. Uğur ŞENGÜL'e teşekkür ederim.

Temmuz 2006

Figen DOĞDU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
SUMMARY.....	IV
SEMBOL LİSTESİ	V
BÖLÜM I.....	1
BÖLÜM II.....	7
BÖLÜM III.....	16
BÖLÜM IV.....	19
BÖLÜM V.....	31
BÖLÜM VI.....	38
BÖLÜM VII.....	52
KAYNAKLAR.....	56
ÖZGEÇMİŞ.....	58

ÖZET

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, çalışmalarımız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, N.Levine'nin tanımladığı ve daha sonra T.Noiri , D.A. Rose ve J.Chew'in araştırdıkları zayıf süreklilik ve zayıf sürekliliğin sağladığı bazı şartlar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde N.Levine tarafından tanımlanan zayıf* süreklilik verilmiştir.

Dördüncü bölümde A.S. MASHOUR ve arkadaşları tarafından tanımlanan ön açık küme, ön sürekli fonksiyon, α -küme, α - süreklilik, α -açık fonksiyon kavramları ve T.Husain tarafından tanımlanan Husain anlamında hemen hemen süreklilik ele alınmıştır.

Beşinci bölümde M.K. Singal ve A.r. Singal tarafından tanımlanan Singal anlamında hemen hemen süreklilik verilmiştir.

Altıncı bölümde N.Levine tarafından tanımlanan yarı süreklilik, yarı açık küme kavramları incelenmiştir.

Yedinci bölümde ise zayıf sürekliliğin, bu çalışmada incelediğimiz süreklilik çeşitleri ile karşılaştırılması yapılmıştır.

Temmuz 2006

Figen DOĞDU

SUMMARY

This study consists of seven chapters.

In the first chapter, the basic concepts which are necessary for our work are given

In the second chapter the weak continuity defined by N. Levine , T.Noiri and D.A.Rose and J.Chew and some conditions which are provided by this weak continuity are examined.

In the third chapter the weak* continuity defined by N.Levine is given.

In the fourth chapter, the concepts of pre-open set, pre-continuous function, α -set, α -continuity, α -open function defined by A.S. Mashour and his friends and almost-continuous which means Husan defined by T.Husan.

In the fifth chapter, Almost-continuity which means Singal defined by M.K.Singal and A.r.Singal is given.

In the sixth chapter,The concepts of semi-continuity,semi-open set, defined by N.Levine are examined.

In the seventh chapter,the weak continuity and the types of continuity which are studied in this work are compared.

Temmuz 2006

Figen DOĞDU

SEMBOL LİSTESİ

\cup Birleşim

\cap Ara kesit

\subset Alt küme

$\not\subset$ Alt küme değildir

\setminus Küme farkı

\forall Her

\exists En az

\in Eleman

\notin Eleman değil

\ni Öyle ki

\neq Eşit değil

\emptyset Boş küme

A^- A kümesinin kapanışı

A^\sim Yığılma noktası

A° A kümesinin içi

∂A A kümesinin sınırı

A' A kümesini bütünleyeni

f^{-1} f fonksiyonun tersi

$[x,y]$ Son noktaları x ve y olan doğru parçası

(x,y) x ve y noktalarının belirlediği açık doğru parçası

$[x,y]$ x ve y noktalarının belirlediği yarı açık veya yarı kapalı doğru parçası

BÖLÜM I

Bu tezde X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu tek değerli bir fonksiyon olarak kabul edilecektir.

Çalışmamız boyunca ele alınan bazı temel tanım ve teoremler aşağıda kısaca verilmiştir.

1.1. Tanım: X boş olmayan bir küme, τ da $P(X)$ kuvvet kümesinin bir alt kümesi olsun. $\tau \subset P(X)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ailesinin her elemanına X 'de bir açık küme [11] denir.

a) \emptyset ve X , τ nun elemanıdır.

b) τ nun sonlu yada sonsuz sayıdaki elemanlarının birleşimi τ ya aittir.

c) τ nun sonlu sayıdaki elemanlarının kesişimi τ ya aittir.

1.2. Tanım: Yukarıdaki aksiyomları sağlayan τ ailesine X kümesi üzerinde topolojik bir yapı yada kısaca topoloji denir ve (X, τ) ikilisine ise topolojik uzay [11] denir. (X, τ) topolojik uzayını kısaca, X topolojik uzayı olarak alacağız.

1.3. Tanım: (X, τ) topolojik uzayı ve bir $x \in X$ noktası verilsin. x noktasını içeren her $A \subset X$ açık alt kümesini kapsayan herhangi bir $V \subset X$ alt kümesine, x noktasının bir komşuluğu [11] denir ve x noktasının komşuluklar ailesi $\kappa(x)$ ile gösterilir.

1.4. Tanım: (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in A$ noktası verilsin. Eğer A kümesi x noktasının bir komşuluğu ise, x noktasına, A kümesinin bir iç noktası denir. A kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin içi [11] denir ve A° ile gösterilir.

1.5. Tanım: (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. x noktasının her komşuluğunda, A nın en az bir elemanı varsa, x noktasına A kümesinin bir kapanış noktası (değme noktası) [11] denir ve A kümesinin bütün kapanış noktalarının kümesi A^- ile gösterilir. Bu tanımı sembolik olarak:

$x \in A^- \Leftrightarrow \forall T \in \tau, x \in T$ için $T \cap A \neq \emptyset$ şeklinde yazabiliriz.

1.6. Tanım: (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin kapanışına ait fakat içine ait olmayan noktaların kümesine A kümesinin sınırı [28] denir ve $\partial A = A^- \setminus A^\circ$ ile gösterilir.

1.7. Tanım: (X, τ) ve (Y, ψ) topolojik uzayları $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer $f(x)$ noktasının her $V \subset Y$ komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasının bir $U \subset X$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir [28]. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise f ye X üzerinde sürekli fonksiyon denir. Bu tanımı sembolik olarak:

f fonksiyonu $x \in X$ noktasında sürekli $\Leftrightarrow \forall V \in \kappa[f(x)]$ için $\exists U \in \kappa(x) \ni f(U) \subset V$ şeklinde yazabiliriz.

1.1. Teorem: [1]

(X, τ) ve (Y, δ) iki topolojik uzay olmak üzere;

$f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

- f fonksiyonu süreklidir.
- Her $A \subset X$ kümesi için $f(A^-) \subset (f(A))^-$
- Y nin her kapalı alt kümesinin ters görüntüsü, X de kapalıdır.
- Y nin her açık alt kümesinin ters görüntüsü, X de açıktır.

İspat: a) \Rightarrow b) $\forall A \subset X$ alalım. $\forall y \in f(A^-) \Rightarrow y \in (f(A))^-$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall y \in f(A^-) \Rightarrow \exists x \in A^- \ni y = f(x)$ olur. f fonksiyonu sürekli olduğundan $y = f(x) \in (f(A))^-$ olur.

b) \Rightarrow c) $\forall K \in \delta'$ alalım. (K kapalı küme)

$F \subset X$ için $f^{-1}(K) = F$ diyelim. $F \subset X$ b) den dolayı $f(F^-) \subset (f(F))^- = (f(f^{-1}(K)))^- \subset K^- = K$

$f(F^-) \subset K$ olur. $F^- \subset f^{-1}(f(F^-)) \subset f^{-1}(K) = F \subset F^-$. Buradan $F = F^-$ ve $F \in \tau'$ elde edilir. Dolayısıyla $F = f^{-1}(K) \in \tau'$ olur.

c) \Rightarrow d) $\forall A \in \delta$ alalım. Buradan $A' \in \delta'$ olur. c) den dolayı $f^{-1}(A') \in \tau'$. Buradan $(f^{-1}(A'))' \in \tau$ olur. $(f^{-1}(A'))' = (f^{-1}(A))' = f^{-1}(A)$ olduğundan $f^{-1}(A) \in \tau$ elde edilir.

d) \Rightarrow a) $\forall V \in \kappa(f(x))$ için $f^{-1}(V) \in \kappa(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall V \in \kappa(f(x)) \Rightarrow \exists A \in \delta \ni f(x) \in A \subset V$ dir.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(V)$ dir. d) den dolayı $f^{-1}(A) \in \tau$ ve $f^{-1}(A) \subset X$ olduğundan $f^{-1}(V) \in \kappa(x)$ olur. Bu da f fonksiyonun her $x \in X$ noktasında sürekli olduğunu gösterir.

1.2. Teorem: [28]

(X, τ) ve (Y, δ) topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun

f süreklidir $\Leftrightarrow \forall A \subset Y$ için $(f^{-1}(A))^{-} \subset f^{-1}(A^{-})$

İspat : \Rightarrow f sürekli olsun $\forall A \subset Y$ için $(f^{-1}(A))^{-} \subset f^{-1}(A^{-})$ olduğunu göstermeliyiz.

$A \subset A^{-} \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A^{-})$. $A^{-} \in \delta'$ alalım, f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(A^{-}) \in \tau'$ dur. $f^{-1}(A) \subset (f^{-1}(A))^{-} \subset f^{-1}(A^{-})$ elde edilir.

\Leftarrow : $\forall A \subset Y$ için $(f^{-1}(A))^{-} \subset f^{-1}(A^{-})$ olsun.

$\forall B \in \delta'$ için $f^{-1}(B) \in \tau'$ olduğunu göstermeliyiz. Yani $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^{-}$ eşitliğini göstermeliyiz.

1) $f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B))^{-}$ daima sağlanır.

$B \in \delta' \Rightarrow B \subset Y$ olduğundan $(f^{-1}(B))^{-} \subset f^{-1}(B^{-})$. B kapalı küme olduğundan $B^{-} = B$ dir.

Dolayısıyla 2) $(f^{-1}(B))^{-} \subset f^{-1}(B^{-}) \subset f^{-1}(B)$ dir. 1) ve 2) ifadelerinden $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^{-}$ olur.

Yani $f^{-1}(B) \in \tau'$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonu süreklidir.

1.3 Teorem: [28]

(X, τ) ve (Y, δ) topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun

f süreklidir $\Leftrightarrow \forall B \subset Y$ için $f^{-1}(B^{\circ}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}$

İspat : \Rightarrow f fonksiyonu sürekli olsun

$\forall B \in \delta$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ dur. $B^{\circ} \subset B \Rightarrow f^{-1}(B^{\circ}) \subset f^{-1}(B)$

$(f^{-1}(B))^{\circ} \subset f^{-1}(B)$, B° açık küme ve f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(B^{\circ}) \in \tau$ olur.

Buradan $f^{-1}(B^{\circ}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}$ olur.

\Leftarrow : $\forall B \subset Y$ için $f^{-1}(B^{\circ}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}$ olsun $\forall B \in \delta$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ olduğunu göstermeliyiz.

Yani $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^{\circ}$ eşitliğini göstermeliyiz. 1) $(f^{-1}(B))^{\circ} \subset f^{-1}(B)$ daima sağlanır.

$B \subset Y$ için $f^{-1}(B^{\circ}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}$ dir. $B^{\circ} \subset B$ olduğundan 2) $f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}$ dir.

1) ve 2) den $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^{\circ}$ elde edilir. Yani $f^{-1}(B) \in \tau$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonu süreklidir.

1.4. Teorem: [28] Bir topolojik uzayda bir kümenin açık olması için gerek ve yeter koşul, o kümenin kendi noktalarının komşuluğu olmasıdır.

İspat: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in A$ için $A \in \kappa(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

\Rightarrow $A \in \tau$ olsun. $\forall x \in A$ için $x \in A \subset A$ olduğundan $A \in \kappa(x)$ olur.

\Leftarrow : $\forall x \in A$ için $A \in \kappa(x)$ olsun. Bu durumda $\exists T_x \in \tau \ni x \in T_x \subset A$ dir. $T_x \in \tau$ için $\bigcup_{x \in A} T_x = A \Rightarrow A \in \tau$

1.8. Tanım: (X, τ) topolojik uzay ve herhangi iki $A, B \subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer $A^- \cap B \neq \emptyset$ veya $A \cap B^- \neq \emptyset$ ise A ve B kümelerine ayrık olmayan iki küme denir. Eğer $A^- \cap B = \emptyset$ ve $A \cap B^- = \emptyset$ ise A ve B ye ayrık iki küme [28] denir.

1.9 Tanım: (X, τ) topolojik uzay olsun. X uzayı, ayrık ve boştan farklı iki kümenin birleşimine eşit ise X uzayına bağlantısız uzay [28] denir. Eğer X uzayı, boştan farklı ayrık açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa X uzayına bağlantılı uzay [28] denir. Bu tanımı sembolik olarak :

(X, τ) uzayı bağlantısız $\Leftrightarrow (\exists A, B \in \tau, A \cap B = \emptyset) : (X = A \cup B)$ şeklinde yazabiliriz.

1.10 Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. Eğer $A^{-\circ} = \emptyset$ ise A kümesi X uzayında hiçbir yerde yoğun değildir denir. [8]

1.11 Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in alt kümelerinin bir $(A_i)_{i \in I}$ ailesi verilsin. Eğer $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ ise $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir örtülüğü denir. Eğer her $i \in I$ için A_i kümeleri

X uzayının açık alt kümeleri ise $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir açık örtülüğü denir. Eğer $J \subset I$ sonlu $X = \bigcup_{i \in J} A_i$ ise X uzayının $(A_i)_{i \in J}$ örtülüğüne X uzayının sonlu alt örtülüğü denir. Eğer

$(A_i)_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi, X uzayını örterse bu alt aileye X in bir alt örtülüğü denir. [2]

1.12 Tanım: (X, τ) topolojik uzayı verilsin Eğer X uzayının her açık örtülüğünün sonlu bir alt örtülüğü varsa X uzayına kompakt uzay [28] denir.

1.13 Tanım: (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer (A, τ_A) alt uzayı kompakt ise A kümesine X uzayının kompakt bir alt kümesi [28] denir.

1.14 Tanım: (X, τ) topolojik uzay ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin her açık örtülüşü, kapanışları A kümesini örten sonlu bir alt aileyi kapsarsa A kümesine kapanış kompakt (closure compact) [4] denir.

1.15 Tanım: (X, τ) topolojik bir uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktasını içeren $V \subset X$ açık kümesi için $W^- \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $W \subset V$ açık kümesi varsa, X uzayına regüler (düzenli) uzay [11] denir.

1.16 Tanım: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A^{-\circ} = A$ oluyorsa A ya regüler açık küme, $A^{\circ-} = A$ oluyorsa A ya regüler kapalı küme denir. [6]

1.17 Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için $x \in U$, $y \in V$ ve $U^- \cap V^- = \emptyset$ olacak şekilde $U \subset X$ ve $V \subset X$ açık kümeleri varsa X uzayına Urysohn Uzayı [18] denir.

1.18 Tanım: $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $g(x) = (x, f(x))$ olarak tanımlanan $g: X \rightarrow X \times Y$ fonksiyonuna f nin grafik fonksiyonu denir. [18]

1.19 Tanım: (X, τ) topolojik uzay ve bir $A \subset X$ alt uzayı verilsin. Her $a \in A$ için $r(a) = a$ olarak tanımlanan, sürekli bir $r: X \rightarrow A$ fonksiyonu varsa A ya X in geriye dönüşü (retract) denir. r fonksiyonuna X den A ya bir geriye dönüşüm (retraction) denir. [18]

1.20 Tanım: (X, τ) topolojik uzay ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A üzerindeki $\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$ topolojisine A nın alt uzay (relatif) topolojisi denir. (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) uzayının bir alt uzayı denir. [28]

1.21 Tanım: $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \psi)$ fonksiyonu ve $A \subset X$ kümesi verilsin. Her $x \in A$ için $f|_A(x) = f(x)$ şeklinde tanımlanan $f|_A: (A, \tau_A) \rightarrow (Y, \psi)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun A ya kısıtlanmış fonksiyonu denir. [28]

1.22 Tanım: $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \psi)$ fonksiyonu verilsin. Her $U \subset X$ açık kümesi için $f(U)$ kümesi Y de açık ise, f fonksiyonuna açık fonksiyon denir. [28]

1.23 Tanım: $B \subset X$ kümesi verilsin. B kümesinin her yerde yoğun olması için gerek ve yeterli şart $B^- = X$ olmasıdır. Eğer $A \subset B^-$ ise B kümesi A kümesi içinde her yerde yoğundur denir.

1.24 Tanım: [1] (X, τ) bir topolojik uzay $A \subset X$ bir alt küme olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktasını içeren her T açık kümesi A kümesinin x den farklı en az bir noktasını içeriyorsa, x noktası A kümesinin bir yığılma noktasıdır denir. A nın yığılma noktalarının kümesi A^\sim ile gösterilir. Bu tanımı sembolik olarak :

$x \in X, x \in A^\sim \Leftrightarrow \forall T \in \tau \exists x \in T$ için $(T \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ şeklinde yazabiliriz.

BÖLÜM II

Aşağıdaki zayıf süreklilik türünü N.Levine [12] 1961 yılında tanımlamıştır.

2.1. Tanım: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi varsa, f fonksiyonuna zayıf sürekli [12] denir.

1961 yılında N.Levine [12], zayıf sürekli fonksiyonların aşağıdaki karakterizasyonunu vermiştir.

2.1 Teorem: [12] X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun zayıf sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y 'deki her V açık kümesi için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ olmasıdır.

İspat: \Rightarrow f fonksiyonu zayıf sürekli olsun. Herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi ve $x \in f^{-1}(V)$ noktası verilsin. Buradan $f(x) \in V$ dir. f zayıf sürekli olduğundan $x \in U$ ve $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $x \in U \subset f^{-1}(V^-)$ olur. Böylece $x \in (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ olur. O halde $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ dir.

\Leftarrow : Bir $x \in X$ ve $f(x)$ noktasını içeren bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. Hipotez gereğince $x \in f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ dir.

$U = (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ diyelim. Buradan $x \in U$ ve $f(U) = f((f^{-1}(V^-))^{\circ}) \subset f(f^{-1}(V^-)) \subset V^-$ olur.

2.1 Tanım gereğince f zayıf sürekli dir.

2.1. Sonuç: [12]: Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu zayıf sürekli ise bu durumda X deki bir A açık kümesi ve Y deki her V açık kümesi için $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V^-) \cap A$ 'dır.

İspat: $V \subset Y$ herhangi bir açık küme olsun. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan 2.1 Teorem [12] gereğince $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ olur.

$f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ olduğundan $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V^-) \cap (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ elde edilir.

$A = (f^{-1}(V^-))^{\circ}$ diyelim. Buradan $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V^-) \cap A$ elde edilir.

2.2 Teorem: [18] Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu zayıf sürekli ise bu durumda her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^{-} \subset f^{-1}(V^{-})$ dir.

İspat: Bir $x \in ((f^{-1}(V))^{-} \setminus f^{-1}(V^{-}))$ noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu $x \in (f^{-1}(V))^{-}$ ve $x \notin f^{-1}(V^{-})$ olmasını gerektirir. $x \notin f^{-1}(V^{-})$ ifadesinin f altındaki görüntüsü alınırsa $f(x) \notin V^{-}$ olur. Dolayısıyla kapanış noktası tanımından $W \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $f(x)$ 'i içeren bir $W \subset Y$ açık kümesi vardır. V açık bir küme ve $W \subset W^{-}$ olduğundan $V \cap W^{-} = \emptyset$ olur. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan $f(U) \subset W^{-}$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Böylece $f(U) \cap V = \emptyset$ elde edilir. Diğer taraftan $x \in (f^{-1}(V))^{-}$ olduğundan $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ olur. Bu ifadenin f altındaki görüntüsü alınırsa $f(U) \cap V \neq \emptyset$ olur böylece bir çelişki elde edilmiş olur. Yani $(f^{-1}(V))^{-} \subset f^{-1}(V^{-})$ dir.

1974 yılında T.Noiri [18] tarafından verilen yukarıdaki teorem 1982 yılında Espelie ve Joseph [7] tarafından geliştirilerek zayıf sürekli fonksiyonların aşağıdaki karakterizasyonu verilmiştir.

2.3 Teorem: [7] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun zayıf sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y 'deki her V açık kümesi için $(f^{-1}(V))^{-} \subset f^{-1}(V^{-})$ dir.

İspat: \Rightarrow 2.2 Teorem [18] den açıktır.

\Leftarrow : Herhangi bir $x \in X$ noktasını alalım. $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. Bu durumda $f(x) \notin (Y \setminus V^{-})^{-}$ ve $x \notin f^{-1}((Y \setminus V^{-})^{-})$ olur. $Y \setminus V^{-}$ kümesi, Y de açık olduğundan hipotez gereği $(f^{-1}((Y \setminus V^{-})^{-}))^{-} \subset f^{-1}((Y \setminus V^{-})^{-})$ olur. Buradan $x \notin (f^{-1}((Y \setminus V^{-})^{-}))^{-}$ elde edilir. Kapanış noktası tanımından $U \cap (f^{-1}((Y \setminus V^{-})^{-})) = \emptyset$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $U \cap (X \setminus f^{-1}(V^{-})) = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $U \subset f^{-1}(V^{-})$ elde edilir. Böylece $f(U) \subset V^{-}$ olur. O halde f fonksiyonu zayıf süreklidir.

Şimdi zayıf sürekli bir fonksiyonun diğer karakterizasyonları için, 1968 yılında N.V.Velicko [27] tarafından tanımlanan θ - kapalı küme tanımını verelim.

2.2.Tanım: [27] (X, τ) topolojik uzay, $A \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. x noktasını içeren her $V \subset X$ açık kümesi için $A \cap V^- \neq \emptyset$ ise x noktasına A kümesinin θ - kapanış noktası denir ve $x \in A_\theta^-$ ile gösterilir. Eğer $A = A_\theta^-$ ise A kümesine θ - kapalı küme [27] denir.

Uyarı: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A^- \subset A_\theta^-$ olduğu açıktır. Ayrıca A kümesi, kapalı ise bu durumda $A^- = A_\theta^-$ dır.

2.4 Teorem [7] :

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \psi)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- a) f fonksiyonu zayıf süreklidir.
- b). Her $A \subset Y$ için $(f^{-1}((A_\theta^-)^0))^- \subset f^{-1}(A_\theta^-)$
- c) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}((V^-)^0))^- \subset f^{-1}(V^-)$
- d) Her $V \subset Y$ regüler kapalı kümesi için $(f^{-1}(V^0))^- \subset f^{-1}(V)$
- e) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$

İspat: a) \Rightarrow b) Her $A \subset Y$ kümesi ve $x \in (X \setminus f^{-1}(A_\theta^-))$ noktası verilsin. Buradan $f(x) \notin A_\theta^-$ dır. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan, $f(B) \subset (Y \setminus A_\theta^-)^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $B \subset X$ açık kümesi vardır. Böylece $f(B) \cap (A_\theta^-)^0 = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $B \cap f^{-1}((A_\theta^-)^0) = \emptyset$ dır. Buradan $x \notin (f^{-1}((A_\theta^-)^0))^-$ olur.

b) \Rightarrow c) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $V^- = V_\theta^-$ olduğundan çıkar.

c) \Rightarrow d) Her $V \subset Y$ regüler kapalı kümesini alalım. Buradan c) gereğince;

$$(f^{-1}(V^0))^- = (f^{-1}((V^0)^-))^0 \subset f^{-1}((V^0)^-) = f^{-1}(V) \text{ olur}$$

d) \Rightarrow e) Her $V \subset Y$ açık kümesi için V^- regüler kapalı olduğundan

$$(f^{-1}(V))^- \subset (f^{-1}(V^-))^0 \subset f^{-1}(V^-) \text{ olur.}$$

e) \Rightarrow a) 2.3. Teoremde elde edilir.

D.A. Rose [24] tarafından verilen zayıf sürekli fonksiyonun bir diğer karakterizasyonu aşağıdaki teoremle verilmiştir.

2.5.Teorem: [24] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun zayıf sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $V \in \beta$ için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))^0$ olacak şekilde Y üzerindeki topolojinin bir β açık tabanının olmasıdır.

İspat: \Rightarrow 2.1 Teorem [12] den açıktır.

\Leftarrow : Bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin.

$V = \bigcup_{B \in \beta} B$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(x) \in B$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ açık kümesi

vardır. Hipotez gereğince $x \in f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B^-))^{\circ}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}\left(\bigcup_{B \in \beta} B\right) = \bigcup_{B \in \beta} f^{-1}(B) \subset \bigcup_{B \in \beta} (f^{-1}(B^-))^{\circ} \subset \left(\bigcup_{B \in \beta} f^{-1}(B^-)\right)^{\circ} = \\ &= (f^{-1}\left(\bigcup_{B \in \beta} B^-\right))^{\circ} = (f^{-1}\left(\left(\bigcup_{B \in \beta} B\right)^-\right))^{\circ} = (f^{-1}(V^-))^{\circ} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde 2.1 Teorem [12] gereğince f fonksiyonu zayıf süreklidir.

Şimdi de süreklilik ile zayıf sürekliliği karşılaştıralım.

2.6. Teorem: [12] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ise zayıf süreklidir.

İspat: Herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır.

$V \subset V^-$ ve $f(U) \subset V^-$ olur. Böylece f fonksiyonu zayıf süreklidir.

Zayıf sürekli fonksiyonların, genellikle sürekli olması gerekmez. Bu aşağıdaki örnekte verilmiştir.

2.1 Örnek: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu $f(1)=3, f(2)=4, f(3)=2, f(4)=1$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f zayıf süreklidir. Fakat $1 \in X$ için $f(1)=3 \in V = \{2,3\} \in \tau$ ve $1 \in U = \{1,2\} \in \tau$ için $f(U) = \{3,4\}$ olduğundan $f(U) \not\subset V$ elde edilir. O halde f fonksiyonu $x=1$ noktasında sürekli değildir.

Değer uzayının regüler olması durumunda süreklilik ile zayıf süreklilik çakışmaktadır.

2.7. Teorem: [12] Y regüler uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun zayıf sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

İspat: \Leftarrow : 2.6 Teorem [12] den açıktır.

: \Rightarrow Bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin.

Y regüler uzay olduğundan $f(x) \in W \subset W^- \subset V$ olacak şekilde bir $W \subset Y$ açık kümesi vardır. f fonksiyonu zayıf sürekliliğinden $f(U) \subset W^- \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Dolayısıyla $x \in X$ olmak üzere $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Böylece f fonksiyonu süreklidir.

Zayıf sürekliliğin özelliklerini inceleyelim. Öncelikle zayıf sürekliliğin fonksiyonların kısıtlanmış fonksiyonlarla ilgisini araştıralım.

2.8. Teorem: [20] Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu zayıf sürekliliği ve A , X 'in bir alt kümesi ise bu durumda $f|_A: A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu zayıf sürekliliği.

İspat: V, Y de herhangi bir açık küme olsun. f zayıf sürekliliğinden 2.3 Teorem [7] gereğince $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$ elde edilir. Buradan;

$$((f|_A)^{-1}(V))_A^- = (f^{-1}(V) \cap A)_A^- \subset (f^{-1}(V))^- \cap A \subset f^{-1}(V^-) \cap A = (f|_A)^{-1}(V^-)$$

olur. Böylece $f|_A$ kısıtlanmış fonksiyonunun zayıf sürekliliği görülmüştür.

2.2. Sonuç: [20] Zayıf sürekliliği bir fonksiyonun açık bir kümeye kısıtlanması zayıf sürekliliği.

İspat: 2.8. Teorem [20] den açıktır.

Zayıf sürekliliğin fonksiyonların bileşkesi zayıf sürekliliği değildir. Ancak aşağıdaki teoremler vardır.

2.9. Teorem: [20] Eğer $f: X \rightarrow Y$ zayıf sürekliliği ve $g: Y \rightarrow Z$ fonksiyonu sürekliliği ise bu durumda $g \circ f$ bileşke fonksiyonu zayıf sürekliliği.

İspat: Bir $x \in X$ noktası ve $(g \circ f)(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Z$ açık kümesi verilsin. g fonksiyonu sürekliliğinden $g^{-1}(V)$ kümesi Y 'de açıktır. f zayıf sürekliliği fonksiyon olduğundan $f(U) \subset (g^{-1}(V))^-$ olacak şekilde x noktasını içeren $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan, $U \subset f^{-1}((g^{-1}(V))^-) \subset f^{-1}(g^{-1}(V^-))$ elde edilir. Böylece $U \subset f^{-1}(g^{-1}(V^-))$ ve dolayısıyla $(g \circ f)(U) \subset V^-$ olur. O halde $g \circ f$ bileşke fonksiyonu zayıf sürekliliği.

2.10 Teorem: [20] Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve $g: Y \rightarrow Z$ fonksiyonu zayıf sürekli ise bu durumda $g \circ f$ bileşke fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat: Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Z$ açık kümesi verilsin. g fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan $g(U) \subset V^-$ olacak şekilde $y \in Y$ noktasını içeren bir $U \subset Y$ açık kümesi vardır. Burada $g(y) = (g \circ f)(x)$ ve $U \subset g^{-1}(V^-)$ olur. Her iki tarafın f^{-1} altındaki görüntüsü alınırsa; $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(g^{-1}(V^-))$ elde edilir. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi açıktır. $f^{-1}(U) = T$ diyelim. Buradan $T \subset (g \circ f)^{-1}(V^-)$ olur. Böylece $(g \circ f)(T) \subset V^-$ elde edilir.

O halde $g \circ f$ bileşke fonksiyonu zayıf süreklidir.

Bir fonksiyon zayıf sürekli ise grafik fonksiyonu da zayıf süreklidir. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

2.11. Teorem: [18] $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $g: X \rightarrow X \times Y$ fonksiyonu her $x \in X$ noktası için $g(x) = (x, f(x))$ şeklinde tanımlanan f 'nin grafik fonksiyonu olsun. Bu durumda g fonksiyonunun zayıf sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun zayıf sürekli olmasıdır.

İspat: \Rightarrow Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesini alalım. Bu durumda $X \times V$, $X \times Y$ de $g(x)$ 'i içeren bir açık kümedir..

g grafik fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan $g(U) \subset (X \times V)^- = X \times V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. g fonksiyonu f 'nin grafik fonksiyonu olduğundan $f(U) \subset V^-$ olur. O halde f fonksiyonu zayıf süreklidir.

\Leftarrow : Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $g(x)$ noktasını içeren $X \times Y$ 'deki herhangi bir W açık kümesini alalım. Bu durumda $g(x) = (x, f(x)) \in R \times V \subset W$ olacak şekilde $x \in R \subset X$ ve $f(x) \in V \subset Y$ açık kümeleri vardır.

f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan $U \subset R$ ve $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Böylece $g(U) \subset R \times V^- \subset (R \times V)^- \subset W^-$ elde edilir. O halde g fonksiyonu zayıf süreklidir.

2.12. Teorem: [18] $A \subset X$ ve $f: X \rightarrow A$ fonksiyonu, X uzayından A kümesi üzerine bir zayıf sürekli geriye dönüşüm olsun. Eğer X Hausdorff uzayı ise bu durumda A , X 'in kapalı bir alt kümesidir.

İspat: A kümesinin kapalı olmadığını varsayalım. Bu durumda $A^- \not\subset A$ olur. Dolayısıyla bir $x \in (A^- \setminus A)$ noktası vardır. f fonksiyonu zayıf sürekli geriye dönüşüm olduğundan $f(x) \neq x$ elde edilir. X Hausdorff uzayı olduğundan $x \in U$ ve $f(x) \in V$ olacak şekilde ayrık, açık U ve V kümeleri vardır. Böylece $U \cap V^- = \emptyset$ elde edilir. W , x noktasını içeren X deki herhangi bir açık küme olsun. Bu durumda $U \cap W$, x noktasını içeren bir açık kümedir ve dolayısıyla $x \in A^-$ olduğundan $(U \cap W) \cap A \neq \emptyset$ olur. Buradan bir $y \in U \cap W \cap A$ noktası vardır. $y \in A$ olduğundan $f(y) = y \in U$ ve böylece $f(y) \notin V^-$ olur. Bu ise $f(W) \not\subset V^-$ olması demektir. Bu da f 'nin zayıf sürekli geriye dönüşüm olmasıyla çelişir. O halde A kümesi X 'de kapalı bir kümedir.

Bağlantılık, zayıf sürekli fonksiyonlarla korunur. Bu durum aşağıdaki teoreme verilmiştir.

2.13 Teorem: [18]: X bağlantılı bir uzay ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu örten ve zayıf sürekli ise bu durumda Y uzayı da bağlantılıdır.

İspat: Y uzayının bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ve $V_1 \cup V_2 = Y$ olacak şekilde boş olmayan $V_1 \subset Y$ ve $V_2 \subset Y$ açık kümeleri vardır.

Buradan $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$ ve $f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = X$ elde edilir. f fonksiyonu örten olduğundan $j=1,2$ için $f^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ olur. Teorem 2.1 gereğince, f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan $f^{-1}(V_j) \subset (f^{-1}(V_j^-))^\circ$ olur. Y bağlantısız uzay olduğundan, V_j kümeleri açık ve aynı zamanda kapalı olup $f^{-1}(V_j) \subset (f^{-1}(V_j))^\circ$ elde edilir.

$(f^{-1}(V_j))^\circ \subset f^{-1}(V_j)$ olduğundan, $j=1,2$ için $f^{-1}(V_j)$ kümeleri X içinde açık olur. Bu ise X uzayının bağlantısız olmasıyla çelişir. O halde Y uzayı bağlantılıdır.

Kompakt bir kümenin zayıf sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü, kapanış kompakttır. Bu aşağıdaki teoremle verilmiştir. Fakat biz öncelikle kompakt uzay ve kompakt küme tanımını verelim.

2.3 Tanım: a) (X, τ) bir topolojik uzay ve ψ , X 'in örtülüşü olsun. Eğer ψ 'nin her elemanı bu uzayda açık ise ψ 'ye bir açık örtülüş adı verilir.

b) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her açık örtülüşünün sonlu bir alt örtülüşü varsa bu topolojik uzaya kompakttır denir.

c) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer (A, τ_A) alt uzayı kompakt ise A kümesine bu topolojik uzayda kompakttır denir.

2.14 Teorem: [4] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu zayıf süreklili ve A , X 'de kompakt bir küme olsun. Bu durumda $f(A)$, Y de kapanış kompakt bir alt kümedir.

İspat: ψ , $f(A)$ nın açık bir örtülüşü olsun. $\forall \sigma = \{V \in \psi: V \cap f(A) \neq \emptyset\}$ diyelim. Bu durumda σ ailesi $f(A)$ nın bir açık örtülüşüdür. $\forall k \in A$ ve bazı $V_k \in \sigma$ kümeleri için $f(k) \in V_k$ dır. f fonksiyonu zayıf süreklili olduğundan $f(U_k) \subset V_k^-$ olacak şekilde X de k yi içeren bir U_k açık kümesi vardır. Buradan $\{U_k: k \in A\}$ ailesi, A nın bir açık örtülüşü ve dolayısıyla A_0 , A nın sonlu bir alt kümesi olmak üzere A nın sonlu bir $\{U_k: k \in A_0\}$ alt örtülüşü vardır.

Böylece $\{(V_k^-): k \in A_0\}$ ailesi $f(A)$ kümesini örter. O halde $f(A)$, Y 'de bir kapanış kompakt alt kümedir.

Zayıf süreklili fonksiyonlarla Urysohn uzayının ters görüntüsü, Hausdorff uzayıdır. Bu aşağıdaki teoremle verilmiştir. Teoremi vermeden önce Hausdorff uzayı ve Urysohn uzayı tanımlarını verelim.

2.4. Tanım: a) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $G \subset X$ ve $H \subset X$ açık alt kümeleri bulunabiliyorsa bu (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff uzayı (veya T_2 - uzayı) adı verilir.

b) Eğer her kapalı ve ayrık $A \subset X$ ve $B \subset X$ alt kümeleri ve $G \subset X$ ve $H \subset X$ açık alt kümeleri için $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $A \subset G$ ve $B \subset H$ bulunabiliyorsa bu (x, τ) topolojik uzayına bir Urysohn uzayı (veya T_4 - uzayı) denir. [28]

2.15 Teorem: [18]: Y Urysohn uzayı olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu zayıf sürekli ve bire bir ise, bu durumda X uzayı Hausdorff uzayıdır.

İspat: Her $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$) noktaları için f fonksiyonu bire bir olduğundan $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir. Y Urysohn uzayı olduğundan $f(x_1) \in V_1$, $f(x_2) \in V_2$ ve $V_1^- \cap V_2^- = \emptyset$ olacak şekilde $V_1 \subset Y$ ve $V_2 \subset Y$ açık kümeleri vardır. Buradan;

$(f^{-1}(V_1^-))^0 \cap (f^{-1}(V_2^-))^0 = \emptyset$ elde edilir. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan 2.1. Teorem [12] gereğince;

$j = 1, 2$ için $x_j \in f^{-1}(V_j) \subset (f^{-1}(V_j^-))^0$ elde edilir. Böylece X uzayının Hausdorff uzayı olduğu gösterilmiş olur.

2.16 Teorem: [18]: Y Urysohn uzayı olmak üzere $f_1: X \rightarrow Y$ ve $f_2: X \rightarrow Y$ fonksiyonları zayıf sürekli ise bu durumda $\{x \in X: f_1(x) = f_2(x)\}$ kümesi X de kapalıdır.

İspat: $A = \{x \in X: f_1(x) = f_2(x)\}$ diyelim. Eğer $x \in (X \setminus A)$ ise bu durumda $f_1(x) \neq f_2(x)$ dir. Y Urysohn uzayı olduğundan $f_1(x) \in V_1$, $f_2(x) \in V_2$ ve $V_1^- \cap V_2^- = \emptyset$ olacak şekilde $V_1 \subset Y$ ve $V_2 \subset Y$ açık kümeleri vardır. f_j fonksiyonları zayıf sürekli olduğundan 2.1. Teorem [12] gereğince $j=1,2$ için $x \in f_j^{-1}(V_j) \subset (f_j^{-1}(V_j^-))^0$ elde edilir.

$U = (f_1^{-1}(V_1^-))^0 \cap (f_2^{-1}(V_2^-))^0$ diyelim. Bu durumda $V_1^- \cap V_2^- = \emptyset$ olduğundan

$x \in U \subset (X \setminus A)$ olacak şekilde U, X de bir açık kümedir. Böylece $X \setminus A$ kümesi, X de açıktır. Dolayısıyla A kümesi, X de kapalıdır.

2.3 Sonuç: Y Urysohn uzayı olmak üzere $f_1: X \rightarrow Y$ ve $f_2: X \rightarrow Y$ fonksiyonları zayıf sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer B, X de yoğun ve B üzerinde $f_1 = f_2$ ise bu durumda $f_1 = f_2$ dir.

İspat: 2.16 Teorem [18] ispatındaki A kümesini $B = \{x \in X: f_1(x) = f_2(x)\}$ olarak alalım. Bu durumda B kümesi, X de kapalıdır. B, X de yoğun olduğundan, $B^- = X$ olup $B = X$ dir. O halde $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ fonksiyonları eşit fonksiyonlardır.

BÖLÜM III

ZAYIF* SÜREKLİLİK VE SÜREKLİLİK

1961 yılında N.Levine [12] tarafından tanımlanan zayıf* sürekliliğin zayıf süreklilikle birlikte sürekliliği gerektirdiği gösterilmiştir.

3.1. Tanım: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. V, Y de herhangi bir açık küme olmak üzere $f^{-1}(\partial V)$ kümesi, X de kapalı ise f fonksiyonuna zayıf* sürekli [12] denir.

3.1. Lemma: [12] Zayıf süreklilik, zayıf* sürekliliği gerektirmez.

3.1.Örnek: $X=\{a, b\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi ve $Y=\{1, 2\}$ kümesi üzerinde $\sigma=\{Y, \emptyset, \{2\}\}$ topolojisi verilsin. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $f(a)=1$ ve $f(b)=2$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu zayıf süreklidir, fakat zayıf* sürekli değildir. Gerçekten; $b \in X$ için $f(b)=2 \in V=\{2\} \subset Y$ açık kümedir.

$(\partial V)=V^- \cap (Y \setminus V)^- = \{2\}^- \cap \{1\}^- = Y \cap \{1\} = \{1\}$ olduğundan $f^{-1}(\partial V) = f^{-1}(\{1\}) = \{a\}$ kümesi, X de kapalı değildir.

3.2. Lemma: [12] Zayıf* süreklilik, zayıf sürekliliği gerektirmez.

3.2. Örnek: $X = \{a, b\}$ kümesi üzerinde; $\tau=\{X, \emptyset\}$ topolojisi ve $Y=\{1, 2\}$ kümesi üzerinde $\sigma=\{Y, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ topolojisi verilsin. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $f(a)=1$ ve $f(b)=2$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu zayıf* süreklidir, fakat zayıf sürekli değildir. Gerçekten $a \in X$ için $f(a)=1 \in V=\{1\} \subset Y$ açık kümedir ve a 'yı içeren açık küme sadece X dir ve $V^- = \{1\}$ olduğundan $f(X)=Y \not\subset \{1\} = V^-$ dir. Dolayısıyla f fonksiyonu zayıf sürekli değildir.

Süreklilikle, zayıf* süreklilik kavramları aşağıda incelenmiştir.

3.1. Teorem: [12] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ise zayıf* süreklidir.

İspat: Her $V \subset Y$ açık kümesi için $(\partial V) = V^- \cap (Y \setminus V)^-$ kümesi, Y de kapalı bir kümedir. f fonksiyonu sürekli olduğundan 1.1. Teorem [1] gereğince $f^{-1}(\partial V)$ X de kapalı bir küme olur. Böylece f fonksiyonu zayıf* süreklidir.

3.3. Lemma: [12] Zayıf* süreklilik, sürekliliği gerektirmez.

3.3. Örnek: 3.2. örnekteki f fonksiyonu zayıf* süreklidir, fakat sürekli değildir. Gerçekten $a \in X$ için; $f(a) = 1 \in V = \{1\} \in \sigma$ ve $a \in U = X \in \tau$ için $f(U) = f(X) = Y \not\subset \{1\} = V$ dir. Dolayısıyla f fonksiyonu sürekli değildir.

1961 yılında N.Levine [12] nin verdiği aşağıdaki teorem, sürekliliğin genelleştirilmesinde iki çeşit çalışma alanının başlangıcı olarak kabul edilebilir. Birincisi yeni tip süreklilik çeşitlerinin tespit edilip genelleştirilmesi, ikincisi de sürekliliğin ayrışımı konusunda yeni çalışmaların başlamasıdır.

3.2. Teorem: [12] X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun hem zayıf sürekli hem de zayıf* sürekli olmasıdır.

İspat: \Rightarrow 2.6 Teorem [12] ve 3.1 Teorem [12] gereğince f fonksiyonunun sürekli ise zayıf sürekli ve zayıf* sürekli olduğu açıktır.

\Leftarrow : f fonksiyonu zayıf sürekli ve zayıf* sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesini alalım. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. $\partial V = V^- \setminus V$ olduğundan $f(x) \notin \partial V$ olur. Buradan $x \notin f^{-1}(\partial V)$ elde edilir. f fonksiyonu zayıf* sürekli olduğundan $x \in (U \setminus f^{-1}(\partial V)) = U \cap f^{-1}(\partial V)$ ' dir. $f^{-1}(\partial V)$ kapalı olduğundan $(f^{-1}(\partial V))'$ açık bir kümedir. $U \subset X$ de açık bir kümedir. Dolayısıyla açık iki kümenin ara kesiti de açık olduğundan $x \in (U \setminus f^{-1}(\partial V))$ açık bir kümedir.

Şimdi $f(U \setminus f^{-1}(\partial V)) \subset V$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için bir $z \in (U \setminus f^{-1}(\partial V))$ alalım. Buradan $z \in U$ olur. $f(U) \subset V^-$ olduğundan $f(z) \in V^-$ elde edilir. $z \notin f^{-1}(\partial V)$ olduğundan $f(z) \notin (\partial V) = V^- \setminus V$ olur. Böylece $f(z) \in V$ olur. Yani $f(U \setminus f^{-1}(\partial V)) \subset V$ olur. O halde f fonksiyonu süreklidir.

3.1 Lemma: [12] Zayıf* sürekli fonksiyonların bileşkesi zayıf* sürekli değildir. Ancak aşağıdaki özellikler sağlanır.

3.3 Teorem: [12] $f: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon ve $g: Y \rightarrow Z$ zayıf* sürekli fonksiyon ise $\text{gof}: X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu zayıf* süreklidir.

İspat: Herhangi bir $W \subset Z$ açık kümesi alalım. g zayıf* sürekli olduğundan $g^{-1}(\partial W) \subset Y$ kapalıdır. f sürekli olduğundan $(\text{gof})^{-1}(\partial W) = f^{-1}(g^{-1}(\partial W))$ kümesi, X de kapalıdır. Böylece gof fonksiyonu zayıf* süreklidir.

3.4 Örnek: $X = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$, $\nu = P(X)$ ve $\sigma = \{\emptyset, X, \{2\}\}$ topolojileri verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \nu)$ ve $g: (X, \nu) \rightarrow (X, \sigma)$ birim fonksiyonlar olsun. Bu durumda f ve g fonksiyonları zayıf* süreklidir. Fakat gof bileşke fonksiyonu zayıf* sürekli değildir. Gerçekten $(\text{gof})^{-1}(\partial(\{2\})) = (\text{gof})^{-1}(\{1, 3\}) = f^{-1}(g^{-1}(\{1, 3\})) = f^{-1}(\{1, 3\}) = \{1, 3\}$ kümesi (X, τ) uzayına göre kapalı değildir.

BÖLÜM IV

Bu bölümde 1982-1983 yılında A.S. MASHOUR ve arkadaşları tarafından [15] tanımlanan ön açık küme (pre open), ön sürekli (pre continuous) fonksiyon, α - açık küme, α - süreklilik ve α -açık fonksiyon ve Husain anlamında hemen hemen süreklilik kavramları incelenmiştir.

4.1.Tanım: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A = A^{\circ-}$ ise A kümesine “regüler kapalı küme” denir. [15]

4.2.Tanım: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A = A^{-\circ}$ ise A kümesine “regüler açık” küme denir. [15]

4.3. Tanım: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset A^{-\circ}$ ise A kümesine ön açık (pre open) küme ve eğer $A^{\circ-} \subset A$ ise A kümesine ön kapalı (pre close) küme denir. [15]

A kümesinin kapsadığı bütün ön açık kümelerin birleşimine A kümesinin ön içi [22] denir ve A_p° ile gösterilir.

4.1. Teorem: [15] Her açık küme ön açıktır.

İspat: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ açık alt küme olsun. $A \subset A^{-}$ olduğundan $A = A^{\circ} \subset A^{-\circ} \Rightarrow A \subset A^{-\circ}$ olur. O halde A kümesi ön açıktır.

4.1. Lemma: [15] Ön açık bir kümenin açık olması gerekmez. Gerçekten $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a\}$ kümesi ön açık bir kümedir, fakat açık bir küme değildir.

4.3. Tanım: $f: (X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü, X de ön açık ise f fonksiyonuna ön sürekli denir. [15]

4.4. Tanım: $f: (X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. X in her kapalı kümesinin görüntüsü ön kapalı ise f fonksiyonuna ön kapalı fonksiyon denir. [15]

4.5. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset A^{\circ\circ}$ ise A kümesine α -açık küme, eğer $A^{\circ\circ} \subset A$ ise A kümesine α -kapalı küme denir. [15]

4.6. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset A^{\circ}$ ise A kümesine yarı açık küme, eğer $A^{\circ} \subset A$ ise A kümesine yarı kapalı küme denir. [12]

4.7. Tanım: (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü X de yarı açık küme ise f fonksiyonu yarı süreklidir.

4.8. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A^{\circ\circ} \subset A$ ise A kümesine yarı ön kapalı küme veya β -kapalı küme ve eğer $A \subset A^{\circ\circ}$ ise A kümesine yarı ön açık veya β -açık küme denir. [15]

4.9. Tanım: (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. X in her kapalı kümesinin görüntüsü yarı kapalı ise f fonksiyonuna yarı kapalı fonksiyon denir. [15]

4.10. Tanım: X, Y topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $A \subset X$ açık kümesi için $f(A)$ görüntü kümesi yarı açık bir küme ise f fonksiyonu yarı açık bir fonksiyondur. [15]

4.11. Tanım. X, Y topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $A \subset X$ açık kümesi için $f(A)$ görüntü kümesi ön açık bir küme ise f fonksiyonuna ön açık bir fonksiyon denir. [15]

4.1. Uyarı X deki tüm α -açık kümelerinin ailesi $\alpha(X)$ olarak gösterilsin. Her bir α -açık kümesinin yarı açık ve ön açık olduğu açıktır, fakat terslerinin doğru olması gerekmez. (4.1. Lemma [15] de gösterildiği gibi)

4.2. Uyarı [9]

X deki yarı açık kümeler ailesi $Y.A.(X)$ ile ve X deki ön açık kümeler ailesi $\ddot{O}.A.(X)$ ile gösterilecektir. $Y.A.(X)$ ailesinin her zaman bir topoloji olması gerekmez.

$]a,b]$, $[a,b]$, $[a,b[$ aralıklarının her biri \mathbb{R}' uzayında yarı açıktır. Oysa $]a,b[\cap [b,c[$ kesişim kümesi \mathbb{R}' uzayında yarı açık değildir. Bu aralıkların hiç biri ön açıktadır.

Q Rasyonel sayılar kümesi \mathbb{R}' uzayında ön açık olmasına karşın yarı açık değildir.

$q \in \mathbb{R}' \setminus \mathbb{Q}$ olmak üzere $A = \mathbb{R}' \setminus \mathbb{Q}$ ve $B = \mathbb{Q} \cup \{q\}$ ön açık kümelerinin kesişimi ön açık olmadığından $\ddot{O}.A.(X)$ ailesinin her zaman bir topoloji olmasının gerekmediği anlaşılır. Oysa $\ddot{O}.A.(X) \cap Y.A.(X)$ ailesi bilindiği gibi daima bir topolojidir.

Dikkat edilirse tüm yoğun kümeler ön açık tüm seyrek kümeler yarı kapalıdır.

α -SÜREKLİLİK

Aksi söylenmediği sürece X, Y, Z uzayları, ayırma aksiyomlarının olmadığı varsayılan topolojik uzaylar olsun.

4.12.Tanım: $f: X \rightarrow Y$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $V \subset Y$ açık kümesinin ters görüntüsü X de bir α - açık küme ise f fonksiyonuna α - süreklidir. Yani her $V \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^{o-o}$ ise f fonksiyonu α - süreklidir. [15]

4.2. Teorem: [15] $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- f α -süreklidir.
- Her $x \in X$ ve $f(x)$ i içeren her bir $V \subset Y$ açık kümesi için $x \in W$, $f(W) \subset V$ olacak şekilde $W \in \alpha(X)$ vardır.
- Y deki her bir kapalı kümenin tersi α - kapalı kümedir.
- Her $A \subset X$ için $f(A^{o-o}) \subset (f(A))^{-}$ dir.
- Her $M \subset Y$ için $(f^{-1}(M))^{o-o} \subset f^{-1}(M^{-})$ dir.

4.1. Sonuç: X deki tüm ön açık kümelerin ailesi $\ddot{O}.A.(X)$ ile ve Y deki tüm ön açık kümelerin ailesi $\ddot{O}.A.(Y)$ ile tanımlansın. $f: X \rightarrow Y$ α - süreklidir. Bu durumda [15]

- Her $A \in \ddot{O}.A.(X)$ için $f(A^{-}) \subset (f(A))^{-}$ dir
- Her $V \in \ddot{O}.A.(Y)$ için $(f^{-1}(V))^{-} \subset f^{-1}(V^{-})$ dir.

İspat: a) Her $A \in \mathcal{O}.A(X)$ için A kümesi regüler açıktır. Dolayısıyla 4.2. Tanım [15] gereğince $A = A^{-\circ}$ dır. Buradan $A^{-} = A^{-\circ-}$ olur. 4.2. Teorem [15] in d) ifadesinden $f(A^{-}) = f(A^{-\circ-}) \subset (f(A))^{-}$ ve benzer şekilde

b) Her $V \in \mathcal{O}.A(X)$ $\mathcal{O}.A(X)$ için V kümesi regüler açıktır. 4.2. Tanım [15] gereğince $V = V^{-\circ}$ dır. 4.2. Teorem: [15] in e) ifadesinden $(f^{-1}(V))^{-} = (f^{-1}(V^{-\circ}))^{-} \subset f^{-1}(V^{-})$ dır.

4.1. Not: X topolojik uzayında $X \setminus A$ regüler – açık (yarı açık, ön-açık α -açık, β -açık) ise A ya regüler – kapalı (yarı – kapalı, ön-kapalı α -kapalı, β -kapalı) küme denir.

A regüler –kapalı $\Leftrightarrow A = A^{-\circ}$ dır.

4.13 Tanım: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U^{-}) \subset V^{-}$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi var ise f fonksiyonuna θ - süreklili denir.

4.3. Teorem: [15] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu α - süreklili ise aynı zamanda θ - süreklidir.

İspat: $x \in X$ ve $f(x)$ i içeren $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. 4.2. Teorem [15] in e) ifadesinden $(f^{-1}(V))^{-\circ-} \subset f^{-1}(V^{-})$ dır. f , α - süreklili olduğundan $(f^{-1}(V)) \subset ((f^{-1}(V))^{-\circ-}) \subset ((f^{-1}(V))^{-\circ-})^{-} \subset f^{-1}(V)^{-\circ-} \subset f^{-1}(V^{-})$ dır. Böylece $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V^{-})$ olur. $(f^{-1}(V))^{-\circ-} = U$ diyelim. Buradan $U^{-} \subset f^{-1}(V^{-})$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. İfadenin her iki tarafının f altındaki görüntüsünü alırsak $f(U^{-}) \subset V^{-}$ elde edilir. Böylece f , θ - süreklili olur.

HUSAIN ANLAMINDA HEMEN HEMEN SÜREKLİLİK VE ZAYIF SÜREKLİLİK

Bu süreklilik çeşidi 1966 yılında T.Husain [10] tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir. Daha sonra 1982 yılında Mashhour ve arkadaşları [15] tarafından tanımlanan ön süreklilik kavramıyla çakıştığı da ifade edilmiştir.

4.14. Tanım: Bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^-$, $x \in X$ in bir komşuluğu ise f ye Husain anlamında hemen hemen sürekli denir. [10]

4.2. Lemma: [10] Her sürekli fonksiyon ön süreklidir, fakat karşıtı genellikle doğru değildir. Gerçekten \mathbb{R} reel sayılar kümesi üzerinde U alışımlı topolojisi verilsin. $f: (\mathbb{R}, U) \rightarrow (\mathbb{R}, U)$ fonksiyonu; $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. f Dirichlet fonksiyonu ön süreklidir, fakat sürekli değildir.

Şimdi T.Noiri (1987) ve D.A Rose (1984) tarafından tanımlanan ön süreklilik kavramlarının çakıştığını ifade eden aşağıdaki teoremi inceleyelim.

4.4. Teorem: [23],[20] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun Husain anlamında hemen hemen sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin ön sürekli olmasıdır.

İspat: \Rightarrow Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. Bu durumda $x \in f^{-1}(V)$ olur. f fonksiyonu Husain anlamında hemen hemen sürekli olduğundan $x \in U \subset (f^{-1}(V))^-$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $x \in U = U^\circ \subset (f^{-1}(V))^{-\circ}$ olup, $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^{-\circ}$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}(V)$ kümesi, X de ön açıktır. Böylece f fonksiyonu ön süreklidir.

\Leftarrow : Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V)) \subset ((f^{-1}(V))^-)^\circ$ olsun. $(f^{-1}(V))^{-\circ} = U$ diyelim. U , X de açık bir kümedir ve x noktasını içerir. Dolayısıyla $U = (f^{-1}(V))^{-\circ} \subset (f^{-1}(V))^-$ elde edilir. Buradan $(f^{-1}(V))^-$ kümesi x noktasının bir komşuluğudur. Böylece f fonksiyonu Husain anlamında hemen hemen süreklidir.

4.5. Teorem:[22] X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- a) f fonksiyonu Husain anlamında hemen hemen süreklidir.
- b) f fonksiyonu ön süreklidir
- c) Herhangi bir $x \in X$ noktası için $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesinin ters görüntüsü, x noktasını içeren ön açık bir kümedir
- d) Her $x \in X$ ve $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ ön açık kümesi vardır.
- e) Her $U \subset X$ için $f(U_p^-) \subset (f(U))^-$
- g) Her $V \subset Y$ için $(f^{-1}(V))_p^- \subset f^{-1}(V^-)$
- f) Her $V \subset Y$ için $f^{-1}(V^\circ) \subset (f^{-1}(V))_p^\circ$

Ön süreklilik ile zayıf süreklilik birbirinden bağımsız kavramlardır. Ancak aşağıdaki özellikler vardır.

4.6. Teorem: [18] Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön süreklili ve her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$ ise bu durumda f fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat: Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için hipotez gereğince $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$ olur. f fonksiyonu ön süreklili olduğundan, $x \in U \subset (f^{-1}(V))^-$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Bu ifadenin f altındaki görüntüsü alınırsa 4.1. sonuç [15] in d) ifadesinden $f(U) \subset f((f^{-1}(V))^-) \subset f(f^{-1}(V^-)) \subset V^-$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonun zayıf süreklili olduğunu gösterir.

4.2.Sonuç: [18] $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön süreklili olsun. Bu durumda f fonksiyonunun zayıf süreklili olması için gerek ve yeter şart her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$ olmasıdır.

İspat: 2.2.Teorem [18] ve 4.6 Teorem [18] in direkt sonucudur.

4.3. Lemma [20] Zayıf sürekli bir fonksiyonun ön sürekli olması gerekmez.

4.1. Örnek: $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\phi, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu $f(a) = c$, $f(b) = d$, $f(c) = b$ ve $f(d) = a$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu zayıf sürekli dir, fakat ön sürekli değildir.

Gerçekten;

$V = \{c\} \subset X$ açık kümesi için $f^{-1}(V) = f^{-1}(\{c\}) = \{a\}$ ve $(f^{-1}(V))^{-o} = (\{a\})^{-o} = \{a\}^o = \phi$ olduğundan $f^{-1}(V) \not\subset (f^{-1}(V))^{-o}$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu Husain anlamında hemen hemen sürekli değildir.

4.4. Lemma [20] Ön sürekli bir fonksiyonun zayıf sürekli olması gerekmez.

4.2. Örnek: $X = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\phi, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$ topolojisi ve $Y = \{x,y,z\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\phi, Y, \{y\}, \{z\}, \{y,z\}, \{x,y\}\}$ topolojisi verilsin.

$f = (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(1) = x$, $f(2) = f(3) = y$ ve $f(4) = z$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu ön sürekli dir, fakat zayıf sürekli değildir. Gerçekten $3 \in X$ için $f(3) = y \in V = \{x,y\} \in \sigma$ ve $V^- = \{x,y\}$ olduğundan ve $3 \in U = \{3,4\}$ için $f(U) = f(\{3,4\}) = \{y,z\}$ olduğundan $f(U) = \{y,z\} \not\subset V^- = \{x,y\}$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu zayıf sürekli değildir.

Aşağıdaki örneklerden zayıf süreklilik ile zayıf* süreklilik kavramları birbirinden bağımsız olduğu görülür.

4.5 Lemma: Ön sürekli bir fonksiyonun zayıf* sürekli olması gerekmez.

Gerçekten 4.2.Örnekteki f fonksiyonu alındığında, $V = \{y\} \in \sigma$ kümesi için

$\partial V = V^- \cap (Y \setminus V)^- = \{x,y\} \cap \{x,z\} = \{x\}$ olduğundan $f^{-1}(\partial V) = f^{-1}(\{x\}) = \{1\}$ kümesi X de kapalı değildir. Dolayısıyla f fonksiyonu zayıf* sürekli değildir.

4.6.Lemma: Zayıf* sürekli bir fonksiyonun ön sürekli olması gerekmez.

4.3.Örnek: $X = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \phi, \{3\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}\}$ topolojisi ve $Y = \{x,y,z\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\phi, Y, \{x\}, \{y\}, \{y,z\}, \{x,y\}\}$ topolojisi verilsin.

$f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(1) = f(2) = x$, $f(3) = y$ ve $f(4) = z$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu Zayıf* süreklidir. Fakat ön süreklidir değildir. Gerçekten $V = \{x\} \in \sigma$ kümesi için;

$f^{-1}(V) = \{1,2\}$ ve $(f^{-1}(V))^{-} = (\{1,2\})^{-} = \{1,2,4\}$, $(f^{-1}(V))^{-\circ} = (\{1,2,4\})^{\circ} = \emptyset$ olduğundan $f^{-1}(V) \not\subset (f^{-1}(V))^{-\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu ön süreklidir değildir.

4.7. Lemma: $A \in \ddot{O}A(X)$ ve $B \in \alpha(X)$ olsun. Bu durumda $A \cap B \in \alpha(A)$ dır.

İspat: A ön açık bir küme olduğundan $A \subset A^{-\circ}$ B α -açık bir küme olduğundan $B \subset B^{0-0}$
 $(A \cap B) \subset (A^{-\circ} \cap B^{0-0}) = (A^{-\circ} \cap B^{0-0})^{\circ} \subset (A \cap B)^{0-0}$ veya

$(A \cap B) \subset ((A \cap B^{\circ})^{-\circ} \cap A)^{\circ} \subset ((A \cap B^{\circ})^{-} \cap A)^{\circ} = (A \cap B^{\circ})^{-\circ} = (A \cap B)^{0-0}$

Dolayısıyla $(A \cap B) \subset (A \cap B)^{0-0}$ olur ki bu da $(A \cap B)$ nin α - açık küme olduğunu gösterir. Yani $(A \cap B) \in \alpha(A)$ dır.

4.7. Teorem: [16] Eğer $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu α - süreklidir ve A , X in bir alt kümesi olsun. $A \in \ddot{O}A(X)$ ise $f|_A : A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu α - süreklidir.

İspat: $V \subset Y$ açık bir alt küme olsun. f α - süreklidir olduğundan $f^{-1}(V)$ X de α - açık bir kümedir ve $f^{-1}(V) \in \alpha(X)$ olur. Lemma 4.7.den $A \in \ddot{O}A(X)$ olduğundan $A \cap f^{-1}(V) = (f|_A)^{-1}(V) \in \alpha(A)$ dır. Bu da $(f|_A)^{-1}(V)$ nin A da α - açık bir küme olduğunu gösterir, dolayısıyla $f|_A$ fonksiyonu α - süreklidir olur.

4.8. Lemma: [16] $A \subset Y \subset X$, $Y \in \alpha(X)$ ve $A \in \alpha(Y)$ ise $A \in \alpha(X)$ dir.

İspat: $A \in \alpha(Y)$ ise A , Y de α - açık bir kümedir ve dolayısıyla $A \subset (A_Y^{\circ})^{-\circ}$ dır. A_Y^{0-0} Y de açık bir kümedir ve $(A_Y^{\circ})^{-\circ} = (Y \cap U)$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. $Y \in \alpha(X)$ ise Y , X de α - açık bir kümedir ve $Y \subset Y^{0-0}$ dır. Dolayısıyla $A \subset Y \subset Y^{0-0}$ olduğundan $A \subset Y^{0-0}$ elde edilir. $A \subset A^{0-0} = (Y \cap U)$ ise $A \subset (Y \cap U)$ olur. Buradan $A \subset ((Y^{0-0}) \subset U) \subset (Y \subset U)^{0-0} = ((A_Y^{\circ})^{-\circ})^{0-0} = ((A_Y^{\circ})^{-})^{0-0} = (A_Y^{\circ})^{-\circ}$

(A_Y°) Y de açık bir küme olduğundan $(A_Y^\circ) = V \cap Y$ olacak şekilde bir $V \subset X$ açık kümesi vardır. $Y \in \alpha(X)$ ve $A \in \alpha(Y)$ olduğundan $Y \subset Y^{0-0}$ ve $A \subset (A_Y^\circ)^{-0}$ dır. Buradan $A \subset (V \cap Y)^{-0} \subset (V \cap (Y^{0-0}))^{-0} \subset (V \cap Y)^{0-0} = (A^\circ)^{0-0} \subset A^{0-0}$ dır. Yani $A \subset A^{0-0}$ elde edilir. Dolayısıyla $A \in \alpha(X)$ olur. Yani A , X de α - açık bir kümedir.

4.8. Teorem: [16] $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve her $i \in I$ için $U_i \in \alpha(X)$ olacak şekilde $\{U_i : i \in I\}$ X in bir örtülüğü olsun. Eğer her $i \in I$ için $f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu α - süreklili ise f fonksiyonu da α - süreklili olur.

İspat: $V \subset Y$ açık bir küme olsun. Her $i \in I$ için $f|_{U_i}$ α - süreklili olduğundan $(f|_{U_i})^{-1}(V) \in \alpha(U_i)$ dır. Her $i \in I$ için $U_i \in \alpha(X)$ olduğundan 4.8. Lemma [16] dan dolayı her $i \in I$ için $(f|_{U_i})^{-1}(V) \in \alpha(X)$ dir. Fakat $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}(V)$ dir.

Bu durumda $f^{-1}(V) \in \alpha(X)$ dir. Çünkü α - açık kümelerinin birleşimi bir α - açık kümedir. Bu da f fonksiyonunun α - süreklili olduğunu gösterir. α - süreklili $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonlarının daha farklı karakterizasyonları aşağıdaki şekilde verilmiştir.

- Eğer X bağlantılı bir uzay ise $f(X)$ de bağlantılıdır.
- Eğer f üzerine bir fonksiyon ve eğer X hemen hemen her yerde kompakt ise Y de hemen hemen her yerde kompakttır.

Not: $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $y \in Y$ için $f(x)=y$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası var ise f fonksiyonuna üzerine fonksiyon denir.

Bu durumdan şu sonuçlar da çıkarılabilir.

4.3. Sonuç: [16] $f : X \rightarrow Y$ tanımlı bir fonksiyon ve her $x \in X$ için $g(x) = (x, f(x))$ şeklinde tanımlanan $g: X \rightarrow X \times Y$ fonksiyonu f nin grafik fonksiyonu olsun. g fonksiyonun α - süreklili olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun α - süreklili olmasıdır.

4.4. Sonuç: [16] Her $i \in I$ için $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ şeklinde ve her $\{x_i\} \in \prod X_i$ için $f: \prod X_i \rightarrow \prod Y_i$ fonksiyonu $f(\{x_i\}) = \{f_i(x_i)\}$ şeklinde tanımlı olsun. her $i \in I$ için f fonksiyonunun α - sürekliliği için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için f_i fonksiyonlarının α - sürekliliğidir.

α - AÇIK VE α -KAPALI FONKSİYONLAR

4.15 Tanım: $f: X \rightarrow Y$ tanımlı bir fonksiyon olsun. X deki her $A \subset X$ açık kümesi için $f(A)$ görüntü kümesi α - açık küme ise f fonksiyonuna α - açık fonksiyon denir. [16]

4.9 Teorem: [15] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun α - açık fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve x noktasını içeren her $U \subset X$ açık kümesi için $W \subset f(U)$ olacak şekilde $f(x)$ noktasını içeren bir $W \subset Y$ α - açık kümesinin bulunmasıdır.

İspat: Tanım 4.15. ten açıkça görülmektedir.

4.16 Tanım: $A \subset X$ alt kümesini içeren bütün α - kapalı kümelerinin kesişimine A nın α - kapanışı denir ve A_α^- ile gösterilir. [16]

4.10 Teorem: [16] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun α - kapalı fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul her $A \subset X$ alt kümesi için $(f(A)_\alpha)^- \subset f(A^-)$ olmasıdır.

İspat: Tanım 4.16 dan açıkça görülmektedir.

4.11 Teorem: [16] $f: X \rightarrow Y$ α - açık bir fonksiyon olsun . Eğer $W \subset Y$ ve $F \subset X$ alt kümesi $f^{-1}(W)$ yi içeren kapalı bir küme ise bu durumda $f^{-1}(H) \subset F$ olacak şekilde W yi içeren bir $H \subset Y$ α - kapalı kümesi vardır.

İspat: $H = (Y \setminus f(X \setminus F))$ olsun. $f^{-1}(W) \subset F$ olduğundan $f(X \setminus F) \subset (Y \setminus W)$ dir. f α - açık bir fonksiyon olduğundan 4.2. Teorem [15] in c). maddesinden dolayı $H \subset Y$ alt kümesi α - kapalı bir kümedir ve $f^{-1}(H) = (X \setminus f^{-1}(f(X \setminus F))) \subset (X \setminus F) = F$ elde edilir. Yani $f^{-1}(H) \subset F$ dir.

4.5 Sonuç: [16] Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu α - açık bir fonksiyon ise bu durumda :

- a) Her $B \subset Y$ kümesi için $f^{-1}((B^-)^{o-}) \subset (f^{-1}(B))^-$
- b) $A \in \text{Ö.A.}(Y)$ için $f^{-1}(A^-) \subset (f^{-1}(A))^-$ dir.

4.9 Lemma. [16] Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön -açık bir fonksiyon ise bu durumda her $V \subset Y$ alt kümesi için $f^{-1}(V^{o-}) \subset (f^{-1}(V))^-$ dir.

4.12 Teorem: [16] Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön süreklili ve yarı süreklili bir fonksiyon ise f α -süreklili bir fonksiyondur.

İspat: $V \subset Y$ açık bir küme olsun. f ön süreklili bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)$, X de ön açık bir kümedir ve dolayısıyla

- a) $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^{-o}$ dir. f yarı süreklili bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V)$, X de yarı açık bir kümedir ve dolayısıyla;
- b) $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^{o-}$ dir. $f^{-1}(V) \subset ((f^{-1}(V))^{o-})^{-o} = (f^{-1}(V))^{o-o}$ dir.

Bu da f fonksiyonun α -süreklili bir fonksiyon olduğunu gösterir.

4.13 Teorem: [16] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu α -süreklili ve ön açık bir fonksiyon ise her $V \subset Y$ α -açık kümesi için $f^{-1}(V)$, X de bir α -açık kümedir.

İspat: $V \subset Y$ bir α -açık küme olsun. Bu durumda $V \subset V^{o-o}$ olur. 4.12 Teorem [16] dan yararlanarak her iki tarafın f^{-1} altındaki görüntüsü alınırsa

$f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V^{o-o}) \subset (f^{-1}(V^{o-o}))^{o-o} \subset (f^{-1}(V^{o-}))^{o-o}$ dir. 4.9 Lemma [16] dan

$f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^o))^{-o}$ dir. f α -süreklili bir fonksiyon olduğundan 4.12. Teorem [15] gereğince $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^{o-o}$ dir. Bu da $f^{-1}(V)$ nin X de α -açık küme olduğunu gösterir.

4.5 Sonuç: [16] Eğer $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu α -süreklili ve ön açık bir fonksiyon ise:

- a) Her bir α -kapalı kümenin ters görüntüsü α -kapalıdır.
- b) Her bir $A \subset X$ alt kümesi için $f(A_\alpha^-) \subset (f(A))_\alpha^-$ dir.

İspat: Doğrudan doğruya 4.13. Teorem [16] yı takip eder.

4.14 Teorem: [16] $f: X \rightarrow Y$ ve $g: Y \rightarrow Z$ tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu ön açık ve α -sürekli, g fonksiyonu α -sürekli bir fonksiyon ise bu durumda $g \circ f: X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu α -sürekli dir.

İspat: g fonksiyonu α -sürekli olduğundan $V \subset Z$ açık kümesi için $g^{-1}(V)$ kümesi Y de α -açık küme olur. f fonksiyonu ön açık ve α -sürekli olduğundan $g^{-1}(V)$ α -açık kümesi için $f^{-1}(g^{-1}(V))$ kümesi X de α -açık bir küme olur. Dolayısıyla $g \circ f$ fonksiyonu α -sürekli dir.

4.15 Teorem: [16] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön sürekli ve α -açık bir fonksiyon olsun. Bu durumda Y deki her ön açık kümenin ters görüntüsü X de ön açık bir kümedir.

İspat: $V \subset Y$ alt kümesi Y de bir ön açık küme olsun. Bu durumda $V \subset V^{-\circ}$ dir ve buradan $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V^{-\circ}) \subset (f^{-1}(V^{-\circ}))^{-\circ} \subset (f^{-1}(V^{-}))^{-\circ}$ dir. f α -açık bir fonksiyon olduğu için 4.5.

Sonuç: [16] a) gereğince $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^{-}))^{-\circ} \subset ((f^{-1}(V))^{-})^{-\circ} = (f^{-1}(V))^{-\circ}$ dir.

Yani $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V))^{-\circ}$ olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi X de ön açık bir kümedir.

BÖLÜM V

SİNGAL ANLAMINDA HEMEN HEMEN SÜREKLİLİK VE ZAYIF SÜREKLİLİK

Bu bölümde zayıf sürekli fonksiyonların Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonlarla ilgisi incelenmiştir.

5.1. Tanım: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(V) \subset X$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi varsa f fonksiyonuna Singal anlamında hemen hemen sürekli denir. [25]

5.1. Uyarı: [25] Sürekli her fonksiyon Singal anlamında hemen hemen sürekli dir, fakat karşıtı genellikle doğru değildir.

5.1. Örnek: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$ topolojisi ve $Y = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\emptyset, Y, \{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(1) = f(2) = x$, $f(3) = y$ ve $f(4) = z$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir, fakat sürekli değildir. Gerçekten $4 \in X$ için $f(4) = z \in V = \{z\} \in \sigma$ ve $4 \in U = \{3, 4\} \in \tau$ için $f(U) = f(\{3, 4\}) = \{y, z\}$ olduğundan $f(U) \not\subset V$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu sürekli değildir.

5.2. Uyarı: [25] Singal anlamında hemen hemen sürekli her fonksiyon zayıf sürekli dir, fakat karşıtı genellikle doğru değildir.

5.2. Örnek: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 2$, $f(4) = 1$ şeklinde tanımlansın. $1 \in X$ için $f(1) = 3 \in V = \{3\} \in \tau$ ve $V^- = (\{3\})^- = \{3, 4\}$, $V^{-\circ} = (\{3, 4\})^\circ = \{3\}$ olduğundan ve $1 \in U = \{1, 2\}$ için $f(U) = f(\{1, 2\}) = \{3, 4\}$ olduğundan $f(U) \not\subset V^{-\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli değildir.

Singal anlamında hemen hemen sürekli lik kavramı zayıf* sürekli lik ile ön sürekli lik kavramlarından bağımsızdır. Bu durum aşağıdaki örneklerden çıkar.

5.1. Lemma: Singal anlamında hemen hemen sürekli bir fonksiyonun zayıf* sürekli olması gerekmez.

5.3. Örnek: $X=\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\emptyset,X,\{3\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{3,4\}\}$ topolojisi ve $Y=\{x,y,z\}$ kümesi üzerinde $\sigma=\{\emptyset,Y,\{z\},\{x,z\},\{y,z\}\}$ topolojisi verilsin. $f(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu $f(1)=f(2)=x$, $f(3)=y$ ve $f(4)=z$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli fakat zayıf* sürekli değildir. Gerçekten $V=\{x,z\}\in\sigma$ kümesi için $V^- = Y$ ve $(Y\setminus V)^- = \{y\}^- = \{y\}$ olduğundan $\partial V = V^- \cap (Y\setminus V)^- = Y \cap \{y\} = \{y\}$ olur. Buradan $f^{-1}(\partial V) = \{3\}\in\tau$ kümesi X de kapalı değildir. Dolayısıyla f fonksiyonu zayıf* sürekli değildir.

5.2. Lemma: Singal anlamında hemen hemen sürekli bir fonksiyonun ön sürekli olması gerekmez.

5.4. Örnek: 5.3. Örnekteki f fonksiyonu alındığında $V=\{z\}\in\sigma$ açık kümesi için $f^{-1}(V) = \{4\}$, $(f^{-1}(V))^- = \{4\}$ ve $((f^{-1}(V))^-)^o = \emptyset$ olduğundan $f^{-1}(V) \not\subset ((f^{-1}(V))^-)^o$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu ön sürekli değildir.

5.1. Teorem: [14] $f: X\rightarrow Y$ fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli ve $V\subset Y$ açık bir küme olsun. Eğer $x\notin f^{-1}(V)$ fakat $x\in (f^{-1}(V))^-$ ise bu durumda $f(x)\in V^-$ dir.

İspat: $x\notin f^{-1}(V)$ ve $x\in (f^{-1}(V))^-$ olacak şekilde bir $x\in X$ noktası alalım. $f(x)\notin V^-$ olduğunu varsayalım. Bu durumda kapanış noktası tanımından $W\cap V = \emptyset$ ve $f(x)\in W$ olacak şekilde bir $W\subset Y$ açık kümesi vardır. V kümesi açık olduğundan $W^- \cap V = \emptyset$ ve buradan $W^{-o} \cap V = \emptyset$ olur. f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan $f(U)\subset W^{-o}$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U\subset X$ açık kümesi vardır. Böylece $f(U)\cap V = \emptyset$ olur. $x\in (f^{-1}(V))^-$ olduğundan $U\cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ olur. Buradan $f(U)\cap V \neq \emptyset$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $f(x)\in V^-$ olur.

5.2. Teorem: [14] $f: X\rightarrow Y$ fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli olsun. Bu durumda her $V\subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$ dir.

İspat: $V \subset Y$ açık bir küme olsun. 5.1 Teorem [14] gereğince $f((f^{-1}(V))^-) \subset V^-$ olur. $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(f((f^{-1}(V))^-)) \subset f^{-1}(V^-)$ elde edilir. Buradan $(f^{-1}(V))^- \subset f^{-1}(V^-)$ olur.

5.3. Teorem: [14] $f: X \rightarrow Y$ açık bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $A \subset Y$ için $f^{-1}(A^-) \subset (f^{-1}(A))^-$ dır.

5.1. Sonuç: [14] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu açık ve Singal anlamında hemen hemen sürekli ise, bu durumda her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^- = f^{-1}(V^-)$ olur.

İspat: 5.2. ve 5.3 Teoremlerinden dolayı açıktır.

Zayıf sürekli fonksiyonların, Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için fonksiyonun açık olması gerekir. Bu durum aşağıda verilmiştir.

5.4. Teorem: [25] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu açık ve zayıf sürekli ise bu durumda f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir.

İspat: Bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir V açık kümesi verilsin. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan $f(U) \subset V^-$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. f fonksiyonu açık olduğundan $f(U)$ kümesi; Y de açıktır. Dolayısıyla $f(U) = (f(U))^{\circ} \subset V^{-\circ}$ elde edilir. Yani $f(U) \subset V^{-\circ}$ olduğundan f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir.

5.2. Sonuç: [25] Açık bir fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonun zayıf sürekli olmasıdır.

İspat: 2.3 Teorem, 5.1. Sonuç ve 5.4. Teorem kullanılarak ispat yapılır.

[25] de incelenen Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonlarının karakterizasyonunun yalnızca aşağıdaki şekilde ifadesini verelim.

5.5. Teorem: $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.

- a) f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürelidir.
- b) Y uzayındaki her regüler açık alt kümenin ters görüntüsü, X uzayında açık kümedir.
- c) Y uzayındaki her regüler kapalı alt kümenin ters görüntüsü, X uzayında kapalı kümedir.
- d) Her $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her regüler açık $V \subset Y$ kümesi için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır.
- e) Y uzayındaki her V açık küme için $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^{-\circ}))^{\circ}$ dır.
- f) Y uzayındaki her W kapalı küme için $(f^{-1}(W^{-\circ}))^{-} \subset f^{-1}(W)$ dır.

* Bağlantılılık, Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonlarla korunur.

5.6. Teorem: [14] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli ve örten olsun. X uzayı bağlantılı ise bu durumda Y uzayı da bağlantılıdır.

İspat: X uzayı bağlantılı, fakat Y uzayı bağlantısız olsun. Bu durumda $f(X) = Y = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere A ve B kümeleri hem açık hem kapalıdır. Dolayısıyla Y uzayının regüler açık ve regüler kapalı alt kümeleridir. f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan 5.5. Teorem gereğince $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümeleri, X de açık ve kapalı kümelerdir. Aynı zamanda $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ ve $Y = A \cup B$ olduğundan $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$ olur. Bu ise X uzayının bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde Y uzayı bağlantılıdır.

Singal anlamında hemen hemen sürekli bir fonksiyonun herhangi bir kümeyle kısıtlanışının Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğu aşağıdaki teoremden gösterilmiştir.

5.7. Teoerm: [25] $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $f|_A : A \rightarrow Y$ fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir.

İspat: f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli ve $A \subset X$ herhangi bir alt kümesi olsun. $V \subset Y$ herhangi bir regüler açık alt kümesi için kısıtlanmış fonksiyon tanımından $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$ olur. f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan, $f^{-1}(V)$ alt kümesi, X de açıktır. Dolayısıyla $(f|_A)^{-1}(V)$ kümesi, A da açıktır. Böylece $f|_A$ kısıtlanmış fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir.

Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonun bileşkesi Singal anlamında hemen hemen sürekli değildir. Ancak aşağıdaki teorem vardır.

5.8. Teorem: [25] $f: X \rightarrow Y$ açık ve sürekli bir fonksiyon, $g: Y \rightarrow Z$ herhangi bir fonksiyon olsun. $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için gerek ve yeter koşul g fonksiyonunun Singal anlamında hemen hemen sürekli olmasıdır.

İspat. \Rightarrow A, Z de regüler açık bir alt küme olsun. $g \circ f$ fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ kümesi, X de açıktır. f fonksiyonu açık olduğundan, $f(f^{-1}(g^{-1}(A)))$ kümesi, Y de açıktır. Dolayısıyla $g^{-1}(A)$ kümesi, Y de açıktır. Böylece g fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir.

\Leftarrow A, Z nin regüler açık herhangi bir alt kümesi olsun. g fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan $g^{-1}(A)$ kümesi, Y de açıktır. f fonksiyonu sürekli olduğundan $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ kümesi, X de açıktır. Böylece $g \circ f$ bileşke fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir.

Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonların, sürekli olması için acaba değer uzayı nasıl olmalıdır? Şimdi bu durumu inceleyelim.

5.2. Tanım: (X, τ) topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ noktası ve x noktasını içeren her U açık kümesi için $x \in V \subset V^{-\circ} \subset U$ olacak şekilde bir V açık kümesi varsa X uzayına yarı regüler uzay [25] denir.

5.9. Teorem: [25] Y yarı regüler uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli ise bu durumda f fonksiyonu sürekli dir.

İspat: Bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi olsun. Y yarı regüler uzay olduğundan $f(x) \in A \subset A^{-\circ} \subset V$ olacak şekilde bir A açık kümesi vardır. f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan $f(x) \in f(U) \subset A^{-\circ}$ olacak şekilde x noktasını içeren bir U açık kümesi vardır. Böylece $f(U) \subset V$ bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonu sürekli dir.

5.3. Sonuç: $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve Y yarı regüler uzay olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olmasıdır.

İspat: Her sürekli fonksiyon Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan ve 5.9. Teoreminden sonuç elde edilir.

Zayıf sürekliliğin, Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için değer uzayının hemen hemen regüler olması gerekir. Aşağıda hemen hemen regüler uzay tanımı verilmiştir

5.3. Tanım: (X, τ) topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ noktası ve x noktasını içeren her V regüler açık kümesi için $x \in U \subset U^{-} \subset V$ olacak şekilde bir U regüler açık kümesi varsa X uzayına hemen hemen regüler uzay [26] denir.

5.3. Uyarı: [26] Hemen hemen regülerlik ile yarı regülerlik birbirinden bağımsız kavramlardır. Ayrıca hemen hemen regüler ve yarı regüler bir uzay, regüler bir uzaydır. Başka bir deyişle yarı regüler bir uzayın regüler olması için gerek ve yeter koşul uzayın hemen hemen regüler olmasıdır. Ancak hemen hemen regüler bir uzayın regüler olması gerekmez. Aynı şekilde yarı regüler bir uzayında regüler olması gerekmez. Bunlardan başka bir Hausdorff uzayı hemen hemen regüler ise uzay Urysohn uzaydır.

5.10 Teorem: [29] Y hemen hemen regüler uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonunun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun zayıf sürekli olmasıdır.

İspat: \Rightarrow Singal anlamında hemen hemen sürekli bir fonksiyonun zayıf sürekli olduğundan açıktır.

\Leftarrow f fonksiyonu zayıf sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir regüler açık $V \subset Y$ kümesi verilsin. Y uzayı hemen hemen regüler olduğundan $f(x) \in A \subset A^{-\circ} \subset V^{-\circ}$ olacak şekilde regüler açık bir $A \subset Y$ kümesi vardır. f fonksiyonu zayıf sürekli olduğundan, $f(U) \subset A^{-}$ olacak şekilde x noktasını içeren açık bir $U \subset X$ kümesi vardır. Buradan $f(U) \subset V^{-\circ}$ olur. Böylece f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir.

Singal ve Husain anlamında hemen hemen süreklilikler birbirinden bağımsız kavramlardır. Bu kavramlar için aşağıdaki teoremler verilebilir.

5.11. Teorem: [14] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu açık ve Singal anlamında hemen hemen sürekli ise, f fonksiyonu Husain anlamında hemen hemen sürekli dir.

İspat: $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi olsun. f fonksiyonu açık olduğundan 5.3. Teorem gereğince, $f^{-1}(V^{-}) \subset (f^{-1}(V))^{-}$ olur. $V^{-\circ}$ regüler açık bir kümedir ve $V \subset V^{-\circ} \subset V^{-}$ olduğu açıktır. f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğundan, 5.5. Teorem gereğince, $f^{-1}(V^{-\circ})$ kümesi X de açıktır. Dolayısıyla $f^{-1}(V^{-\circ}) \subset f^{-1}(V^{-}) \subset (f^{-1}(V))^{-}$ olur. Bu ise $(f^{-1}(V))^{-}$ kümesinin x noktasının bir komşuluğu olması demektir. O halde f fonksiyonu Husain anlamında hemen hemen sürekli dir.

5.12 Teorem: [14] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu açık ve Husain anlamında hemen hemen sürekli olsun. f fonksiyonunun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^{-} = f^{-1}(V^{-})$ olmasıdır.

İspat: \Rightarrow 5.1. Sonuçtan elde edilir.

\Leftarrow Her $V \subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^{-} = f^{-1}(V^{-})$ olsun. Bir $x \in X$ noktası ve her $f(x)$ noktasını içeren herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. f fonksiyonu Husain anlamında hemen hemen sürekli olduğundan $x \in U \subset (f^{-1}(V))^{-} \subset f^{-1}(V^{-})$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $f(U) \subset f((f^{-1}(V))^{-}) \subset V^{-}$ elde edilir. Böylece f fonksiyonu zayıf sürekli dir. f fonksiyonu açık ve zayıf sürekli olduğundan 5.4. Teorem gereğince, f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen sürekli dir.

BÖLÜM VI

YARI AÇIK KÜMELER VE TOPOLOJİK UZAYLARDA YARI SÜREKLİLİK

Bu bölümde zayıf sürekli fonksiyonların yarı sürekli fonksiyonlarla ilgisi araştırılmıştır. Öncelikle yarı açık küme kavramını inceleyelim.

6.1. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde X içinde açık bir U kümesi varsa A alt kümesine yarı açık [13] denir.

6.1. Teorem: [13] (X, τ) bir topolojik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. A kümesinin yarı açık bir küme olması için gerek ve yeter koşul $A \subset A^{o-}$ olmasıdır.

İspat: \Rightarrow (X, τ) bir topolojik uzay ve A alt kümesi X içinde yarı açık bir küme olsun. Bu durumda 6.1. Tanımdan $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde U açık kümesi vardır.

$U \subset A \Rightarrow U^o \subset A^o \Rightarrow U \subset A^o \Rightarrow U^- \subset A^{o-}$ elde edilir. Dolayısıyla $A \subset U^- \subset A^{o-}$ olur. Böylece $A \subset A^{o-}$ elde edilir.

\Leftarrow : $A \subset A^{o-}$ olsun. $U = A^o$ diyelim.

$U^- = A^{o-}$ olur. Buradan da $A^{o-} \subset U^-$ dır.

$A^{o-} \subset U^- \Rightarrow A \subset A^{o-} \subset U^- \Rightarrow U \subset A \subset U^-$ elde edilir.

6.2. Teorem: [13] Her açık küme yarı açıktır.

İspat: (X, τ) topolojik uzay ve A, X de açık bir küme olsun. $A = A^o$ olur. Dolayısıyla $A = A^o \subset A^{o-} \subset A^{o-}$ elde edilir. Böylece $A \subset A^{o-}$ olup A kümesi X de yarı açıktır.

6.1 Lemma: Yarı açık bir kümenin genelde açık olması gerekmez. Gerçekten $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisi verilsin. $\{a, c\}$ kümesi, X de yarı açıktır, fakat açık değildir. İki yarı açık kümenin kesişimi genellikle yarı açık değildir. Gerçekten $\{b, c\}$ kümesi, X de yarı açıktır. Fakat $\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$ kümesi X de yarı açık değildir.

6.3. Teorem: [13] X bir topolojik uzay ve $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, X içindeki yarı açık kümeler ailesi olsun.

Bu durumda $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ kümesi yarı açıktır.

İspat: Her $\alpha \in \Delta$ için $U_\alpha \subset A_\alpha \subset (U_\alpha)^-$ olacak şekilde bir $U_\alpha \subset X$ açık kümesi vardır.

Buradan $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} (U_\alpha)^- \subset (\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha)^-$ olur. $U = \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$ olarak alınırsa

$U \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subset U^-$ elde edilir. Dolayısıyla $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ kümesi, X de yarı açıktır.

6.4. Teorem: [13] A , X topolojik uzayında yarı açık ve $A \subset B \subset \overline{A}$ olsun. Bu durumda B kümesi, X de yarı açıktır.

İspat: A yarı açık olduğundan $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır. $A \subset B \subset A^-$ olduğundan $U \subset B$ olur. $A \subset U^-$ dan $A^- \subset U^-$ elde edilir. O halde $B \subset U^-$ dir. Dolayısıyla $U \subset B \subset U^-$ olur. Böylece B kümesi, X de yarı açıktır.

6.5. Teorem: [17] U açık bir küme ve A yarı açık bir küme olsun. Bu durumda $U \cap A$ yarı açıktır.

İspat: A kümesi yarı açık olduğundan $O \subset A \subset O^-$ olacak şekilde bir O açık kümesi vardır. U açık küme olduğundan $U \cap O^- \subset (U \cap O)^-$ olur. Buradan $O \cap U \subset A \cap U \subset (O \cap U)^-$ elde edilir. Dolayısıyla $O \cap U$ açık olduğundan $A \cap U$ kümesi yarı açıktır.

6.6. Teorem: [17] A kümesinin yarı açık olması için gerek ve yeter şart $A^- = A^{o-}$ olmasıdır.

İspat: \Rightarrow A yarı açık olsun. 6.1. Teoremden $A \subset A^{o-}$ olup buradan $A^- \subset A^{o-}$ olur. Diğer taraftan $A^o \subset A$ olduğundan $A^{o-} \subset A^-$ olur. Dolayısıyla $A^- = A^{o-}$ elde edilir.

\Leftarrow : Hipotez gereğince $A^o \subset A \subset A^- = A^{o-}$ olur. Dolayısıyla A yarı açıktır.

6.7. Teorem: [17] A boş olmayan yarı açık bir küme olsun. Bu durumda $A^\circ \neq \emptyset$ olur.

İspat: A kümesi yarı açık olduğundan 6.4. Teoremden $A^- = A^{\circ-}$ elde edilir. $A^\circ = \emptyset$ olduğunu farz edelim. Bu durumda $A^- = \emptyset$ ve böylece $A = \emptyset$ olur. Bu hipotezle çelişir. Dolayısıyla $A^\circ \neq \emptyset$ dir.

6.8. Teorem: [13] X topolojik uzay ve Y , X in alt uzayı olmak üzere $A \subset Y \subset X$ olsun. A kümesi, X de yarı açık ise, bu durumda A kümesi Y de yarı açık olur.

İspat: A kümesi, X de yarı açık olsun. Bu durumda $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan $U \subset A \subset Y \Rightarrow U \subset Y$ dir. Böylece $U = U \cap Y \subset A \cap Y \subset U^- \cap Y$ olur. O halde $U \subset A \subset (U)_Y^-$ olur. U kümesi Y de açıktır. Dolayısıyla A kümesi, Y de yarı açıktır.

Not: X uzayının tüm yarı açık kümelerinin ailesi $Y.A(X)$ ile gösterilsin.

6.9. Teorem: [13] τ , X içindeki açık kümeler ailesi olsun. Bu durumda;

(1) $\tau \subset Y.A(X)$,

(2) $A \in Y.A(X)$ ve $A \subset B \subset A^-$ için $B \in Y.A(X)$ dir.

İspat: 6.4. Teorem [13] den açıktır.

6.10. Teorem: [13] $\beta = \{B_\alpha\}$ X içindeki kümeler ailesi olsun. (1) $\tau \subset \beta$ ve eğer (2) $B \in \beta$ için $B \subset D \subset B^-$ ise $D \in \beta$ dir. Buradan $Y.A(X)$ (1) ve (2) yi sağlayan en küçük kümeler ailesidir.

İspat: $A \in Y.A(X)$ olsun. Bu durumda $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde X içinde açık bir U kümesi vardır. U açık olduğundan $U \in \tau \subset \beta$ ise $U \in \beta$ dir. $\tau \subset \beta$ ve $U \in \beta$ için $U \subset A \subset U^-$ şartı sağladığından $A \in \beta$ dir. Böylece $Y.A(X)$ (1) ve (2) koşullarını sağlayan X deki en küçük kümeler ailesidir.

6.11 Teorem: [13] (X, τ) bir topolojik uzay ve U, X içinde açık bir küme olsun. $U^- \setminus U$ kümesi X içinde hiçbir yerde yoğun değildir.

6.12 Teorem: [13] X bir topolojik uzay olmak üzere $A \in \mathcal{Y}.A(X)$ olsun. (1) $U \in \tau$, (2) $U \cap B = \emptyset$ ve (3) B hiçbir yerde yoğun değil ise $A = U \cup B$ dir.

İspat: $A \in \mathcal{Y}.A(X)$ olsun. Bu durumda A, X içinde yarı açık bir kümedir. Dolayısıyla $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde X içinde açık bir U kümesi vardır. Fakat $A = U \cup (A \setminus U)$ dur.

$B = (A \setminus U)$ olarak seçelim. Buradan $A = U \cup B$ olur. $B \subset (U^- \setminus U)$ olduğundan 6.11 Teorem [13] den dolayı B hiçbir yerde yoğun değildir. Dolayısıyla $A = U \cup B$ olduğundan (1) ve (2) doğrudan elde edilir, $U \cap B = U \cap (A \setminus U) = \emptyset$ dir. Yani U, X içinde açık olduğundan (1) $U \in \tau$ ve $B = A \setminus U$ aldığımızdan (2) $U \cap B = U \cap (A \setminus U) = \emptyset$ dir.

6.13 Teorem: [13] Yarı açık bir kümenin bileşenlerinin de yarı açık olması gerekli değildir. Bu teorem aşağıdaki örnekte verilmiştir.

6.1. Örnek: X reel bir uzay ve

$$A = \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \dots \cup \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right) \cup \dots \text{ olsun}$$

A yarı açık bir kümedir. Fakat A nın bileşeni olan $\{0\}$, X de yarı açık değildir.

6.14 Teorem: [13] X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ sürekli ve içine bir fonksiyon olsun. $A \in \mathcal{Y}.A(X)$ ise $f(A) \in \mathcal{Y}.A(Y)$ dir.

İspat: $A \in \mathcal{Y}.A(X)$ olsun. Bu durumda $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde X içinde açık bir U kümesi vardır. U açık olmak üzere $A = U \cup B$ ve $B \subset (U^- \setminus U)$ olsun. $U \subset A = U \cup B \Rightarrow U \subset U \cup B$ dir.

$$f(U) \subset f(A) = f(U \cup B) = f(U) \cup f(B) \subset f(U) \cup f(U^-) \subset f(U) \cup f(U)^- = f(U)^-$$

Buradan da $f(U) \subset f(A) \subset f(U)^-$ olacak şekilde Y içinde açık bir $f(U)$ görüntü kümesi de vardır. Bu da $f(A)$ nın Y içinde yarı açık olduğunu gösterir.

6.15 Teorem: [17] A ve X_0 , bir X topolojik uzayının alt kümeleri olsun. Öyle ki $A \subset X_0$ ve X_0 , X de yarı açık bir küme olsun. Bu durumda A kümesinin X de yarı açık olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin X_0 da yarı açık olmasıdır.

İspat: \Rightarrow 6.8 Teoreminden [13] den açıktır.

\Leftarrow : A kümesi X_0 da yarı açık olsun. Bu durumda $U_0 \subset A \subset (U_0)_{x_0}^-$ olacak şekilde bir $U_0 \subset X_0$ açık kümesi vardır. U_0, X_0 da açık olduğundan $U_0 = U \cap X_0$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi vardır. Böylece,

$U \cap X_0 \subset A \subset (U_0)_{x_0}^- \cap X_0 \subset (U_0)_{x_0}^- = (U \cap X_0)_{x_0}^- \subset (U \cap X_0)^-$ elde edilir. X_0 kümesi, X de yarı açık olduğundan 6.5 Teorem [17] den $U \cap X_0, X$ de yarı açıktır. Böylece 6.4. Teorem [13] gereğince A kümesi X de yarı açıktır.

YARI SÜREKLİLİK

Aşağıdaki tanımı N.Levine (1963) yapmıştır.

6. Tanım: $f : X \rightarrow Y$ tek değerli ve sürekli olması gerekli olmayan bir fonksiyon olsun. Y deki her V açık kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesi, X de yarı açık oluyorsa f fonksiyonuna yarı sürekli [13] bir fonksiyon denir.

6.16. Teorem: [13] Her sürekli fonksiyon yarı sürekli, karşıtı doğru değildir.

İspat: Her açık kümenin yarı açık olmasından çıkar. Fakat yarı sürekli bir fonksiyonun genelde sürekli olması gerekmez. Gerçekten $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerine $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisi ve $Y = \{a, b\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi verilsin.

$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = a$, $f(c) = f(d) = b$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu yarı sürekli, fakat sürekli değildir. Çünkü $b \in X$ noktası ve $f(b) = a \in V = \{a\} \subset Y$ açık kümesi için $b \in U = \{a, b, d\}$ açık kümesi ve $f(U) = \{a, b\}$ olur. Buradan $f(U) \not\subset V$ olduğundan f fonksiyonu sürekli değildir.

6.1. Lemma: [20] Yarı süreklilik zayıf süreklilikten bağımsızdır.

6.2 Örnek: Zayıf sürekli bir fonksiyonun yarı sürekli olması gerekmez. $X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}\}$ topolojisi verilsin.

$f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu $f(a) = c$, $f(b) = d$, $f(c) = b$ ve $f(d) = a$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu zayıf süreklidir. Fakat yarı sürekli değildir. Gerçekten $V = \{c\} \subset X$ açık kümesi için $f^{-1}(V) = f^{-1}(\{c\}) = \{a\}$ için $U \subset \{a\} \subset U^-$ olacak şekilde bir $U \subset X$ açık kümesi yoktur. Dolayısıyla f yarı sürekli değildir.

6.3. Örnek: Yarı sürekli bir fonksiyonun zayıf sürekli olması gerekmez. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4\}$ topolojisi ve $Y = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{y, z\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu

$f(1) = x$, $f(2) = y$, $f(3) = f(4) = z$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu yarı süreklidir, fakat zayıf sürekli değildir. Gerçekten, $2 \in X$ noktası ve $f(2) = y \in V = \{y, z\}$ açık kümesi için $V^- = \{y, z\}$ ve $2 \in U = \{1, 2, 3\}$ kümesi için $f(U) = \{x, y, z\} = Y$ olduğundan $f(U) \not\subset V^-$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu zayıf sürekli değildir.

6.17. Teorem: [13] X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonunun yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $p \in X$ noktası ve $f(p)$ noktasının içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V$ olacak şekilde p noktasını içeren bir $U \subset X$ yarı açık kümesinin var olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow f: X \rightarrow Y$ yarı sürekli bir fonksiyon ve $f(p) \in V$ olsun. Bu durumda $p \in f^{-1}(V)$ kümesi X de yarı açıktır. $U = f^{-1}(V)$ diyelim. Buradan $p \in U$ ve $f(U) \subset V$ olur.

\Leftarrow : V, Y içinde açık herhangi bir küme ve $p \in f^{-1}(V)$ olsun. Bu durumda $f(p) \in V$ olur ve böylece $p \in U_p$ ve $f(U_p) \subset V$ olacak şekilde bir $U_p \subset X$ yarı açık kümesi vardır. Buradan $p \in U_p \subset f^{-1}(V)$ ve $f^{-1}(V) = \bigcup_{p \in f^{-1}(V)} U_p$ olur. 6.3 Teorem [13] gereğince $f^{-1}(V)$ kümesi, X de yarı açıktır.

6.4. Tanım: Bir topolojik uzayın her noktasında sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa bu topolojik uzaya “birinci sayılabilir uzay” veya bir “ A_1 -uzayı” denir.

6.5. Tanım: Bir topolojik uzayın sayılabilir bir tabanı varsa bu topolojik uzaya “ikinci sayılabilir uzay” veya bir “ A_2 – uzayı” denir.

6.18. Teorem: [13] $f: X \rightarrow Y$ yarı sürekl bir fonksiyon ve Y , ikinci sayılabilir bir uzay olsun. P , f fonksiyonunun sürekli olmadığı noktalarının kümesi olsun. Bu durumda P , birinci kategoriden bir küme olur.

İspat: $p \in P$ olsun. Y , ikinci sayılabilir bir uzay olduğundan Y nin sayılabilir bir her $i \in I$ için O_{ip} şeklinde açık bir tabanı vardır. Bu durumda $p \in O \subset X$ alt kümesi X içinde açıktır ve P , f fonksiyonunun sürekli olmadığı noktalarının kümesi olduğundan $f(O) \not\subset O_{ip}$ olur. 6.17 Teorem gereğince $p \in A_{ip}$ ve $f(A_{ip}) \subset O_{ip}$ olacak şekilde bir $A_{ip} \subset X$ yarı açık kümesi vardır. $A_{ip} = O_{ip} \cup B_{ip}$ olması durumunda $B_{ip} \subset (O_{ip}^- \setminus O_{ip})$ olur. Böylece $p \notin Q_{ip}$ ve $p \in B_{ip}$, hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme olur. Yani $(B_{ip})^{-o} = \emptyset$ olur.

$P \subset \bigcup_{p \in P} B_{ip}$ ve $\bigcup_{p \in P} B_{ip}$ birinci kategoriden olduğundan P kümesi de birinci kategoriden bir küme olur.

6.19 Teorem: [13] X_1 ve X_2 topolojik uzaylar olmak üzere $X = X_1 \times X_2$ den oluşan bir çarpım uzayı olsun. A_1 , X_1 içinde yarı açık bir küme ve A_2 , X_2 içinde yarı açık bir küme olsun. Bu durumda $A_1 \times A_2$ çarpım kümesi de $X_1 \times X_2$ içinde yarı açık bir küme olur.

İspat: A_1 , X_1 içinde yarı açık bir küme olduğundan $V_1 \subset A_1 \subset V_1^-$ olacak şekilde X_1 içinde açık bir V_1 kümesi vardır. Benzer şekilde A_2 , X_2 içinde yarı açık bir küme olduğundan $V_2 \subset A_2 \subset V_2^-$ olacak şekilde X_2 içinde açık bir V_2 kümesi vardır.

V_1 , X_1 içinde açık bir küme ve $B_1 \subset (V_1^- \setminus V_1)$ olmak üzere $A_1 = V_1 \cup B_1$ dir.

V_2 , X_2 içinde açık bir küme ve $B_2 \subset (V_2^- \setminus V_2)$ olmak üzere $A_2 = V_2 \cup B_2$ dir.

$A_1 \times A_2 = (V_1 \cup B_1) \times (V_2 \cup B_2) = (V_1 \times V_2) \cup (V_1 \times B_2) \cup (B_1 \times V_2) \cup (B_1 \times B_2)$ dir. $V_1 \times V_2$, $X_1 \times X_2$ içinde açık bir kümedir ve $(B_1 \times V_2) \cup (V_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2) \subset V_1^- \times V_2^- = (V_1 \times V_2)^-$ dir.

$V_1 \times V_2 \subset A_1 \times A_2 \subset (V_1 \times V_2)^-$ olacak şekilde $X_1 \times X_2$ içinde açık bir $V_1 \times V_2$ kümesi vardır ve dolayısıyla $A_1 \times A_2$ kümesi $X_1 \times X_2$ içinde yarı açık bir kümedir.

6.20. Teorem: [13] $i = 1, 2$ için $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ yarı süreklî fonksiyonlar olsun. $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu yarı süreklîdir.

İspat: $V_1 \times V_2 \subset Y_1 \times Y_2$ olsun. $i = 1, 2$ için f_i fonksiyonları yarı süreklî olduğundan Y_i içinde açık birer O_i kümeleri vardır. $f^{-1}(V_1 \times V_2) = f_1^{-1}(V_1) \times f_2^{-1}(V_2)$ dir. $f_1^{-1}(V_1)$ ve $f_2^{-1}(V_2)$ sırasıyla X_1 ve X_2 içinde yarı açık olduklarından 6.19 Teorem gereğince $f_1^{-1}(V_1) \times f_2^{-1}(V_2)$ çarpım kümesi de $X_1 \times X_2$ içinde yarı açık olur. $Y_1 \times Y_2$ içinde açık bir V kümesi için $V = \cup V_\alpha$ olacak şekilde V_α kümelerini $V_{\alpha_1} \times V_{\alpha_2}$ formunda yazalım. ($V_{\alpha_1} \subset Y_1$ ve $V_{\alpha_2} \subset Y_2$)

$f^{-1}(V) = f^{-1}(\cup V_\alpha) = \cup(f^{-1}(V_\alpha))$ ve $\cup(f^{-1}(V_\alpha))$ kümesi 6.3. Teorem [13] gereğince yarı açık küme olduğundan $f^{-1}(V_\alpha)$ kümesi de $X_1 \times X_2$ içinde yarı açık olur. Bu durumda f fonksiyonu yarı süreklîdir.

6.21. Teorem: [13] X, X_1 ve X_2 topolojik uzaylar olmak üzere $x \in X$ için $h(x) = (x_1, x_2)$ şeklinde tanımlanan $h: X \rightarrow X_1 \times X_2$ fonksiyonu yarı süreklî olsun. $i = 1, 2$ için $f_i(x) = x_i$ şeklinde tanımlanan $f_i: X \rightarrow X_i$ fonksiyonu da yarı süreklîdir.

İspat: Yalnızca $f_1: X \rightarrow X_1$ fonksiyonunun yarı süreklî bir fonksiyon olduğunu göstermemiz yeterlidir.

V_1, X_1 içinde açık bir küme olsun. $V_1 \times X_2$ çarpım kümesi $X_1 \times X_2$ içinde açık bir küme olur. h fonksiyonu yarı süreklî olduğundan $h^{-1}(V_1 \times X_2)$ kümesi X içinde yarı açık bir kümedir. Buradan $f_1^{-1}(V_1) = h^{-1}(V_1 \times X_2)$ olduğundan $f_1^{-1}(V_1)$ kümesi X içinde yarı açık bir küme olur. Böylece f_1 fonksiyonu yarı süreklî bir fonksiyon olur.

6.2. Lemma: [13] 6.4. Örnekte gösterildiği gibi 6.21. Teorem [13] ün karşıtı genellikle doğru değildir.

6.4. Örnek: [13] $X = X_1 = X_2 = [0,1]$ olsun.

$f_1 : X \rightarrow X_1$ fonksiyonu $f_1(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ için} \\ 0, \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ için} \end{cases}$ şeklinde ve

$f_2 : X \rightarrow X_2$ fonksiyonu $f_2(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ için} \\ 0, \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ için} \end{cases}$ şeklinde tanımlı iki fonksiyon olsun.

$i = 1, 2$ için $f_i : X \rightarrow X_i$ fonksiyonları yarı süreklidir fakat $h(x) = (f_1(x), f_2(x))$ şeklinde tanımlanan $h : X \rightarrow X_1 \times X_2$ fonksiyonu yarı sürekli değildir. Çünkü $X_1 \times X_2$ içindeki $S_{\frac{1}{2}}(1,0)$ ile gösterilen yarı çapı $\frac{1}{2}$ ve merkezi $(1,0)$ olan küresel komşuluk (açık yuvar) açık olduğu halde $h^{-1}(S_{\frac{1}{2}}(1,0)) = \left(\frac{1}{2}\right)$, X içinde yarı açık değildir. Dolayısıyla h fonksiyonu yarı sürekli değildir.

6.3. Lemma: [13] Yarı sürekli fonksiyonların limiti genellikle yarı sürekli değildir. Bu 6.5. Örnek ile gösterilmiştir.

6.5. Örnek: $X = Y = [0,1]$ ve $f_n : X \rightarrow Y$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlanmış olsun.

$f_o : X \rightarrow Y$, $f_o(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 1, x = 1 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanmış yarı sürekli bir fonksiyonun limiti olsun.

$(\frac{1}{2}, 1]$ aralığı Y içinde açıktır fakat $f_o^{-1}\left((\frac{1}{2}, 1]\right) = 1$, X içinde yarı açık bir küme değildir.

Dolayısıyla $f_o : X \rightarrow Y$ limit fonksiyonu yarı sürekli değildir.

Şimdi de yarı sürekliliğin, Singal anlamında hemen hemen süreklilikten bağımsız olduğunu gösterelim.

6.4. Lemma: Singal anlamında hemen hemen sürekli bir fonksiyonun yarı sürekli olması gerekmez.

6.6. Örnek: $X=\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$ topolojisi ve $Y=\{x,y,z\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\emptyset, Y, \{z\}, \{x,z\}, \{y,z\}\}$ topolojisi verilsin. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(1)=f(2)=x$, $f(3)=y$ ve $f(4)=z$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen süreklidir, fakat yarı sürekli değildir. Gerçekten $V=\{z\}$ açık kümesi için $f^{-1}(V) = \{4\}$ kümesi X içinde yarı açık olmadığından f fonksiyonu yarı sürekli değildir.

Yarı süreklilik, zayıf* süreklilikten bağımsızdır.

6.5. Lemma: Yarı sürekli bir fonksiyonun zayıf* sürekli olması gerekmez.

6.7. Örnek: $X = \{x,y,z\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu $f(x)=f(y)=x$, $f(z)=z$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu yarı süreklidir, fakat zayıf* sürekli değildir. Gerçekten $V=\{x\} \subset X$ açık kümesi için $\partial V = V^- \cap (Y \setminus V)^- = \{x\}^- \cap \{y,z\}^- = \{y,z\}$ olup $f^{-1}(\partial V) = f^{-1}(\{y,z\}) = \{z\}$ kümesi X de kapalı bir küme olmadığından f fonksiyonu zayıf* sürekli değildir.

6.6. Lemma: Zayıf* sürekli bir fonksiyonun yarı sürekli olması gerekmez.

6.8. Örnek: $X=\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{3\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}\}$ topolojisi ve $Y=\{x,y,z\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{y\}, \{y,z\}, \{x,y\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(1)=f(2)=x$, $f(3)=y$ ve $f(4)=z$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu zayıf* süreklidir, fakat yarı sürekli değildir. Gerçekten Y deki $V=\{x\}$ açık kümesi için $f^{-1}(V)=\{1,2\}$ olduğundan $A \subset f^{-1}(V) \subset A^-$ olacak şekilde τ topolojisinde açık bir küme bulunamaz. $f^{-1}(V) = \{1,2\}$ kümesi X de yarı açık olmadığından f fonksiyonu yarı sürekli değildir.

Yarı süreklilik, ön süreklilikten bağımsızdır.

6.7. Lemma: Yarı sürekli bir fonksiyonun ön sürekli olması gerekmez.

6.9. Örnek: $X=\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$ topolojisi ve $Y=\{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{y, z\}\}$ topolojisi verilsin.

$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(1)=x, f(2)=y, f(3)=f(4)=z$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu yarı süreklidir fakat ön sürekli değildir. Gerçekten Y deki $V=\{y, z\}$ açık kümesi için $f^{-1}(V) = \{2,3,4\}$ ve $(f^{-1}(V))^- = (\{2,3,4\})^- = \{2,3,4\}$ ve $(f^{-1}(V))^{-o} = (\{2,3,4\})^o = \{3,4\}$ olduğundan $f^{-1}(V) \not\subset (f^{-1}(V))^{-o}$ elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu ön sürekli değildir.

6.8. Lemma: Ön sürekli bir fonksiyonun yarı sürekli olması gerekmez.

6.10. Örnek: $X=\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$ topolojisi ve $Y=\{x, y, z\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{\emptyset, Y, \{y\}, \{z\}, \{y, z\}, \{x, y\}\}$ topolojisi ve $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(1)=x, f(2)=f(3)=y$ ve $f(4)=z$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu ön süreklidir fakat yarı sürekli değildir. Gerçekten Y deki $V=\{z\}$ açık kümesi için $f^{-1}(V) = \{4\}$ olduğundan $A \subset f^{-1}(V) \subset A^-$ olacak şekilde τ topolojisinde açık bir A kümesi bulunamaz. Dolayısıyla $f^{-1}(V) = \{4\}$ kümesi X de yarı açık olmadığından f fonksiyonu yarı sürekli değildir.

6.22. Teorem: [17] $f: X \rightarrow Y$ açık ve yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Y deki her B yarı açık kümesi için $f^{-1}(B)$ kümesi, X de yarı açıktır.

İspat: B kümesi, Y de herhangi bir yarı açık küme olsun. Bu durumda $V \subset B \subset V^-$ olacak şekilde Y içinde açık bir V kümesi vardır. f fonksiyonu açık olduğundan $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(B) \subset f^{-1}(V^-) \subset (f^{-1}(V))^-$ olur. f yarı sürekli ve V kümesi Y de açık olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi, X de yarı açıktır. 6.4. Teorem [13] gereğince $f^{-1}(B)$ kümesi X de yarı açıktır

6.23. Teorem: [17] X, Y ve Z topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ açık ve yarı sürekl bir fonksiyon ve $g: Y \rightarrow Z$ yarı sürekl bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g \circ f: X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu yarı süreklidir.

İspat: $B \subset Z$ açık herhangi bir alt kümesi olsun. g fonksiyonu yarı sürekl olduğundan $g^{-1}(B)$ kümesi, Y de yarı açıktır. f fonksiyonu açık ve yarı sürekl olduğundan 6.22. Teorem [17] gereğince $f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$ kümesi X de yarı açıktır. Dolayısıyla $g \circ f$ bileşke fonksiyonu yarı süreklidir.

6.24. Teorem: [16] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön açık ve yarı sürekl ve $g: Y \rightarrow Z$ fonksiyonu yarı sürekl olsun. Bu durumda $g \circ f: X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu yarı süreklidir.

İspat: g fonksiyonu yarı sürekl olduğundan $V \subset Z$ açık kümesi için $g^{-1}(V)$ kümesi Y de yarı açık olur. f fonksiyonu ön açık ve yarı sürekl olduğundan 6.22. Teorem [17] gereğince, Y deki her $g^{-1}(V)$ yarı açık kümesi için $f^{-1}(g^{-1}(V))$ kümesi, X de yarı açık olur. Dolayısıyla $g \circ f$ fonksiyonu yarı süreklidir.

Yarı sürekl fonksiyonların bir diğer karakterizasyonunun yalnızca ifadesini verelim. Önce yarı kapalı küme tanımını verelim.

6.6. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve X kümesinin bir A alt kümesi verilsin. $V^\circ \subset A \subset V$ olacak şekilde X de kapalı bir V kümesi varsa A kümesine “yarı kapalı” küme denir. A kümesini kapsayan bütün yarı kapalı kümelerin kesişimine, A kümesinin yarı kapanışı denir. A_s^- ile gösterilir. [3]

6.25. Teorem: [3] X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- f fonksiyonu yarı süreklidir.
- Y uzayındaki her açık kümenin ters görüntüsü, X uzayında yarı açıktır.
- Her $p \in X$ noktası ve $f(p)$ noktasını içeren her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V$ olacak şekilde p noktasını içeren bir $U \subset X$ açık kümesi vardır.

d) Y uzayındaki her kapalı kümenin, ters görüntüsü X uzayında yarı kapalıdır.

e) Her $U \subset X$ için $f(U_s^-) \subset (f(U))^-$ dir.

f) Her $V \subset Y$ için $(f^{-1}(V))_s^- \subset f^{-1}(V^-)$ dir.

6.26. Teorem: [16] A kümesi, X de ön açık ve B kümesi, X de yarı açık olsun. Bu durumda $A \cap B$ kümesi, A da yarı açıktır.

İspat: A kümesi ön açık ve B kümesi yarı açık olduğundan

$A \cap B \subset (A^{-\circ}) \cap (B^{-\circ}) \subset (A^{-\circ} \cap B^{-\circ})^- \subset (A^- \cap B^-)^- \subset (A \cap B)^-$ olur. Böylece

$A \cap B \subset (A \cap B)^- \cap A = (A \cap B)_A^-$ elde edilir. Buradan B° kümesi, X de açık olduğundan,

$(A \cap B^{\circ})$ kümesi, A da açıktır. Dolayısıyla $A \cap B \subset ((A \cap B^{\circ})_A^{\circ})_A^- \subset ((A \cap B)_A^{\circ})_A^-$ olur.

Böylece $A \cap B$ kümesi, A da yarı açıktır.

6.27. Teorem: [16] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu yarı süreklili ve A kümesi X uzayında ön açık bir küme olsun. Bu durumda $f|_A: A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu yarı süreklidir.

İspat: V, Y de herhangi bir açık küme olsun. f fonksiyonu yarı süreklili olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi, X de yarı açıktır. A kümesi X uzayında ön açık olduğundan ve 6.26. Teorem [16] gereğince, $f^{-1}(V) \cap A = f|_A^{-1}(V)$ kümesi, A da yarı açık olur. Dolayısıyla $f|_A: A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu yarı süreklidir.

6.28. Teorem: [16] V kümesi, X uzayında ön açık ve A kümesi, X de yarı açık olsun. Bu durumda $A \cap V$ kümesi, A da ön açıktır.

İspat: V kümesi, ön açık ve A kümesi yarı açık olduğundan

$A \cap V = A \cap (V^{-\circ}) \subset (A \cap V^{-\circ})_A^{\circ} \subset (A^{-\circ} \cap V^{-\circ})_A^{\circ} \subset ((A^{-\circ} \cap V^{-\circ})_A^-)^{\circ} \subset ((A^{-\circ} \cap V^-)_A^-)^{\circ} \subset ((A \cap V)_A^-)^{\circ}$ elde edilir. Böylece

$A \cap V \subset (((A \cap V)_A^-)^{\circ})_A \cap A = ((A \cap V)_A^- \cap A)_A^{\circ} = ((A \cap V)_A)_A^{\circ}$ olur. Dolayısıyla $A \cap V$

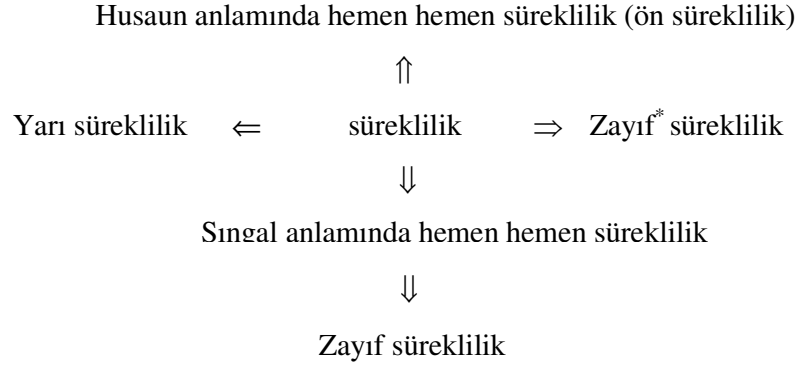
kümesi, A da ön açıktır.

6.29. Teorem: [16] $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön süreklidir ve A kümesi, X de yarı açık olsun. Bu durumda $f|_A: A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu ön süreklidir.

İspat: V , Y de herhangi bir açık küme olsun. f fonksiyonu ön süreklidir olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi, X de ön açıktır. A kümesi yarı açık olduğundan ve 6.28 Teorem [16] gereğince $f^{-1}(V) \cap A = f|_A^{-1}(V)$ kümesi A da ön açık olur. Dolayısıyla $f|_A: A \rightarrow Y$ kısıtlanmış fonksiyonu ön süreklidir.

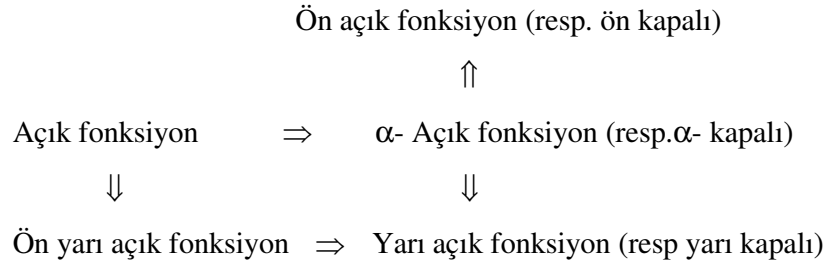
BÖLÜM VII

Bu bölümde çalışmamız boyunca incelediğimiz zayıf sürekli fonksiyon çeşitlerinin süreklilikle birlikte bir karşılaştırılması diyagram olarak yapılarak bir sonuca varılmıştır. Bu diyagramdaki gerektirmelerin karşıtlarının genellikle doğru olmadığı bundan önceki bölümlerde örnekler verilerek gösterilmiştir.



- [1] Zayıf süreklilik, Singal anlamında hemen hemen sürekliliği gerektirmez. (5.2. Örnek)
- [2] Singal anlamında hemen hemen süreklilik, zayıf* sürekliliği gerektirmez. (5.3. Örnek)
- [3] Zayıf* süreklilik, zayıf sürekliliği gerektirmez. (3.2. Örnek)
- [4] Ön süreklilik, zayıf sürekliliği gerektirmez. (4.2. Örnek)
- [5] Singal anlamında hemen hemen süreklilik, yarı sürekliliği gerektirmez. (6.6. Örnek)
- [6] Yarı süreklilik, zayıf sürekliliği gerektirmez. (6.3. Örnek)
- [7] Singal anlamında hemen hemen süreklilik, ön sürekliliği gerektirmez. (5.4. Örnek)
- [8] Singal anlamında hemen hemen süreklilik, sürekliliği gerektirmez. (5.1. Örnek)
- [9] Zayıf süreklilik, yarı sürekliliği gerektirmez. (6.2. Örnek)
- [10] Yarı süreklilik, Zayıf* sürekliliği gerektirmez. (6.7. Örnek)
- [11] Zayıf* süreklilik, yarı sürekliliği gerektirmez. (6.8. Örnek)
- [12] Yarı süreklilik, ön sürekliliği gerektirmez. (6.9. Örnek)
- [13] Ön süreklilik, yarı sürekliliği gerektirmez. (6.10. Örnek)

Açık fonksiyonların bir karşılaştırması da aşağıdaki diyagramda verilmiştir. Bu gerektirmelerin karşıtları aşağıda verilen örneklerde gösterildiği gibi genellikle doğru değildir.



7.1. Örnek: $X=Y=\{x,y,z\}$ kümesi verilsin. X üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{x, y\}, \{x\}\}$ ve Y üzerindeki topoloji $\sigma = \{\emptyset, Y, \{x, y\}, \{x\}\}$ olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $f(x)=x, f(y)=z, f(xz)=y$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu α - açık ve α - kapalıdır, fakat ne açık ne de kapalı fonksiyon değildir.

7.2. Örnek: Açık bir fonksiyonun ön yarı açık olması gerekmez. 7.4. Örnekteki f fonksiyonu açıktır, fakat ön yarı açık değildir. Gerçekten X deki $U=\{a,c\}$ yarı açık kümesi için $f(U)=\{a,c\}$ kümesi, Y de yarı açık olmadığından f fonksiyonu ön yarı açık değildir.

Örnek: Ön yarı açık bir fonksiyonun açık olması gerekmez. $X=Y=\{a,b,c\}$ kümeleri üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ ve $\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojileri verilsin. $f: (X \rightarrow \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyon olsun. f fonksiyonu ön yarı açıktır. Fakat açık değildir. Gerçekten X deki $U=\{b,c\}$ açık kümesi için $f(U)=\{b,c\}$ kümesi, Y de açık değildir. Dolayısıyla f fonksiyonu açık değildir.

YARI-ÖN AÇIK KÜMELER

7.1. Tanım: X topolojik uzayında $A \subset X$ kümesi için $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde X içinde bir U ön açık kümesi var ise A kümesine “yarı-ön açık küme” denir. X deki tüm yarı ön açık kümelerin sınıfı $Y.\ddot{O}.A(X)$ ile gösterilecektir. [5]

7.1. Teorem: [5] X topolojik uzayında herhangi bir A alt kümesi için aşağıdaki ifadeler denktir.

- a) $A \in Y.\ddot{O}.A(X)$
- b) $A \subset A^{-\circ}$
- c) $A^- \in D.K.(X)$

Not: X deki tüm regüler kapalı kümelerin sınıfı $D.K.(X)$ ile gösterilecektir.

İspat: a) \Rightarrow b) A, X de yarı – ön açık bir küme olduğundan $U \subset A \subset U^-$ olacak şekilde X içinde ön açık bir U kümesi vardır. Bu da $A^- = U^-$ olduğunu gösterir ve bu nedenle $A^{-\circ} = U^{-\circ}$ elde edilir. U kümesi ön açık bir küme olduğundan $U \subset U^{-\circ}$ dir ve buradan $A \subset U^- \subset U^{-\circ} = A^{-\circ}$ elde edilir.

b) \Rightarrow c) $A \subset A^{-\circ}$ olsun ve $A^- = A^{-\circ}$ ise $A \in D.K.(X)$ dir.

c) \Rightarrow a) $A^- = A^{-\circ}$ olduğunu farz edelim ve $U = A \cap (A^{-\circ})^-$ şeklinde seçelim. Bu durumda U kümesi ön açık kümedir. Buradan $A^{-\circ} = A^- \cap A^{-\circ} \subset (A \cap A^{-\circ})^- = U^-$ olur.

$A \subset A^- = A^{-\circ} \subset U^-$ elde edilir ve $A \in Y.Ö.A(X)$ olur.

7.1. Lemma: [5] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her G açık kümesi ve her $A \subset X$ için

$A^- \cap G \subset (A \cap G)^-$ dir.

İspat: Her $x \in G \cap A^- \Rightarrow x \in G$ ve $x \in A^-$ dir. $x \in A^-$ ise her $T \in \tau$ için $x \in T \ni T \cap A \neq \emptyset$ dir. Her $T \in \tau, x \in T$ için $(T \cap G) \in \tau$ ve $x \in (T \cap G)$ olacağından $(T \cap G) \cap A \neq \emptyset$ olur. Buradan her $T \in \tau$ açık kümesi için $x \in T$ ve $T \cap (G \cap A) \neq \emptyset$ olacağından $x \in (A \cap G)^-$ olur.

7.2. Tanım: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. X deki her U yarı açık kümesi için $f(U)$ kümesi, Y de yarı açık ise f fonksiyonuna “ön yarı açık” fonksiyon denir.

7.2. Lemma: [19] Açık ve yarı sürekl bir fonksiyonun ön yarı açık olması gerekmez.

7.4. Örnek: $X=Y=\{a,b,c,d\}$ kümeleri ile X üzerindeki $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ topolojisini ve Y üzerindeki $\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ topolojisini alalım. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu birim fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu açık ve yarı süreklidir. Fakat ön yarı açık değildir. Gerçekten $A=\{a,c\}$ kümesi için $U=\{a\} \subset X$ açık kümesi vardır ve $U=\{a\} \subset A = \{a,c\} \subset U^- = \{a\}^- = \{a,c,d\}$ olur. Dolayısıyla A kümesi X de yarı açıktır. Fakat $f(A)=f(\{a,c\}) = \{a,c\}$ için $B \subset f(A) \subset B^-$ olacak şekilde bir $B \subset Y$ açık kümesi yoktur. Bu nedenle $f(A)$ kümesi Y de yarı açık değildir. Böylece f fonksiyonu ön yarı açık değildir.

7.3. Tanım: (X, τ) topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $\{x\}$ tek elemanlı küme, X de açık değilse X uzayına kendi içinde yoğun denir. [19], [21]

7.2. Teorem: [19] Eğer Y topolojik uzayı kendi içinde yoğun ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön yarı açık ve yarı süreklidir ise bu durumda f fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun zayıf sürekliliğini varsayalım. 2.3. Teorem[7] gereğince $(f^{-1}(V))^- \not\subset f^{-1}(V^-)$ olacak şekilde Y de açık bir V kümesi vardır. Bu nedenle $x \notin f^{-1}(V^-)$ olacak şekilde $x \in (f^{-1}(V))^-$ vardır. f fonksiyonu yarı sürekliliğinden $f^{-1}(V)$ kümesi de X de yarı açıktır. f fonksiyonu ön yarı açık olduğundan $H = f(f^{-1}(V) \cup \{x\})$ kümesi, Y de yarı açıktır. Diğer taraftan, $x \notin f^{-1}(V^-)$ olduğundan $f(x) \notin V^-$ olup $W \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $f(x)$ noktasının bir W açık komşuluğu vardır. Dolayısıyla $f(x) \in W \cap H \subset W \cap (V \cup \{f(x)\}) = \{f(x)\}$ elde edilir. Böylece $\{f(x)\} = W \cap H$ kümesi, Y de yarı açıktır. 6.7. Teorem [17] gereğince $\{f(x)\}$ kümesi Y de açıktır. Bu ise Y uzayının kendi içinde yoğun olması ile çelişir. O halde f fonksiyonu zayıf süreklidir.

7.4. Teorem: [19] Y topolojik uzayı regüler (düzenli) ve kendi içinde yoğun olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön yarı açık ve yarı süreklidir ise bu durumda f fonksiyonu süreklidir.

İspat: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön yarı açık, yarı süreklidir ve Y uzayı kendi içinde yoğun olsun. Bu durumda 7.3. Teorem [19] gereğince, f fonksiyonu zayıf süreklidir olur. f fonksiyonu zayıf süreklidir ve Y regüler uzay olduğundan 2.7. Teorem [12] gereğince f fonksiyonu süreklidir.

7.1 Sonuç: [19] Y metrik uzayı, kendi içinde yoğun olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ön yarı açık ve yarı süreklidir ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat: Her metrik uzay regüler olduğundan, bu sonuç 7.4. Teorem [19] un bir sonucudur.

KAYNAKLAR

- [1] Engelking , Ryszard , Outline Of General Topology .
- [2] W.A. Sutherland , Metrik Ve Topolojik Uzaylara Giriş.
- [3] Biswas , N. (1970) On Characterizations Of Semi Continuous Functions , Lincei-Rend. Sc. Fis. Mat. E. Nat. **217-220**.
- [4] Chew , J. Ve Tong J. C. (1991) Some Remarks On Weak Continuity . Amer. Math. Monthly, 98, No.10, 931-934
- [5] D.Andrijevic . Semi-Preopen Sets. **38** . (1986) , **24-32**
- [6] Dugundji , J. (1966) Topology , Allyn And Bacon, Inc. , Boston
- [7] Espelie, M. S. Ve Joseph, J. E. (1982) Remarks On Two Weak Forms Of Continuity , Canad. Math. Bull. **25** , **No.1** , **59-63**
- [8] Ali Bülbül , Genel Topoloji , Karadeniz Teknik Üniv. Fen-Edeb. Fakültesi (1994)
- [9] Tayfun Yegül , Zayıf Süreklilikler , Doktora Tezi , İstanbul Üniv. Fen Fakültesi .
- [10] Husam, T. (1996) Almost Continuous Mappings , Prace Mat. **10**, **1-7**
- [11] Kelley, J. L. (1955) General Topology , D. Van Nostrand Company, Inc. , Princeton , New Jersey.
- [12] Levine, N. (1961) A Decomposition Of Continuity İn Topological Spaces , Amer. Math. Monthly, **68**, **44-46**
- [13] Levine, N. (1963) Semi-Open Sets And Semi-Continuity İn Topological Spaces , Amer. Math Monthly . **70**, **36-41**.
- [14] Long, P. E. Ve Carnahan, D.A (1973) Comparing Almost Continuous Functions , Proc. Amer. Math Soc., **38**, **413-418**
- [15] Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. Ve El-Deeb , S.N. (1982) On Precontinuous And Weak Pre Continuous Mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt **53**,**47-53**
- [16] A.S. Mashhour, I. A. Hasanein and S.N. El-Deeb (Assiut) α -Continuous and α -Open Mappings **41** (**3-4**) (1983), 213-218.
- [17] Noiri, T. (1973) On Semi-Continuous Mappings , Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (**8**) **54**, **210-214**
- [18] Noiri, T. (1974) Noiri, T. (1974) On Weakly Continuous Mappings, Prox.Amer. Math. Soc. **46**, **120-124**

- [19] Noiri, T. (1981) Semi-Continuity And Weak-Continuity, Czechoslovak Math. J. **31(106)**, No.2 **314-321**.
- [20] Noiri, T. (1987) Properties Of Some Weak Forms Of Continuity, Int. J. Math. Math. Sci. **10**, No.1 **97-111**
- [21] Pitrowski , Z. (1979) On Semi Homeomorphisms , Boll Un. Mat. Ital. (5), **16**. No.3, **501-509**
- [22] Popa, V. (1987) Characterizations Of H-Almost Continuous Functions , Glasnik Mat. Vol. **22(42)** , **157-161**
- [23] Rose, D. A. (1984) Weak Continuity And Almost Continuity , Int. J. Math. Math. Sci. **7**,**311-318**
- [24] Rose, D.A. (1978) On Levine's Decompositions Of Continuity, Canad. Math. Bull. **21**, No.4 , **477-481**
- [25] Singal, M.K. Ve Singal, A.A (1968) Almost Continuous Mappings , Yokohama Math. J. **16**, **63-73**
- [26] Singal , M. K. Ve Arya, S. P. (1969) On Almost Regular Spaces , Glasnik Mat. Ser.III, **4 (24)**, **89-99**
- [27] Velicko , N.V. (1968) H-Closed Topological Spaces , Trans. Amer. Math. Soc.,**78,2**, **103-18**
- [28] Paul E.Long, General Topology
- [29] Hatır, E. (1993), Topolojik Grupların Genelleştirilmesi, Doktora Tezi, Selçuk Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

Figen DOĞDU, 6 Ağustos 1976 da İstanbul`da doğdu. Lise öğrenimini Avcılar 50.Yıl İnsa Lisesinde tamamladı.1996 yılında Trakya Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans yapmaya ve Mimarsinan Batıköy Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. Halen aynı lisede görev yapmaktadır.

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABUL VE ONAY BELGESİ

**SÜREKLİLİĞİN AYRIŞIMINI VEREN GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK
KÜME VE ZAYIF SÜREKLİLİK TİPLERİ**

141103020010241'in Figen DOĞDU isimli Lisansüstü tez çalışması, M.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25.09.2006 tarih ve ~~2006/12-25~~ sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Teorik Matematik Programında YÜKSEK LİSANS Tezi olarak Kabul edilmiştir.

Danışman : Prof.Dr. Semin AKDOĞAN

Üye : Doç. Dr. Baki BAYKARA

Üye : Doç. Dr. Ayşe KARA

Tezin Savunulduğu Tarih : 25.09.2006

ONAY

M.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ~~25.09.2006~~ tarih ve ~~2006/12-25~~ sayılı kararı ile ~~25.09.2006~~ tarihinde ~~FİGEN DOĞDU~~ nin ~~matematik~~ Anabilim Dalı ~~teorik matematik~~ Programında Y.Lisans (MSc.) / Doktora (Dr, PhD.) derecesi alması onanmıştır.



Marmara Üniversitesi
Prof. Dr. Adnan Aydın