

T.C.  
MARMARA ÜNİVERSİTESİ  
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ  
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI  
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI BİLİM DALI

97187

TRANSPORT PROBLEMİNİN TAŞIMALI  
EĞİTİME UYGULANMASI  
(Yüksek Lisans Tezi)

Alaattin Pasmaz

T 97187

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Ahmet Ş. Özdemir

İstanbul 2000

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	VI
I. BÖLÜM .....	1
GİRİŞ .....	1
II.BÖLÜM .....	5
TARANSPORT PROBLEMLERİNİN LİNEER PROGRAMLAMA YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ .....	5
II.1. PROBLEMİN TANITILMASI .....	5
II.2. TRANSPORT PROBLEMİNİN MATEMATİK MODELİ .....	5
II.3. A MATRİSİNİN ÖZELLİKLERİ .....	8
II.4. SİMPEKS METOT VE TRANSPORT PROBLEMLERİ .....	11
II.5. DAN ÇIKAN BASİTLEŞTİRMELER .....	15
II.6. TAMSAYI OLMA ÖZELLİĞİ .....	15
II.7. TRANSPORT PROBLEM TABLOSU .....	20
II.7.1. DİREKT YOL .....	21
II.7.2. DİREKT DAL .....	22
II.7.3. DİREKT ÇEVİRİM .....	23
II.8. TRANSPORT TABLOSUNDA TABAN .....	25
II.8.1. TEMEL DİREKT YOL .....	25
II.8.2. TEMEL DİREKT ÇEVİRİM .....	25
II.8.3. BAĞLI HÜCRELER CÜMLESİ .....	26
II.8.4. TEMEL HÜCRE .....	26
II.8.5. AĞAÇ .....	27
II.8.6. TEMEL AĞAÇ .....	27
II.9. ATLAMA TAŞI ALGORİTMASI .....	28
II.10. DEJENERASYON VE TRANSPORT TABLOSU .....	37
II.11. BAŞLANGIÇ TEMEL UYGUN ÇÖZÜMÜN BELİRLENMESİ .....	43

II.11.2. SATIR MİNİMUMU .....	46
II.11.3. MATRİS MİNİMUMU .....	47
II.11.4. VOGEL YÖNTEMİ .....	48
II.12. $z_j - c_j$ 'NİN HESAPLANMASI İÇİN BAŞKA BİR METOT .....	49
II.13. BİR TRANSPORT PROBLEMİNDE EŞİTSİZLİK KISITLARI .....	53
<b>III.BÖLÜM .....</b>	<b>57</b>
<b>GENELLEŞTİRİLMİŞ TRANSPORT PROBLEMLERİ .....</b>	<b>57</b>
III.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ TRANSPORT PROBLEMLERİNİN YAPISI .....	57
III.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ TRANSPORT PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ .....	59
<b>IV. BÖLÜM .....</b>	<b>61</b>
<b>TAŞIMALI İLKÖĞRETİM UYGULAMASI .....</b>	<b>61</b>
IV.1. TAŞIMALI İLKÖĞRETİM UYGULAMASI VE AMACI .....	61
IV.2. TRANSPORT PROBLEMİ UYGULAMASI .....	67
<b>V. BÖLÜM .....</b>	<b>80</b>
<b>SONUÇ .....</b>	<b>80</b>
<b>KAYNAKÇA .....</b>	<b>82</b>

## TABLULAR

<b>Tablo 1.</b> Yöneylem Araştırmasının Bazı Uygulamaları .....	3
<b>Tablo 2.</b> Transport Probleminin Genel Tablosu .....	20
<b>Tablo 3.</b> Transport Problem Tablosu Örneği .....	31
<b>Tablo 4.</b> Temel Uygun Çözüm Tablosu .....	34
<b>Tablo 5.</b> Transport Problem Çözüm Tablosu .....	35
<b>Tablo 6.</b> Transport Problem Çözüm Tablosu .....	36
<b>Tablo 7.</b> Transport Problem Çözüm Tablosu .....	36
<b>Tablo 8.</b> Kuzeybatı-Köşe Yöntemi Tablosu .....	38
<b>Tablo 9.</b> Kuzeybatı-Köşe Yöntemi Tablosu .....	38
<b>Tablo 10.</b> Transport Problem Çözüm Tablosu .....	40
<b>Tablo 11.</b> Transport Problem Çözüm Tablosu .....	43
<b>Tablo 12.</b> Sütun Minimumu Tablosu .....	46
<b>Tablo 13.</b> Satır Minimumu Tablosu .....	47
<b>Tablo 14.</b> Matris Minimumu Tablosu .....	48
<b>Tablo 15.</b> Vogel Yöntemi Tablosu.....	49
<b>Tablo 16.</b> Atlama Taşı Yöntemi Tablosu .....	52
<b>Tablo 17.</b> Genelleştirilmiş Transport Probleminin Çözümü .....	59
<b>Tablo 18.</b> 1999-2000 Öğretim Yılında Taşımalı İlköğretim Uygulaması Yapılan Okul ve Öğrenci Sayısı .....	62
<b>Tablo 19.</b> 1999-2000 Eğitim Öğretim Yılında İstanbul İli İlçelerinde İlköğretim Uygulaması Yapılan Okul ve Öğrenci Sayısı .....	65
<b>Tablo 20.</b> .....	69
<b>Tablo 21.</b> .....	69
<b>Tablo 22.</b> .....	70
<b>Tablo 23.</b> .....	71
<b>Tablo 24.</b> .....	72
<b>Tablo 25.</b> .....	73
<b>Tablo 26.</b> .....	74
<b>Tablo 27.</b> .....	75
<b>Tablo 28.</b> .....	76
<b>Tablo 29.</b> .....	77

## GRAFİKLER

<b>Grafik 1. Taşımali İlköğretim Uygulamasında Yıllara Göre Sayısal Veriler .....</b>	<b>66</b>
<b>Grafik 2. Taşımali İlköğretim Uygulamasında Ödenek Durumu .....</b>	<b>67</b>



## ŞEKİLLER

Şekil 1. Temel Vektörler .....	19
Şekil 2. Direkt Dal Örneği .....	22
Şekil 3. Direkt Dal Örneği .....	22
Şekil 4. Direkt Çevrim Örneği .....	23
Şekil 5. Yanlış Direkt Çevrim Örneği .....	23
Şekil 6. Yanlış Direkt Çevrim Örneği .....	24
Şekil 7. Temel Ağaç Örneği .....	27
Şekil 8. Temel Ağaç Örneği .....	27
Şekil 9. Temel Ağaç Örneği .....	28

## **ÖNSÖZ**

“Transport Probleminin Taşımali Eğitime Uygulanması” adlı yüksek lisans tez çalışmasında öncelikle Transport Problemlerinin bazı temel kavram ve özellikleri verilmiş ve bu problemin çözüm yöntemleri ile ilgili teori ve ispatlar gösterilmiştir. Tezin ilerleyen bölümlerinde ise Transport Probleminin ülkemizde halen uygulanmakta olan “Taşımali İlköğretim Projesi”ne uygulaması yapılmıştır.

Bu tez çalışmamda bana her konuda destek ve yardımcı olan danışmanım Ahmet Ş. Özdemir’e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**Alaattin Pasmaz**

## I. BÖLÜM

### GİRİŞ

Yöneylem Araştırması 1940 yılında II. Dünya Savaşında Alman hava hücumlarına daha etkili karşı koyabilmek için İngilizler tarafından geliştirilmiştir.

A.B.D. de İngiltere'nin II. Dünya Savaşında kullandığı yöntemlerden yararlanarak tüm askeri kuvvetlerinde yöneylem araştırma ekiplerini oluşturmuş ve problemlerini çözümlenmeye çalışmıştır

II. Dünya Savaşı'nda büyük askeri ve sivil hareket herşeyden daha çok bu faaliyetlerin sistematik planlamasını ve koordinasyonunu gerektiriyordu. Leontief'in temelde sektörlerarası ekonomik ilişkileri açıklayan fakat optimizasyon gibi bir amacı olmayan girdi-çıktı modelinin rehberliğinde doğrusal programlama konusu araştırılmaya başlandı. Söz konusu araştırmalar ilk defa A.B.D. Hava Kuvvetleri'nde yapılan planlama çalışmaları için yürütülmüş ise de 1947 yılına kadar programlama problemlerinin genel formülasyonunu yapmak mümkün olamamıştır. A.B.D. Hava Kuvvetleri'nin bir araştırma örgütü olan RAND Corporation'da Dantzig tarafından 1947 yılında Simpleks çözüm yöntemi geliştirilmiştir.

II. Dünya Savaşından sonra ordu için yöneylem araştırmalarında çalışan kişilerden çoğu, işletme problemlerine doğrudan doğruya uygulanabilen yeni teknikleri geliştirdiler. Örneğin Kantrovich 1940 yılında bağımsız olarak doğrusal programlama problemleri için genel çözümleri elde etmiştir.

Yöneylem Araştırması terimi farklı kişilere farklı şeyleri ifade eder. Bu nedenle Yöneylem Araştırması için bugüne kadar ortak bir tanımda karar kılınamamıştır.

Yaygın olan tanımlar şunlardır:[7]

- a) Yöneylem Araştırması, rakama dökülmüş sağduyudur.
- b) Yöneylem Araştırması, işletme için araştırmadır.
- c) Yöneylem Araştırması, yönetim bilimidir.
- d) Yöneylem Araştırması, bir karar analizidir.

- e) Yöneylem Araştırması, bir tasarım analizidir.
- f) Yöneylem Araştırması, eldeki olanaklardan en çok yararlanmayı sağlamak için bilimsel tekniklerin problemlere uygulanışıdır.
- g) Yöneylem Araştırması, problemlerin çözümüne kötü yanıt verme yerine daha az kötü veya daha iyi yanıt verme sanatıdır.
- h) İnsan, makine, para ve malzemelerden oluşan endüstriyel, ticari, resmi ve savunma sistemlerinin yönetiminde karşılaşılan problemlere modern bilimi kullanarak çözüm bulup sistemi bulunduğu konumdan daha iyi bir konuma getirmeyi amaçlayan bilim dalıdır.
- i) Yöneylem Araştırması, kıt kaynakların dağıtımını gerektiren koşullar altında, bir sistemin en iyi nasıl tasarlanması ve işletimini araştıran bilimsel yaklaşımdır.

Yöneylem Araştırmasının önemli bir dalı olan doğrusal programlama bu gün en çok kullanılan programlama modelidir.

Doğrusal programlama yöntemi ile çözülen problemlerde sıkça kullanılan kavramlardan biri de optimizasyon problemleridir. Optimizasyon problemleri, fonksiyonların çeşitli kısıtlar altında maksimum veya minimum değerler almasını inceler. Bir başka ifadeyle çeşitli kaynakların (işgücü, sermaye, hammadde, zaman, enerji) belirli bir veya birkaç ürünün elde edilmesi için optimal bir şekilde bir araya getirilmesine çalışmaktadır.

Yöneylem Araştırmasının savaş döneminde yarattığı olumlu etki, birçok işletmeleri onu karar problemlerinin çözümünde bir araç olarak kullanmaya itmiştir. Bilgisayarların yaygın bir kullanım alanına sahip olmasından sonra, endüstri kesimi de karar vermede yararlı bir araç olarak gördüğü doğrusal programlama konusuna ilgi duymaya başlamıştır. Doğrusal programlama birçok endüstrilerde geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Bu gün yöneylem araştırmasının girmediği alan yok gibidir. Bunların arasında, kimya, kömür, demir-çelik, taşıma ve haberleşme gibi endüstrileri sayabiliriz.

Birçok işletme ve hükümetler Yöneylem Araştırması modellerini kullanarak firmaları için büyük miktarlarda tasarruf sağlamışlardır.[7]

Yöneylem Araştırması ile ilgili yapılan birkaç araştırmanın sonuçları şu şekildedir:

**Tablo 1: Yöneylem Araştırmasının Bazı Uygulamaları**

Araştırmayı Yaptıran Şirket	Araştırma Yapılan Konu	Araş. Yılı	Elde edilen tasarruf (milyon dolar)
Citgo Petrol Şirketi	Rafineri işlemlerinin sunumu ve dağıtımını ile ürünlerin pazarlamasını optimum kılma	1987	70
Yellow Freight Sistem Şirketi	Ulusal yük taşıma ağının tasarımı ve yükleme yollarının optimali	1992	17,3
Amerikan Hava Yolları	Uçuşların koordinasyonu ve seyahat düzeni sisteminin tasarlanması	1992	500
Texaco	Kalite ve satış için optimal benzin karışımının elde edilmesi	1990	30
Weyer Hauser	Ağaç ürünlerini maksimum kullanabilmek için ağaçların kesiminin planlanması	1986	15
IBM	Servis desteğini geliştirmek için yedek kısımların ulusal envanterlerin entegrasyonu	1990	20

Transport Problemleri belirli sayıda kaynaktan belirli sayıda hedef için bir ürünün en düşük maliyetle ulaştırılmasını araştırır.[3]

Bu tez çalışmasında doğrusal programlamanın özel bir şekli olan Transport Problemlerinden ve ülkemizde halen uygulanmakta olan Taşımali İlköğretim Projesinden bahsedilmektedir.

Bu tezeğ Transport Problemininx Taşımalı İlköğretim Projesi ile ilişkisi kurulmakta ve öğrencilerin merkez okullara taşınmasının Transport Problemi yardımıyla yapılmasına çalışılmaktadır. Bir başka ifadeyle her yıl binlerce öğrencinin kasabalarından merkez okullara taşınması sırasında yapılan harcamaların minimuma indirilmesini sağlamak amacıyla matematiksel bir model oluşturmaktır. Böylece her yıl büyük miktarda harcamalar yapılan bu projeden tasarruf edilmesi mümkün olacaktır.

## II. BÖLÜM

### TRANSPORT PROBLEMLERİNİN LINEER PROGRAMLAMA YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

#### II.1. PROBLEMİN TANITILMASI

Transport problemleri, lineer programlama problemleri olarak pratik uygulamada sıkça karşılaşılan bir problem çeşididir. Ulaştırma probleminde amaç kaynaklardan hedeflere yani üretim merkezlerinden dağıtım merkezlerine mallar dağıtılırken bu dağıtım işlemini minimum maliyette gerçekleştirmektir.

Ulaştırma modeli şeklinde kurulan bir problem simpleks yöntem ile çözülebilir. Fakat ulaştırma problemlerini kendine özgü teknikleri ile, yani ulaştırma algoritması, atama ve aktarma modelleri gibi tekniklerle daha az zaman ve daha az hesaplamayla çözüme olanağı vardır.

#### II.2. TRANSPORT PROBLEMİNİN MATEMATİK MODELİ

Üretim merkezi  $m$  ve tüketim merkezi  $n$  olan bir ulaştırma probleminde tüketim merkezi ( $j$ ) ancak  $b_j$  miktarında mal isterken üretim merkezi ( $i$ ) de ancak  $a_i$  miktarında malı sunabilir.  $i$  üretim merkezinden  $j$  tüketim merkezine bir birim malın gönderilmesi maliyeti de belirlidir.

$a_i$ ;  $i$ . kaynaktan elde edilen ürün miktarı ( $i=1, 2, 3, \dots, m$ )

$b_j$ ;  $j$ . hedefte istenilen ürün miktarı ( $j=1, 2, 3, \dots, n$ )

$c_{ij}$ ; birim ürünün  $i$ . kaynaktan  $j$ . hedefe götürülmesinin masrafı.

Ayrıca ulaştırma modeli şu varsayımları ve gerekleri de içerir.

1. Modelde kullanılan tüm bilgiler ve probleme konu olan mal ve hizmetler, bütün üretim ve tüketim merkezleri için aynı birim ve homojenlikte olmalıdır.
2. Herbir üretim (sunum) merkezi ile herbir tüketim (istem) merkezi arasında bir birim malın kaçta taşınacağı bilinmelidir.

3. Herbir sunum ve tüketim merkezindeki toplam miktar tam olarak bilinmelidir.

4. Sunum merkezlerinden dağıtılacak toplam miktar, tüketim merkezlerince istenen toplam miktara eşit olmalıdır. Eğer böyle bir eşitlik yoksa problem dengelenmemiş olmaktadır.

Hedeflerde istenilen ürün miktarlarının toplamının kaynaklardan elde edilecek ürün miktarlarının toplamına eşit olduğunu kabul ediyoruz.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1)$$

Buna göre;

$x_{ij}$  = i. kaynaktan j. hedefe götürülen ürün miktarı olmak üzere  $x_{ij} \geq 0$  olmalıdır.

Aşağıdaki (m+n) kısıtı gerçekleyecek

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad a_i > 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad b_j > 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

ve amaç fonksiyonu,

$$z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \quad (4)$$

olan fonksiyonu minimize edecek bir çözüm bulunması isteniyor.

Daha önce de belirttiğimiz gibi bu transport problem bir lineer programlama problemine dönüştürülebilir.

$$\vec{x} = [x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{mn}] \quad (5)$$

$$\vec{b} = [a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n]$$

olarak alırsak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & = a_1 \\
 & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & = a_2 \\
 & \dots & \cdot \\
 & \dots & \cdot \\
 & & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \quad (6) \\
 x_{11} & + x_{21} + \dots & + x_{m1} = b_1 \\
 \dots & & \cdot \\
 \dots & & \cdot \\
 & x_{1n} + & + x_{2n} + \dots & + x_{mn} = b_m
 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1_n \\ I_n & I_n & I_n & \dots & I_n \end{bmatrix}$$

Bu A matrisinde kullanılan

$$1_n = [1, 1, 1, \dots, 1]$$

$$I_n = \text{Birim matris} \quad (7)$$

$$0 = [0, 0, 0, \dots, 0] \text{ dir.}$$

A matrisi (m+n)x(m.n) lik bir matris olmak üzere (6) denklem sistemini kısaca

$$A\bar{x} = b$$

şeklinde ifade edebiliriz. Her bir değişken bu kısıtların yalnız ve yalnız iki tanesinde yer almaktadır. Bu şekilde tanımlanan bir A matrisi ile

$$A\bar{x} = b, \quad \bar{x} \geq 0,$$

maksimum veya minimum  $z = c\bar{x}$  şeklindeki bir lineer programlama problemine genel olarak taransport problemi adı verilir.

**Örnek 1.** İki kaynak ve üç hedefi olan bir transport probleminin matris denklemini şu şekilde oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Bu durumda transport problemin çözümünde doğrudan simpleks metot uygulanabilir. Bunun yanında A matrisinin basit ve özel yapıda olması nedeniyle bu problemi çözmek için daha etkili başka metotlar üretilebilir.

### II.3. A MATRİSİNİN ÖZELLİKLERİ

A matrisinin  $(m+n)$  satır ve  $(m.n)$  sütunu vardır. A matrisinin  $[(i-1)n+j]$ . sütununu  $P_{ij}$  ile gösterilirse her bir  $P_{ij}$  vektörü  $(m+n)$  bileşenli olup  $P_{ij}$  nin yalnız iki bileşeni sıfırdan farklıdır. Bu durumda  $P_{ij}$  yi

$$\vec{P}_{ij} = \vec{e}_i + \vec{e}_{m+j} \quad (8)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikteki  $\vec{e}_j$  ve  $\vec{e}_{m+j}$  vektörleri  $E^{m+n}$  nin birim vektörleridir.

A matrisinin satırları doğal olarak iki kısma ayrılır. İlk m tane satır, m tane kaynak kısıtlarından oluşan satırla, son n tane satır ise hedef kısıtlarından gelendir. Bu iki küme kaynak satırları ve hedef satırları olarak adlandırılır. (7) eşitliğinde de görüleceği gibi A matrisinin kaynak satırları toplandığında  $I_m$  vektörü, hedef satırları toplandığında da  $I_n$  vektörü elde edilir. Dolayısıyla A matrisinin ilk m satırının toplamından son n satırının toplamı çıkarılırsa sıfır vektörü elde edilir. Buradan da A matrisinin rankının (m+n) den daha küçük olduğu görülür. A matrisinden oluşturulacak herhangi bir (m+n-1). mertebeden kare matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması sonucunda A matrisinin rankının (m+n-1) olduğu kolayca bulunabilir.

Şimdi de şu matrisleri gözönüne alalım.

$$|D| = \begin{vmatrix} I_m & F \\ 0 & I_{n-1} \end{vmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu eşitlikte D oluşturulurken A matrisinin n, 2n, 3n, . . . . mn, 1, 2, 3, . . . . (n-1). sütunlarını ve 1, 2, 3, . . . . (m+n-1) inci satırlarını kullanıldı.

$$|D| = \begin{vmatrix} I_m & F \\ 0 & I_{n-1} \end{vmatrix} = |I_m| |I_{n-1}| = 1 \quad (9)$$

D matrisi (m+n-1). mertebeden kare matris olduğundan rank(A)= m+n-1 dir.

A matrisinin kaynak satırlarını  $s^i$  (i=1, 2, 3, . . . . m) ile, hedef satırlarını  $d^j$  (j=1, 2, 3, . . . . n) ile gösterilsin. A matrisinin satırları arasındaki lineer bağımlılık şöyle yazılabilir.

$$\sum_{i=1}^m s^i - \sum_{j=1}^n d^j = 0 \quad (10)$$

Bu eşitlikte her bir satır vektörünün katsayısı +1 veya -1 dir. Buradan her bir satır vektörünün diğer kalan  $(m+n-1)$  satır vektörünün lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini çıkarabiliriz. Bir başka ifadeyle A matrisinden herhangi bir satır çıkardığımızda geriye kalan  $(m+n-1) \times (mn)$  lik matrisin rankı  $(m+n-1)$  dir. Bu A matrisinin en az  $(m+n-1)$  satırının lineer bağımsız oluşundan çıkarılabilir. Yukarıda yazdığımız eşitlikten dolayı geriye kalan satır bir lineer bağımsız satır takımının herhangi bir satırı ile yer değişebilir.

Bu anlatılanlar şu ifadeye denktir:

(2) ve (3) eşitliklerinin yalnız  $(m+n-1)$  tanesi bağımsızdır. Dolayısıyla bir kısıtı kaldırırsak geriye kalan  $(m+n-1)$  kısıt bağımsızdır.

Benzer sonuçlar  $(m+n) \times k$  mertebeli R matrisleri için de geçerlidir. Burada R matrisi A'nın herhangi  $k \leq mn$  sütun seçilerek elde edilmektedir. R'nin kaynak vektörleri  $s^i$  ve hedef satırları  $d^j$  olsun. Bu takdirde (10) eşitliği doğrudur. Aslında (10) eşitliği tek bir  $P_{ij}$  için de geçerlidir. A matrisinin herhangi  $(m+n-1)$  tane lineer bağımsız sütunundan R elde edilir. O zaman  $\text{rank}(R) = m+n-1$  olur. Diğer taraftan R'nin herhangi satırı diğer  $(m+n-1)$  satırın lineer kombinasyonu olduğundan, R'nin her  $(m+n-1)$  satırı lineer bağımsızdır. Buna göre R matrisinin hangi satırı çıkarılırsa çıkarılsın geriye kalan  $(m+n-1)$  mertebeli matris non-singülerdir. Benzer şekilde A matrisinin herhangi  $(m+n) \times (m+n-1)$  alt matrisi R'nin  $(m+n-1)$  mertebeden bir minörü sıfırdan farklıysa R'nin bütün  $(m+n)$  tane  $(m+n-1)$  mertebeli minörleri sıfırdan farklıdır.

A matrisinin ilginç ve önemli bir özelliği A'nın her minörünün değerinin  $\pm 1$  veya 0 olmasıdır. (A matrisinin unimoduler özelliği) Bunun ispatı da şu şekildedir.

**Teorem 1:** A matrisinin her minörünün değeri  $\pm 1$  veya 0 dır.[4] (11)

**İspat:**  $|A_k| = \pm 1$  veya 0 olduğunu göstermek istiyoruz.  $A_k$  nın her sütunu ya iki tane 1, ya bir tane 1 veya sıfır tane 1'e sahiptir. Eğer  $A_k$  da en az bir sütun sıfırdan oluşursa bu durumda  $|A_k| = 0$  olduğu kolayca bulunabilir.

Eğer  $A_k$  matrisinin her sütunu iki tane 1'e sahipse, bu 1'lerden biri kaynak satırlarından, diğeri hedef satırlarından gelmektedir. Kaynak satırların toplamının hedef

satırların toplamından farkı sıfır vektörüdür. Bu durumda da  $A_k$  matrisinin satırları lineer bağımlıdır ki o zaman  $|A_k| = 0$  olduğu aşıkardır.

Son olarak  $A_k$  matrisinin sütunları bir tane veya iki tane 1'i içeriyorlarsa, en az bir tane sütun yalnız bir tane 1 içeriyordur. Bu takdirde  $|A_k|$  yı tek bir 1 içeren sütuna göre açabiliriz. Buradan da,

$$|A_k| = \pm |A_{k-1}|$$

eşitliğine ulaşırız. Bu eşitlikte  $|A_{k-1}|$ , A matrisinin (k-1) mertebeli bir minörüdür. Şimdi aynı argümanları  $A_{k-1}$ 'e uygulayabiliriz. Ya  $|A_{k-1}| = 0$  veya  $|A_{k-1}| = \pm |A_{k-2}|$  vs. olur. Ayrıca daima olduğunu biliyoruz, çünkü A'nın elemanları yalnız 0 ve 1 dir. Dolayısıyla A'nın her minörünün değerinin  $\pm 1$  veya 0 olduğu elde edilir.

Ulaşılan bu sonuç çok önemlidir. Bu sonuç yardımıyla transport problemlerinin çözümünde simpleks metottan daha hızlı sonuca ulaştıran doğrudan metotlar üretmek mümkün olacaktır.

Örnek 1 de verilen A matrisinin her minörünün  $\pm 1$  ve 0 değeri aldığı kolaylıkla kanıtlanabilir.

#### II.4. SİMPLEKS METOT VE TRANSPORT PROBLEMLERİ

Simpleks metotun bir transport problemine doğrudan uygulanması şu şekildedir. Kısıtları  $Ax=b$  şeklinde yazarsak A matrisi bir birim matris içermez. Gerçekte A da birim vektör yoktur. O halde birim matris olan bir temel matrisle işe başlamak için suni değişkenler eklemek gereklidir. Başlangıç temel matrisi sadece suni vektör içerir. Yukarıda (2) ve (3) eşitliklerinde bir fazlalık vardır. Ayrıca herhangi bir kısıt kaldırılabilir ve kalan kısıtlar lineer bağımsız olurlar. Simpleks metota başlamadan önce bir kısıtı ekleyebilmemize rağmen bir (m+n) kısıtı bir arada tutmak daha uygundur. (m+n) tane suni vektör ekleyelim. Problemin bir optimal çözümünde muhakkak temel bir suni vektörün 0 seviyesinde olması gerektiğini çıkarabiliriz. Yani

$$(A, I) \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = b \quad (12)$$

kısıtlarına ait her temel uygun çözümde en az bir suni vektör olmalıdır. Aşağıdaki önemli sonuç  $\text{rank}(A)=m+n-1$  olduğundan kolayca bulunabilir.  $m$  kaynaklı ve  $n$  hedefli bir transport problemin bir optimal çözümünde  $(m+n-1)$  den daha fazla  $x_{ij}$  'nin sıfırdan farklı olması gerekmez.

Eğer (1) eşitliği sağlanırsa, transport problemin daima uygun bir çözümü olacağı ve dolayısıyla optimal uygun bir çözümü olabileceğini görebiliriz. Uygun çözüm bulmanın birçok yolları vardır. Örneğin,

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\alpha} \quad (13)$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

çözümü de uygun bir çözümdür. Çünkü;

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n a_i b_j = \frac{1}{\alpha} a_i \sum_{j=1}^n b_j = a_i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m a_i b_j = \frac{1}{\alpha} b_j \sum_{i=1}^m a_i = b_j$$

Diğer bir yol için 1. kaynaktan başlayalım;  $\min(b_1, a_1)$ : 1. hedefe götürelim.

Eğer  $b_1 < a_1$  ise  $\min(b_1, a_1 - b_1)$  i 2. hedefe götürelim.

Tersi durumda yani  $b_1 > a_1$  ise 2. kaynağa geçelim ve  $\min(b_1 - a_1, a_2)$  yi 1. hedefe götürelim. Bu şekilde işleme devam edersek bütün kaynaklar ve hedeflerin isteklerini yerine getirmiş oluruz. Bu yöntemle her adımda ya bir kaynak ya da bir hedefin isteği

sağlanmış olur. Böylece  $x_{ij}$  değerlerinden  $(m+n-1)$  tanesinden daha fazlası için sıfırdan farklı olmayan bir uygun çözüm bulmuş oluruz.

Ayrıca şunu biliyoruz ki, (1) olmadan (2) ve (3) ün uygun çözümü yoktur. Bunu görmek için (2)'yi  $i$  üzerinden  $j$  üzerinden toplamak yeterlidir.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \quad (15)$$

(14) ve (15) eşitliklerinde sol taraflar aynıdır. Dolayısıyla buradan (1) eşitliği elde edilir. Böylece şu sonucu ifade edebiliriz.

**Sonuç:** (2) ve (3) ün uygun çözümleri olması için gerek ve yeter koşul (1)'in olmasıdır.

Yukarıdaki sonuçtan dolayı suni değişkenler birinci adımda sıfır yapılabilirler. (12)'nin bir temel uygun çözümü  $Ax=b$  eşitliğinin de bir uygun çözümüdür.  $B$  ile  $(m+n)$  mertebeli temel matrisi gösterelim. Genel olarak  $B$  matrisinde  $(m+n-1)$  tane  $P_{ij}$  ve bir tane de  $q$  suni vektörü vardır ki  $q$  temel uygun çözümde sıfır olacaktır. Bundan başka  $A$  matrisindeki herhangi bir  $P_{ij}$  vektörü  $B$ 'nin  $A$  ya ait olan  $(m+n-1)$  tane vektörünün lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.  $A$ 'nın lineer bağımsız olan  $(m+n-1)$  tane vektörünü transport problemin temel vektör takımı olarak adlandırabiliriz. Bu vektör takımının özel bir vektörünü  $P_{\alpha\beta}^B$  ve buna ait temel değişkeni de  $X_{\alpha\beta}^B$  ile gösterelim.

$A$  matrisinin herhangi bir  $P_{ij}$  vektörünü temel vektörlerin lineer kombinasyonu olarak şu şekilde gösterebiliriz.

$$p_{ij} = \sum_{\alpha\beta} y_{ij}^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}^B \quad (16)$$

Bu eşitlikte  $\sum_{\alpha\beta}$  ile temel vektörler üzerinden bir toplama ifade edilmektedir. Suni vektör  $q$  nun (16) eşitliğinde olmasının gerekmediğini bildiğimizden  $y_{ij}^q=0$  ( $\forall i, j$  için) yazabiliriz. Yani simpleks tablodaki bütün sıfırlardan oluşan satırın suni vektöre ait olduğunu söyleyebiliriz.

**Teorem 2:**  $\forall i, j$  ve  $\alpha, \beta$  için  $y_{ij}^{\alpha\beta}=0$  veya  $\pm 1$  dir. [4]

**İspat:** (16) ifadesi  $(m+n-1)$  tane bilinmeyen ve  $m+n$  tane denklemden oluşmaktadır. Çünkü  $(y_{ij}^q=0)$  matris formu olarak

$$Ry_{ij} = P_{ij}$$

olarak yazabiliriz.  $R$  matrisi  $A$ 'nın lineer bağımsız  $(m+n-1)$  sütunundan oluşmaktadır ve  $R$ 'nin bir satırı silindiğinde geri kalan matris de non-singülerdir. (16) eşitliğinden  $i$ . eşitlik silinirse  $P_{ij}$ 'nin  $i$ . bileşeni 1 olur.  $i$ . denklemin silinmesinden sonra geriye kalan yeni denklem takımı

$$Ty_{ij} = \vec{e}_{j, m-1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\vec{e}_{j, m-1}$   $(m+n-1)$  bileşenli bir birim vektördür.  $T$  ise  $R$  den bir birim vektör olan  $i$ . satırın silinmesiyle elde edilir. Fakat  $T$  non-singüler olduğundan

$$y_{ij} = T^{-1}e_{j, m-1} = \tau_{j, m-1} \quad (17) \text{ dir.}$$

Bu eşitlikte  $\tau_{j, m-1}$ ,  $T^{-1}$  in  $(j+m-1)$ . sütunudur. Ayrıca  $\tau_{j, m-1}$  in her bileşeni  $T$ 'nin  $(m+n-2)$  mertebeden bir minörünün  $|T|$  ile bölümüne eşittir. Bundan başka  $|T|$  ve  $T$ 'nin diğer minörleri  $\pm 1, 0$  olduğundan  $\tau_{j, m-1}$  in bütün bileşenleri  $\pm 1, 0$  dır. Dolayısıyla her bir  $y_{ij}^{\alpha\beta} \pm 1, 0$  dir.

## II.5. $y_{ij}^{\alpha\beta} \neq \pm 1, 0$ 'DAN ÇIKAN BASİTLEŞTİRMELER

Bir simpleks tablodan diğerine geçerken temel değişkenler için transformasyon formüllerini gözönüne alalım. Bunun için çift indeks gösterişi kullanılırsa şu eşitlikler yazılabilir.

$$\hat{x}_{\alpha\beta}^B = x_{\alpha\beta}^B - \frac{y_{st}^{\alpha\beta}}{y_{st}^{uv}} x_{uv}^B \quad \alpha\beta \neq uv$$

$$\hat{x}_{st} = \frac{x_{uv}^B}{y_{st}^{uv}} \quad \text{dir.}$$

Bu eşitliklerde  $P_{st}$  tabana giren vektör ve  $P_{uv}^B$  ise çıkarılan vektördür. Fakat daha önce de belirttiğimiz gibi  $y_{st}^{uv} = 1$ ,  $y_{st}^{\alpha\beta} = \pm 1, 0$  olmalıdır, dolayısıyla  $\hat{x}_{\alpha\beta}^B = x_{\alpha\beta}^B$  veya  $x_{\alpha\beta}^B = \pm x_{uv}^B$  dir. Burada artık bölmeye gerek yoktur. Değişkenin yeni değeri eskisinden basit toplama ve çıkarma ile elde edilmektedir.  $a_i, b_j$ 'lerin tamsayı olduğunu kabul edersek (12) eşitliğinin ilk temel uygun çözümü olan  $x_a = \bar{b}$  ündeki temel değişkenler de tamsayı olur. Temel değişkenler için transformasyon formülleri yalnız toplama ve çıkarma gerektirdiğinden her temel uygun çözümdeki temel değişkenler de tamsayı olmak zorundadır.

## II.6. TAMSAYI OLMA ÖZELLİĞİ

Eğer (2) ve (3) eşitliklerinde,  $a_i, b_j$ 'ler tamsayı ise, problemin herhangi bir optimal temel çözümündeki bütün pozitif  $x_j$ 'ler de tamsayıdır.

Bu tamsayı olma özelliği transport problemlerine ait bir özelliktir. Lineer programlama problemlerindeki optimal çözümün tamsayı olması pek mümkün değildir.

Eğer değişkenlerin tamsayı olmasını istersek lineer programlama problemi ekseri bir non-singüler programlama problemine dönüşmüş olur.

Simpleks metotla nümerik hesaplamalar yapıldığında işin çoğu her adımda,  $y_{ij}$  den  $y_{ij}$ 'lerin belirlenmesidir. Transport probleminde ise daima  $y_{ij}^{a\beta}$ 'lar  $\pm 1, 0$  olduğundan bazı adımları kolaylıkla geçilebilir. Bunu görmek için  $P_{ij}$ 'nin  $P_{a\beta}^B$  temel vektörleri cinsinden ifade edilmeleri problemini daha yakından ele almalıyız. (16) eşitliğinde  $y_{ij}^{a\beta}$  olan  $P_{a\beta}^B$  leri çıkarırsak şu eşitliği yazmamız mümkün olur.

$$\vec{P}_{ij} = \sum \pm P_{a\beta}^B \quad (18)$$

$P_{ij}$  ve  $P_{a\beta}^B$  vektörleri (8) tarzındadır.  $P_{a\beta}^B$ 'nin katsayıları  $\pm 1$  olduğuna göre öyle bir  $P_{a\beta}^B$  olmalıdır ki  $P_{iu}^B = e_i + e_{m+u}$  ve (18) eşitliğindeki katsayı  $+1$  dir ve  $P_{ij}$  vektörünün  $i$ . bileşeninde bir tane 1 sayısı vardır. Eğer  $u \neq j$  ise  $P_{vu}^B = e_v + e_{m+u}$ ,  $v \leq m$  olacak şekilde bir  $P_{a\beta}^B$  vardır ki bunun (18) deki katsayısı  $-1$  dir ve  $P_{iu}^B$ 'nin  $(m+u)$  bileşenindeki 1 kısaltılmış olur. Bu şekilde devam edersek sonlu adım ( $\leq m+n-1$ ) sonra

$$P_{wj}^B = e_w + e_{m+j}$$

şeklinde bir  $P_{a\beta}^B$  vektörüne ulaşılır ve (18) denkleminde  $P_{a\beta}^B$ 'nin katsayısı pozitiftir.  $w$ . bileşenindeki 1, daha önce geçen (katsayısı  $-1$  olan) vektörün  $w$ . bileşenini kısaltır ve  $P_{wj}^B$ 'nin  $(m+j)$  bileşeni  $P_{ij}$ 'nin  $(m+j)$  bileşenini verir. Bu durumda da herhangi bir  $P_{ij}$ 'nin temel vektörler cinsinden ifadesi basit bir hal alır. Herhangi bir vektörün temel vektörler cinsinden gösterilişi tek türdür. Buradan da yukarıda sözü edilen gösteriliş tek türlü belirlidir diyebiliriz.

O halde  $P_{ij}$  için,

$$P_{ij} = P_{iu}^B - P_{vu}^B + P_{vi}^B - \dots - P_{ws}^B + P_{wj}^B \quad (19)$$

eşitliğini yazabiliriz. (19) eşitliğinde birinci ve sonuncu terimlerin işaretleri pozitif olduğundan eşitlikteki temel vektörlerin sayısı tektir.

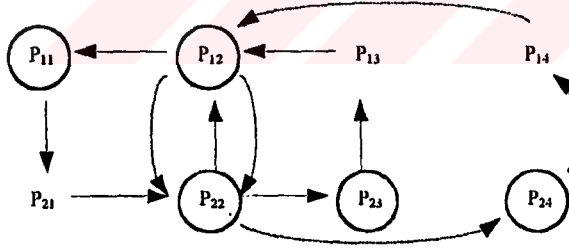
**Örnek 2.** Örnek 1'de verilen A matrisi için  $P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{23}, P_{24}$  vektörlerinin lineer bağımsız oldukları kolayca görülebilir. O halde A matrisinin herhangi bir vektörü bu vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$P_{21} = P_{22} - P_{12} + P_{11}$$

$$P_{13} = P_{12} - P_{22} + P_{23}$$

$$P_{14} = P_{12} - P_{22} + P_{24}$$

Bu vektörler (19) formundadır. Bundan başka tek sayıda temel vektörün ifadelerde bulunduğunu ve bunların katsayılarının sıfır olmadığını görüyoruz. Ayrıca her temel vektörün en az birinde ortaya çıktığını görmekteyiz.  $P_{\alpha\beta}^B$ 'lerin aşağıdaki matrisini gözönüne alalım. Daire içerisine alınmış olan vektörler temel vektörlerdir. Bu matristen şu sonucu çıkartabiliriz. Temel vektörler arasında olmayan bir vektör ve onu (19) eşitliğine göre ifade eden temel vektörler bir çevrim oluştururlar.



Elde edilen bu sonuç çok önemlidir.  $\|P_{ij}\|$  matrisinde  $(m+n-1)$  tane lineer bağımsız vektörün dışındaki vektörlerin bu  $(m+n-1)$  vektör cinsinden nasıl ifade edilebileceğini kolayca bulabiliriz. Herhangi bir  $P_{ij}$  vektöründen harekete başlayalım. Önce i. satır boyunca hareket edelim ve öyle bir ilk temel vektör  $P_{iu}^B$ 'ye varalım ki matrisin u. sütununda başka bir temel vektör bulunsun.  $P_{iu}^B$ 'nin katsayısına (+1) diyelim. Şimdi u. sütunda  $P_{iu}^B$ 'den öyle bir ilk temel vektör  $P_{vu}^B$ 'ye varalım ki v. satırda

başka bir temel vektör olsun.  $P_v^B$  ye (-1) katsayısını verelim. Bu şekilde  $P_v^B$  ye vs. gelelim. En sonunda çevrimi bir temel vektör  $P_{ij}^B$  ile kapamak zorunda kalırız. Bu şekilde (19) u  $y_{ij}^{aB}$  değerlerini ekspilisit olarak hesaplamaya gerek kalmadan hesap ederiz.

Bu şekilde çevrimi kapatarak hemen bir yol elde edildiğini ifade etmek doğru olmaz. "Kör kuyular" olabilir. Bunun yanında bir yolun çevrimi kapatacağından ve ayrıca böyle yalnız bir tane yol olduğunu, yani çevrimin tek türlü olduğunu biliyoruz. Eğer  $P_{ij}$  bulunduğu satırdan değil de onun bulunduğu sütundan uygun bir  $P_{ij}^B$  temel vektörünü bularak harekete başlarsak yine aynı çevrimi elde ederiz.

**Örnek 3.** Dört kaynağı ve altı hedefi olan bir transport problemini gözönüne alalım.

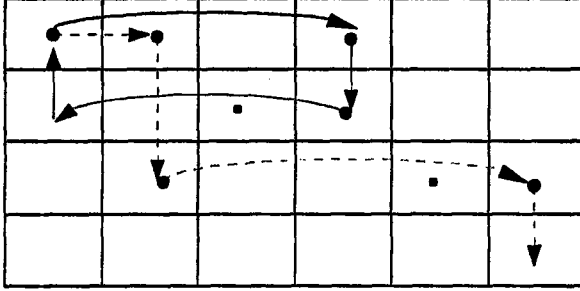
$P_{11}, P_{12}, P_{32}, P_{23}, P_{14}, P_{24}, P_{35}, P_{36}, P_{46}$  nin lineer bağımsız oldukları kolaylıkla gösterilebilir. Bunun için A matrisinde 9. mertebeden minörlerin hesaplanması gereklidir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

böylece bu problem için A matrisinin herhangi bir vektörü bu temel vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Bu problemin  $\|P_{ij}\|$  matrisini şu şekilde ifade edelim.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{16} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{26} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{36} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & \dots & P_{46} \end{bmatrix}$$

Temel vektörleri yani  $P_{11}, P_{12}, P_{32}, P_{23}, P_{14}, P_{24}, P_{35}, P_{36}, P_{46}$  vektörlerini koyu noktalarla göstererek şu tabloyu kullanalım.



Şekil 1. Temel Vektörler

Örnek olarak  $P_{21}$  vektörünü vektörler cinsinden ifade edelim. Önce  $P_{21}$  'den  $P_{11}$  'e geçelim.  $P_{11}$  'den hem  $P_{12}$  'ye hem de  $P_{14}$  'e geçebiliriz. Eğer  $P_{12}$  'ye geçerse bir çevrim elde edemeyiz. Çünkü bu bir kör kuyudur. Çevrim elde etmek için  $P_{14}$  'ü seçmeliyiz.  $P_{14}$  'ten ise  $P_{24}$  'e ve  $P_{24}$  'ten de başlangıç noktası olan  $P_{12}$  'ye döneriz. Elde edilen çevrim Şekil 1 'de gösterilmektedir. Bu çevrimden

$$P_{21} = P_{11} - P_{14} + P_{24}$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi de  $z_j - c_j$  'lerin hesaplanmasına geçelim. Transport problemleri için burada çift indis kullanılması uygun olduğundan  $z_{ij} - c_{ij}$  yazılacaktır.

$P_{\alpha\beta}^B$  vektörüne ait fiyat  $c_{\alpha\beta}^B$  olmak üzere,

$$z_{ij} - c_{ij} = \sum_{\alpha\beta} y_{ij}^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^B - c_{ij} \quad (20) \text{ veya}$$

$$z_{ij} - c_{ij} = \sum_{\alpha\beta} \pm c_{\alpha\beta}^B - c_{ij} \quad (21) \text{ şeklindedir.}$$

(19)'un  $P_{ij}$  vektörleri için

$$z_{ij} - c_{ij} = c_{in}^B - c_{vn}^B + c_{vj}^B - \dots - c_{ws}^B + c_{wj}^B - c_{ij} \quad (22)$$

yazabiliriz.  $c_{ij}$  leri bir  $\|c_{ij}\|$  matrisi şeklinde ifade edersek bütün  $z_{ij} - c_{ij}$  leri  $P_{ij}$  lerin hesabı için kullanılan yonteme benzer şekilde bu matristen hesaplayabiliriz. Biraz önceki örnek için

$$z_{21} - c_{21} = c_{11} - c_{14} + c_{34} - c_{21} \quad \text{dir.}$$

İfade ettiğimiz bu yöntem ile transport problemlerinin çözümü için etkili bir algoritma oluşturulmuş olur.

## II.7. TRANSPORT PROBLEM TABLOSU

Daha önce elde ettiğimiz sonuçlardan  $(m+n+1) \times (mn+m+n+1)$  mertebeli simpleks tablo yerine  $(m \times n)$  mertebeli matris tablosunun kullanılmasının daha uygun olduğu görülmüştür. Aşağıdaki tabloyu gözönüne alalım.[11]

Tablo 2. Transport Probleminin Genel Tablosu

	$D_1$	$D_2$	$D_j$	$D_n$	$a_i$
$O_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	..... $c_{1j}$ $x_{1j}$	..... $c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
$O_2$	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	..... $c_{2j}$ $x_{2j}$	..... $c_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$O_i$	$c_{i1}$ $x_{i1}$	$c_{i2}$ $x_{i2}$	..... $c_{ij}$ $x_{ij}$	..... $c_{in}$ $x_{in}$	$a_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$O_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	..... $c_{mj}$ $x_{mj}$	..... $c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
$b_j$	$b_1$	$b_2$	$b_j$	$b_n$	$\sum a_i = \sum b_j$

(i,j) inci hücreye  $c_{ij}$  ve  $x_{ij}$  yazalım. Tabloya yazılan  $x_{ij}$  'ler eğer bir uygun çözüm ise i. satırdaki  $x_{ij}$  'lerin toplamının  $a_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, m$ ) 'leri vermesi gerekir. Aynı durum j. sütundaki  $x_{ij}$  'lerin toplamının  $b_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots, n$ ) 'leri vermesi anlamına gelir. Bu tablo sayesinde bütün kısıtları uygun bir şekilde göstererek herhangi bir  $x_{ij}$  takımının uygun çözüm olup olmadığı kolaylıkla kontrol edilmiş olunur. Tabloda son sütuna kaynak değerleri, son satıra ise hedef değerleri yazılıp ayrıca j. sütuna  $D_j$  başlığı yazılarak bu sütunun j. hedefe ait olduğu belirtilir. Benzer şekilde i. satırın başına i. kaynağı belirtmek amacıyla  $O_i$  yazılır. Bu şekilde (i,j) hücresi ile  $P_{ij}$  vektörünü de eşlemek mümkündür, fakat biz vektörü ekspilisit olarak kullanmayacağız. Ve en alt sağ köşeye  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$  koşulu yazılır.

Temel çözümler söz konusu olacağı zaman  $(m+n-1)$  den fazla  $x_{ij}$  'nin Tablo 1 de pozitif olacağını daha önceden belirtmiştik.  $(m+n-1)$  den daha fazla pozitif  $x_{ij}$  'nin bulunması bunlara ait  $P_{ij}$  vektörlerinin lineer bağımlı olduğu anlamına gelir.

Biz sadece temel uygun çözümlerle uğraştığımız için  $(m+n-1)$  den daha fazla  $x_{ij}$  'nin 0'dan büyük olamayacağını söylemek yanlış olmaz. Tabloya yalnız temel değişkenlerin değerleri yazılacaktır. Yani temel değişkenler için tabloya sıfır yazılmayacaktır. Bununla beraber temel değişkenlerin sıfır değerleri yazılacaktır.

### II.7.1. Direk Yol

$\{(i,j), (i,k), (q,k), (q,r), \dots, (v,w)\}$

veya  $\{(i,j), (s,j), (s,t), \dots, (v,w)\}$

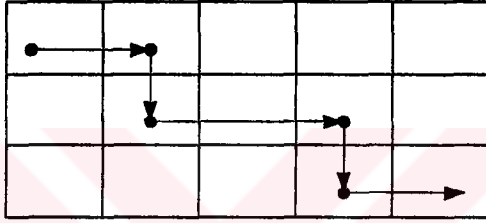
sıralı hücrelerine aşağıdaki koşullar gerçekleşirse (i,j) hücresinden (v,w) hücresine direkt yol denir.

- 1- Komşu iki hücre ya aynı satırda veya aynı sütunda olmalıdır.
- 2- Komşu üç hücre aynı satır veya sütunda olamaz.
- 3- Son hücre dışında her hücre sırada yalnız bir sefer gözükmektedir. (i,j) hücresine yolun başlangıç hücresi (v,w) ya da yolun bitiş hücresi denir.

### II.7.2. Direkt Dal

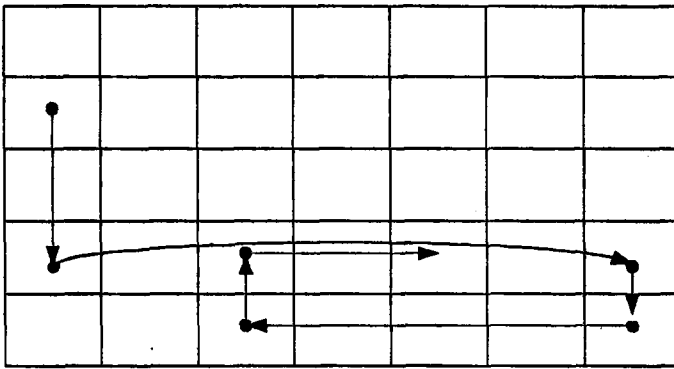
Sıralı hücrelerine aynı satırda veya aynı sütunda bulunan ardışık iki hücreyi birleştiren doğru parçasına "Direkt Dal" denir. Birinci hücreye dalın başlangıç noktası, ikinci hücreye de dalın bitiş noktası denir.

Yukarıdaki yol tanımına göre bir hücreden oluşan bir yol olması mümkündür. Eğer yolun birden fazla hücresi varsa, yolu bir veya daha fazla dallarla göstermek mümkündür. Bir dalın bittiği nokta kendisinden sonraki dalın başlangıç noktası olur.. Ayrıca her dal kendisinden sonraki dala diktir. Aşağıdaki şekilde (Şekil 2), (1,1) hücresini (3,5) hücresine götüren bir yol gösterilmiştir. Sıralı hücreler



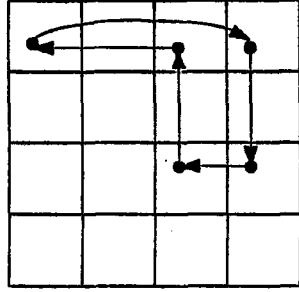
Şekil 2. Direkt Dal Örneği

$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,4),(3,5)\}$  olarak yazılabilir. (1,1) hücresinden (3,5) hücresine birçok direkt yol yazılabilir. Şekil 3’de verdiğimiz bu yol tanımına göre (2,1) hücresinden (4,5) hücresine yalnız bir direkt yol vardır.



Şekil 3. Direkt Dal Örneği





**Şekil 6. Yanlış Direkt Çevrim Örneği**

Çünkü direkt yol tanımına göre her hücre (sonuncu hücre hariç) yalnız bir defa alınmalıdır. Şekil 5’de (2,2) hücresi iki defa kullanılmıştır. Şekil 6’da ise (1,1) hücresi başlangıç hücresi alınırsa ilk ve son dallar birbirine dik olmaz. Eğer başka bir hücreyi başlangıç noktası olarak alırsak yine yanlış olur, çünkü bu durumda ardışık iki dal birbirine dik olmamış olur. Şekil 4’te ise hangi elemanın başlangıç noktası olduğunu bulamayız.

Verdiğimiz direkt çevrim tanımından, çevrimi oluşturan farklı hücrelerin çift sayıda olduğunu çıkarılır ve çevrimdeki hücelere karşılık gelen  $P_{ij}$  vektörlerinin lineer bağımlı oldukları elde edilir. Bunu görmek için halkanın herhangi bir hücresinden başlayarak buna ait vektörün katsayısını +1 alırsak, ondan sonraki hücreye geçtiğimizde -1 katsayısını veririz. Bu şekilde devam edersek

Elde ederiz. Bu ise çevrimdeki hücelere karşılık gelen vektörlerin lineer bağımlı oldukları anlamına gelir.

Yukarıda çevrimdeki belirttiğimiz ifadelerden ve direkt çevrimden (19)’daki

$\{P_{ij}, P_{iv}^B, P_{vu}^B, \dots, P_{wj}^B, P_{ij}\}$  vektörlere karşılık gelen hücrelerin Tablo 1’de bir direkt çevrim oluşturduğu sonucuna ulaşılır.

## II.8. TRANSPORT TABLOSUNDA TABAN

Yukarıdaki elde ettiğimiz sonuçlardan şunu söyleyebiliriz. A matrisinin vektörlerinden bir kısmına karşı gelen hücreler bir çevrim oluşturmazlarsa bu vektörler lineer bağımsızdır. Buna göre A matrisinin taban vektörlerini oluşturmak için Tablo 1 de çevrim oluşturmayan hücreler karşı gelen  $(m+n-1)$  tane vektörü almak yeterlidir. Böylece herhangi uygun çözümün temel uygun çözüm olup olmadığını belirlemek için basit bir kriter elde edilmiş olunur.

### II.8.1. Temel Direkt Yol

Her satır ve sütunda yolu tanımlayan hücrelerden ikiden daha fazla hücre bulunmazsa  $(i,j)$  hücresinden  $(u,v)$  hücresine bir direkt yola temel direkt yol diyeceğiz.

Şekil 2 bir “temel direkt yol”dur. Tablo 2 deki herhangi bir yol eğer temel değilse, yoldaki bazı hücreleri elemek suretiyle temel hale getirebiliriz. Bunu göstermek için Tablo 1 deki k. satırda ikiden daha fazla hücre bulunsun. Bu hücreleri  $(k,p)$ ,  $(k,q), \dots, (k,w)$  ile gösterelim. Ayrıca bunların bu dizilişi yoldaki dizilişleri olsun.  $(k,p)$  ile  $(k,w)$  arasındaki bütün hücreleri çıkartalım ve yeni sıralanmada  $(k,p)$  ile  $(k,w)$  hücreleri komşu olsun. Bunu herbir satır ve sütun için yapalım. Sonuçta temel yol elde ederiz.

Örnek olarak Şekil 3 deki şu sıralı ikilileri gözönüne alalım.

$$\{(2,1), (4,1), (4,7), (5,7), (5,3), (4,3), (4,5)\}$$

4. satırda yolda 4 eleman vardır ve bunların sırası  $(4,1), (4,7), (4,3), (4,5)$  dir. Yukarıda belirttiğimiz gibi  $(4,1)$  ve  $(4,5)$  arasındaki hücreleri atarsak  $\{(2,1), (4,1), (4,5)\}$  yolunu elde ederiz.. Bu ise temel direkt yoldur.

### II.8.2. Temel Direkt Çevrim

Her satır ve sütunda ikiden fazla hücre bulunmazsa direkt çevrime temel direkt çevrim denir.

Daha önce her yolun bir temel yola dönüştürülebileceği belirtildi. Buradan her direkt çevrimden de temel direkt çevrimin oluşturulabileceği sonucuna ulaşılır. Çünkü bir çevrimde verilen bir satır ve sütunda bir eleman varsa, aradan en az iki elemanı vardır. Bir basit çevrim de ise bir elemanın olduğu satır veya sütunda tam iki eleman vardır.

( $m+n-1$ ) tane lineer bağımsız temel vektör ve bir  $P_{ij}$  vektörünü gözönüne alalım. ( $m+n$ ) tane vektör lineer bağılıdır çünkü  $P_{ij}$  diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Böylece bu vektörlere karşılık gelen ( $m+n$ ) hücrenin bir alt cümlesinden oluşturulabilecek bir çevrim mevcuttur. Oluşturulan bu çevrim tek türlü yazılır, çünkü bir vektörün temel vektörler cinsinden tek türlü yazılabileceğini daha önce belirtmiştik. O halde tek türlü bu çevrim basit olmalıdır. Çünkü biliyoruz ki bir direkt çevrim varsa bir temel direkt çevrim de vardır. Eğer temel (basit) alandan başka bir direkt çevrim olsaydı  $P_{ij}$ 'nin temel vektörler cinsinden gösterilişi tek türlü olmazdı. Böylece elimizde herhangi bir  $P_{ij}$  ve ( $m+n-1$ ) tane temel vektör olduğunda Tablo 1'de bu vektörlere karşılık gelen bir temel direkt çevrim oluşturulabileceği sonucuna ulaşırız.

### II.8.3. Bağlı Hücreler Cümlesi

Eğer bir hücre kümesinde bulunan hücrelerin herhangi birini diğerine bağlayan bir direkt yol mevcut ise buna bağlı hücreler cümlesi denir.

Tablo 1 deki  $m+n-1$  temel vektöre karşı gelen hücrelerin bağlı oldukları kolaylıkla görülebilir. Bunu göstermek için  $P_{st}^B$ ,  $P_{uv}^B$  vektörlerine karşı gelen (s,t), (u,v) hücrelerini birleştiren bir yol olmasın. Şimdi  $P_{sv}$  vektörüne karşılık gelen (s,v) hücrelerini düşünelim.  $P_{sv}$ , taban vektörlerine lineer bağımlı olduğundan yalnız (s,v) ve diğer taban vektörlerini içeren temel bir çevrim vardır.

Bu durumda bir çelişki ile karşı karşıya kalınır. Çünkü çevrim oluşu bir direkt yolun olmasını gerektirir, öyle ki bu yol yalnız temel vektörlere karşılık gelen hücrelerden oluşur ve  $P_{sw}^B$  ve  $P_{qv}^B$  vektörlerine karşılık gelen hücreleri birleştirir. Bu hücreler (s,v) ile aynı satır ve sütundadır. Eğer  $P_{sw}^B \neq P_{st}^B$  ise bunlar bir direkt dala bağlıdır. Aynı şey eğer  $P_{qv}^B \neq P_{uv}^B$  ise de geçerlidir. Dolayısıyla temel vektörlere karşılık gelen hücrelerin bağlı olduğu sonucuna varılır.

### II.8.4. Temel Hücre

Verilen ( $m+n-1$ ) tane temel vektöre karşılık gelen hücreye temel hücre denir.

### II.8.5. Ağaç

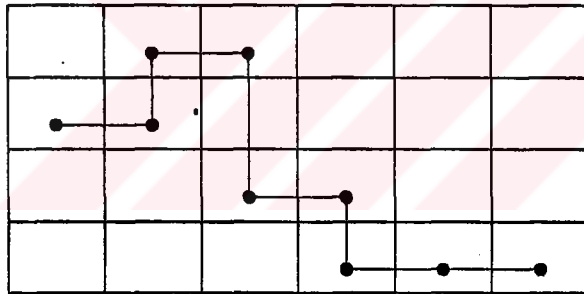
İçinde çevrim olmayan bağlı hücre kümesine bir ağaç denir. Buna göre temel hücreler  $(m+n-1)$  hücreli bir ağaç oluştururlar. Herhangi  $(m+n-1)$  elemanlı ağacın hücreleri de bir temel hücre oluştururlar.

### II.8.6. Temel Ağaç

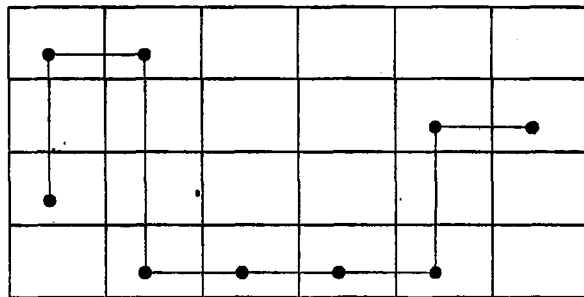
$(m+n-1)$  hücresi bulunan ağaca temel ağaç denir.

Bu tanıma göre bir temel ağaçta her satır ve sütun en az bir hücre bulunur. Bu sonucu temel hücrelere karşılık gelen vektörlerin bir temel vektör oluşturmasından söyleyebiliriz. Eğer  $i$ . satırda hiç bir hücre yoksa,  $i$ . satırdaki herhangi bir hücre için temel hücreleri kullanarak bir çevrim oluşturmak mümkün olmaz. Bu ise bir çelişkidir.

**Örnek 4.** Dört kaynak ve altı hedefli bir transport problemi için iki temel ağaç Şekil 7 ve Şekil 8 de gösterilmektedir.

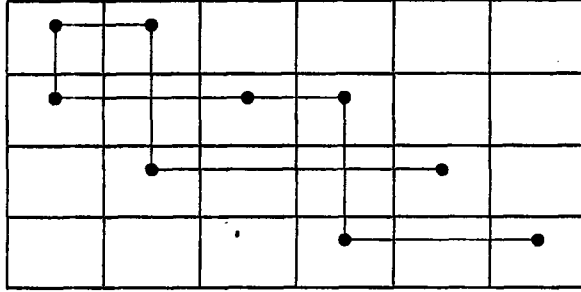


Şekil 7. Temel Ağaç Örneği



Şekil 8. Temel Ağaç Örneği

Eğer kesim noktasında herhangi bir nokta yoksa bir ağacın dalları bir birleşimi dik kesebilir.



Şekil 9. Temel Ağaç Örneği

Örneğin Şekil. 9 da ağacın dalları kesişmektedir. Fakat bir çevrim oluşturmamaktadır. Çünkü kesim noktasında ağaca ait hiçbir hücre yoktur.

## II.9. ATLAMA TAŞI ALGORİTMASI

Herhangi bir transport problem için  $(m+n-1)$  tane temel değişken  $x_{ij}$  lerin pozitif olduğu bir temel uygun çözümümüz olsun. Bu çözüm ile Tablo 1'i oluşturalım. Sıfırdan farklı  $x_{ij}$  leri uygun hücelere yerleştirelim ve temel hücrelerin belirli olması için bunları daire içerisinde gösterelim. Ayrıca bütün maliyeti de tabloda belirtelim. Verilen temel çözümün optimal olup olmadığını anlamak için tabanda olmayan  $P_{ij}$  lere karşılık gelen  $z_{ij} - c_{ij}$  leri hesaplamak gerekir. Bunun  $(i,j)$  ve temel çevrimini bulmalıyız. Bu çevrimin

$$\{(i,j), (i,r), (u,r), \dots, (s,w), (s,j), (i,j)\}$$

olduğunu kabul edersek (22) eşitliğinden

$$z_{ij} - c_{ij} = c_{ir}^B - c_{ir}^B + \dots - c_{sw}^B + c_{sj}^B - c_{ij} \quad (23)$$

sonucuna ulaşırız. Çevrimi hangi yönde gidersek gidelim  $z_{ij} - c_{ij}$  değerlerinin aynı olduğunu daha önce belirtmiştik. Bu değerleri  $x_{ij}$  için ayrılan yere yazalım. Bu hücreler  $x_{ij} = 0$  olduğu için boş bırakıldı. Bu şekilde olan bütün  $z_{ij} - c_{ij}$  leri hesaplayıp tabloya yazalım. Eğer problem bir minimizasyon problemi ise  $z_{ij} - c_{ij}$  değerleri sıfır veya negatif ( $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ ) olduğunda temel uygun çözüm optimaldir.

$z_{ij} - c_{ij} > 0$  ise  $z$  indirgenebilir. Bu çözümde  $(m+n-1)$  tane pozitif  $x_{ij}$  bulunmasından yani temel çözümün dejenere olmamasından elde edilir. Dejenerasyonun olmadığını kabul edelim. Dejenerasyon olması halinde de problem kolaylıkla çözülebilir. Buna durumu ileride açıklayacağız. Ayrıca bir transport probleminde sınırsız bir çözümün çıkacağından da korkmamak gerekir. Mutlak minimum maliyet sıfırdır.

Şimdi yeni bir temel çözüm elde etmeye hazırız. Simpleks metotta olduğu gibi

$$\begin{aligned} z_{st} - c_{st} &= \max(z_{ij} - c_{ij}), \\ (z_{ij} - c_{ij} > 0 \text{ için}) \end{aligned} \quad (24)$$

ifadesini hesaplayalım. Böylece  $P_{st}$  tabana girmekte, yani daha sonraki tabloda  $x_{st}$  değeri pozitif olacaktır. Tabandan çıkarılacak vektörü de

$$\min \frac{x_{\alpha\beta}^B}{y_{st}^{\alpha\beta}}, \quad y_{st}^{\alpha\beta} > 0$$

şeklinde hesaplayacağız. Bununla beraber  $y_{st}^{\alpha\beta} > 0$  değeri bizim problemimizde 1 dir. Böylece temel çözümde sıfırlanacak olan değişken en küçük  $x_{\alpha\beta}^B$  den bulunacaktır. Öyle ki bu  $x_{\alpha\beta}^B$  lerin (23) deki  $c_{\alpha\beta}^B$  katsayıları +1 dir. Eğer  $z_{st} - c_{st}$  ifadenin sol tarafında ortaya çıkıyorsa, diğer bir deyimle çıkarılacak değişkeni bulmak için (s,t) ve temel hücrelerden oluşan çevrimi belirlemeliyiz. Katsayısı +1 olan  $c_{\alpha\beta}^B$  'lerden en küçük  $x_{\alpha\beta}^B$  aranılmalıdır. Buna  $x_{qr}^B$  diyelim.

Buradan yeni temel çözüm için temel değişkenlerin değerleri kolaylıkla hesaplanabilir. Bu yeni değerler bir n ile ifade edilecektir.

Buna göre şunları yazabiliriz. Çevrimdekiler için

$$\hat{x}_{st} = x_{qr}^B \quad (25a)$$

Katsayıları +1 olan  $c_{\alpha\beta}^B$  için

$$\hat{x}_{\alpha\beta}^B = x_{\alpha\beta}^B - x_{qr}^B \quad (25b)$$

Katsayıları -1 olan  $c_{\alpha\beta}^B$  için

$$\hat{x}_{\alpha\beta}^B = x_{\alpha\beta}^B + x_{qr}^B \quad (25c)$$

Ayrıca çevrimde olmayanlar için

$$\hat{x}_{\alpha\beta}^B = x_{\alpha\beta}^B \quad (25d) \quad \text{dir.}$$

Bu yeni temel çözüm için yeni bir tablo oluşturur ve temel değişkenler tabloda yine daire içine alınır. Yeniden  $z_{ij} - c_{ij}$  değerleri hesaplanır ve bütün işlem tekrarlanır.

Eğer  $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$  ise optimal çözüm bulunmuş olur.

Bu algoritmaya “Atlama Taşı” denir. İlk defa Charnen ve Cooper tarafından ortaya atılmıştır. Fakat en kısa yolu ilk defa Dantzig tarafından bulunmuştur.

Eğer simpleks metodunu doğrudan transport problemine uygulamak istersek, yalnız suni vektörleri içeren bir tabanla başlamalıyız. Bu başlangıç temel uygun çözüme Tablo 1 den hemen ulaşabiliriz. Suni vektörlere gerek yoktur. Başlangıç temel uygun çözüm bulma metodu Charnen ve Cooper tarafından ortaya atılmıştır. Bu metoda “Kuzeybatı-Köşe Kuralı” adı verilir.

**Örnek 6.** Bu anlatılanları aşağıdaki örneğe uygulayalım. Dört kaynaklı ve altı hedefli bir transport problemini gözönüne alalım. Kaynak ve hedef istekler ve maliyetler Tablo 3 de verilmektedir.

Tablo 3. Transport Problem Tablosu Örneği

2	1	3	3	2	5	50
30	20	-2	-4	-1	-4	
3	2	2	4	3	4	40
0	30	10	-4	-1	-2	
3	5	4	2	4	1	60
2	-1	10	40	10	3	
4	2	2	1	2	2	31
-1	0	0	-1	20	11	
30	50	20	40	30	11	181

Bir başlangıç temel uygun çözümü Kuzeybatı-Köşe yöntemi ile kolaylıkla elde ederiz.

$$x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(50, 30) = 30$$

Böylece 1. hedefin isteği yerine getirildi. 1. kaynaktaki bütün ürünleri kullanılmadı.

$$x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2) = \min(20, 50) = 20$$

olarak bulunur. Böylece 2. hedefe 30 birim ürün daha gönderilmesi gerektiğinden (2,2) hücrene geçilir ve

$$x_{22} = \min(b_2 - 20, a_2) = \min(30, 40) = 30$$

olur. Artık 2. hedefin isteği de sağlanmış oldu. 2. kaynakta halen 10 birim ürün daha var. O halde

$$x_{23} = \min(10, b_3) = 10$$

alınır. 3. hedefe daha 10 birim ürün daha gönderilmelidir. Dolayısıyla

$$x_{33} = 10$$

alınır. 3. kaynaktan halen 50 birim ürünün gönderilmesi gerekiyor.

$$x_{34} = 40 = b_4$$

alıyoruz ve 4. hedefin istekleri sağlanmış olunur. 3. kaynakta 10 birim ürün vardır. O halde

$$x_{35}=10$$

olmalıdır. 5. hedefin isteği 30 birimdir. Dolayısıyla

$$x_{45}=20$$

olur. Buna göre 5. kaynaktan 11 birim daha gönderilmesi gerekir, bu da 6. hedefin isteğidir yani

$$x_{46}=11$$

olur. Bulduğumuz bu  $x_{ij}$  değerlerini daire içine alıyoruz. Bunların sayısı  $(m+n-1)$  tanedir yani 9 tane. Dikkat edilirse daire içerisine alınmış olunan hücreler bir çevrim oluşturmazlar. Bu durumda bir temel uygun çözüme ulaşmış oluruz. Diğer bütün  $x_{ij}$  değerleri sıfırdır. Tablo 2 de bu çözüm gösterilmiştir.

Artık  $z_{ij} - c_{ij}$  'ler hesaplanmalıdır. Bu işlemi  $z_{41} - c_{41}$  'i hesaplayarak gösterelim. Önce (4,1) ve temel hücreleri içeren tek türlü belirli halkayı belirleyelim. Tablo 2'de gösterilen bu halka tek türüdür. Bundan dolayı (23) eşitliğinden aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} z_{41} - c_{41} &= c_{45} - c_{35} + c_{33} - c_{23} + c_{22} - c_{12} + c_{11} - c_{41} \\ &= 2-4+4-2+2-1+2-4 = -1 \end{aligned}$$

Bulunan  $-1$  değeri (4,1) hücresine yazılır. Bu değer ters yönde hareket edilseydi yine aynı olacaktı. Yani,

$$z_{41} - c_{41} = c_{11} - c_{12} + c_{22} - c_{23} + c_{33} - c_{35} + c_{45} - c_{41} = -1 \text{ olur.}$$

Diğer bütün  $z_{ij} - c_{ij}$  değerleri hesaplanarak Tablo 3'te olduğu gibi tabloya yazılır. Temel hücreler için  $z_{ij} - c_{ij}$  değerlerini hesaplamaya gerek yoktur. Çünkü bu hücreler için  $z_{ij} - c_{ij}$  değerleri 0'dır.

Bütün hücreler için  $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$  olmadığı (yani  $z_{ij} - c_{ij} > 0$  değerleri mevcut olduğu) için başlangıç uygun çözüm optimal değildir. En büyük  $z_{ij} - c_{ij}$  değeri 3 olup (3,6) hücresindedir. Yani  $z_{36} - c_{36} = 3$  dür. İkinci adımda  $x_{36}$  pozitif olacaktır. (Yani simpleks metoda göre  $P_{36}$  tabana girecektir.) Tabandan çıkarılacak değişkeni belirlemek için (3,6) ve taban hücrelerini içeren çevrimi belirlemeliyiz. Bu çevrim Tablo 2'de kesik çizgilerle gösterilmiştir.

$$z_{36} - c_{36} = c_{35} - c_{45} + c_{46} - c_{36}$$

Yalnız  $c_{35}$  ve  $c_{46}$  pozitif işaretlidir. Bu durumda da yalnız bu hücreler  $y_{ij}^{\alpha\beta} = +1$  değerini verirler.  $x_{35} = 0$ ,  $x_{46} = 11$  olduğundan en küçükleri  $x_{35} = 10$  dur. Yeni temel çözümden

$$\hat{x}_{36} = x_{35} = 10; \hat{x}_{45} = 20 + x_{35}; \hat{x}_{46} = 11 - x_{35} = 1 \text{ değerleri elde edilir.}$$

Çevrimde olmayan temel değişkenlerin değerleri değişmemiştir.

$y_{ij}^{\alpha\beta}$  nın değerlerini düşünmeden  $x_{ij}$  lerin değerlerinin nasıl değiştiğini hesaplayabiliriz. (3,6) ve temel hücreleri içeren çevrimin incelenmesinden şu görülür. 3. kaynağın isteğini sağlayabilmek için  $x_{35}$  Q kadar azaltıldığında  $x_{36}$  da Q kadar artmaktadır. 5. hedefin isteğini sağlayabilmek için  $x_{45}$  Q kadar artırılmalı ve 4. kaynağın isteğini sağlayabilmek için  $x_{46}$  Q kadar azaltılmalıdır. Q için müsaade edilen en büyük değer temel değişkenlerin hangisi en önce sıfır olabiliyorsa onu sıfır yapan değerdir. Temel çözümde olan hücreler biliniyorsa, herhangi bir transformasyon formülüne gerek kalmadan temel değişkenlerin değerleri kısıtların sağlanmasıyla bulunabilir.

Yani temel uygun çözüm Tablo 3 de verilmiştir.

**Tablo 4. Temel Uygun Çözüm Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	2 30	1 20	3 -2	3 -4	2 -4	2 -7	50
O <sub>2</sub>	3 0	2 30	2 10	4 -4	3 -4	4 -5	40
O <sub>3</sub>	3 2	5 -1	4 10	2 40	4 -3	1 10	60
O <sub>4</sub>	4 2	2 3	2 3	1 2	2 20	2 1	31
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181

Buradan yeni bir temel uygun çözüm elde etmek kolaydır. Bunu daha önce belirttiğimiz atlama taşı algoritması için gerekli olan  $z_{ij} - c_{ij}$  değerlerini bularak yapabiliriz.

Tekrar yeni bir temel uygun çözüm bulunduğunda yeniden  $z_{ij} - c_{ij}$ 'ler hesaplanacaktır. Bu işlemlerin sonucunda Tablo 5, Tablo 6 ve Tablo 7 elde edilir.

Tablo 3 de tabana girecek olan vektörün seçimi tek türlü belirli değildir. (4,3) hücresi tabana girişi keyfi olarak seçilmiştir.  $z$ 'nin minimum değeri son tablodan hesaplanabilir.

Bu durumda;

$$\min z = 2(30) + 3(10) + 1(30) + 2(20) + 2(20) + 2(39) + 1(1) + 2(30) + 1(11) = 330$$

İlk başlangıç maliyeti ise,

$$z = 2(30) + 1(20) + 2(30) + 2(10) + 4(10) + 2(40) + 4(10) + 2(20) + 2(11) = 382 \text{ dir.}$$

Optimum sonuç ile ilk maliyeti karşılaştırırsak farkın  $382 - 330 = 52$  olduğu görülür.

$z_{ij} - c_{ij}$  değerleri çevrimlerin yerine simpleks metodun transformasyon formülleri ile de hesaplanabilirdi. Bu formüllere göre;

$$\hat{z}_{ij} - c_{ij} = z_{ij} - c_{ij} - \frac{y_{ij}^{qr}}{y_{st}^{qr}} (z_{st} - c_{st}) \quad (26)$$

dir ve burada  $y_{st}^{qr} = +1$  dir.

$$\hat{z}_{41} - c_{41} = z_{41} - c_{41} - \frac{y_{41}^{35}}{y_{36}^{35}} (z_{36} - c_{36}) = -1 - (-1) \cdot 3 = 2$$

$$\hat{z}_{42} - c_{42} = z_{42} - c_{42} - \frac{y_{42}^{35}}{y_{36}^{35}} (z_{36} - c_{36}) = 0 - (-1) \cdot 3 = 3$$

şeklinde hesaplanır.

Tablo 5. Transport Problem Çözüm Tablosu

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	2 30	1 20	3 -2	3 -4	2 -1	5 -7	50
O <sub>2</sub>	3 0	2 30	2 10	4 -4	3 -1	4 -5	40
O <sub>3</sub>	3 2	5 -1	4 9	2 40	4 0	1 11	60
O <sub>4</sub>	4 -1	2 0	2 1	1 -1	2 30	2 -3	31
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181

**Tablo 6. Transport Problem Çözüm Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	2 21	1 28	3 -2	3 -2	2 -1	5 -5	50
O <sub>2</sub>	3 0	2 21	2 19	4 -2	3 -1	4 -3	40
O <sub>3</sub>	3 9	5 -3	4 -2	2 40	4 -2	1 11	60
O <sub>4</sub>	4 -1	2 0	2 1	1 1	2 30	2 -1	31
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181

**Tablo 7. Transport Problem Çözüm Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	2 20	1 30	3 -2	3 -2	2 0	5 -5	50
O <sub>2</sub>	3 0	2 20	2 20	4 -2	3 0	4 -3	40
O <sub>3</sub>	3 10	5 -3	4 -2	2 39	4 -1	1 11	60
O <sub>4</sub>	4 -2	2 -1	2 1	1 1	2 30	2 -2	31
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181

## II.10. DEJENERASYON VE TRANSPORT TABLOSU

$x_{ij}$  lerin  $(m+n-1)$  tanesinden daha azı pozitif ise bir transport probleminin uygun bir çözüme dejenere olmuş denir. Başlangıç temel uygun çözüm bulunurken veya daha sonraki adımlarda dejenerasyon ile karşılaşılabilir. Böyle bir durum tıpkı simpleks metotta olduğu gibi herhangi bir zorluğa neden olmaz. Simpleks metotta olduğu gibi bir pertürbasyon metotla dejenerasyon problemi çözümlenebilir.

Dejenerasyon olması halinde bu problemin çözümü şu şekilde olur. Eğer başlangıç çözüm  $h < (m+n-1)$  tane  $x_{ij} > 0$  olan bir uygun çözümü oluşturuyorsa, dejenerasyon ile başlangıçta karşılaşmış oluruz. Bu durumda pozitif  $x_{ij}$  lere ait olan hücreler bir temel ağaç oluşturamazlar. Tabloya bir başlangıç temel çözüm ve bir temel ağaç elde edebilmek için sıfır seviyede  $(m+n-1-h)$  tane ek hücre ilave etmeliyiz. İlave edilen hücreler sonucunda  $(m+n-1)$  hücre bir temel ağaç oluşturmalıdır. İlave edilen hücelere 0 yazılır ve bu hücreler daire içerisine alınarak bunların başlangıç temel çözümün birer üyesi oldukları belirtmiş olunur. İşlemleri yaparak temel ağacı oluşturacak hücreleri seçmek kolaydır ve birçok seçim imkanı vardır. Bir temel çözüm belirledikten sonra her zamanki gibi yola devam edilir. Bu durumda çözüme giren ve çıkan değişkenler sıfır seviyededir.

**Örnek 7:** Tablo 8'i gözönüne alalım.

Kuzeybatı-Köşe kuralını kullanırsak aşağıdaki tabloda gösterilen sonuçları elde ederiz.

**Tablo 8. Kuzeybatı Köşe Yöntemi Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	20	5					25
O <sub>2</sub>		20	+ 0	x			25
O <sub>3</sub>			- 40	10 +			50
O <sub>4</sub>				40	0		40
O <sub>5</sub>					10	20	30
b <sub>j</sub>	20	30	40	50	10	20	170

Burada yalnız 8 tane pozitif  $x_{ij}$  değeri vardır. Ama  $(m+n-1)=10$  dur. Pozitif  $x_{ij}$  lere karşılık gelen hücrelerin bağlı olmadığı görülüyor. Bir temel ağaç oluşturabilmek için iki tane daha hücreye ihtiyaç vardır. Eğer (2,3) ve (4,5) hücrelerini (kesik çizgilerle gösterilen) eklersek bir temel ağaç elde edilebilir. Bu hücrelere sıfır yerleştirildiği için bir temel (dejenere olmuş) uygun çözüm elde etmiş oluruz. Daha başka hücreler eklenerek yine aynı şeyi elde edebilirdi.

Eğer bunan sonraki adımda (2,4) hücresi temel ağaçta gözükecek şekilde  $z_{ij} - c_{ij}$  sayısı ortaya çıkarsa  $x_{24}$  temel çözüme sıfır seviyede girecektir. Temel çözümdeki değişkenlerin değerleri değişmeden kalacaktır. Bunun için sadece (2,3) hücrelerini (2,4) ile değiştirmemiz yeterli olacaktır.

Dejenerasyon daha sonraki bir adımda ortaya çıkabilir. Bu durumda temelden ayrılan değişken olarak herhangi bir bağlı değişkeni seçmek gerekir. Ondan sonraki adımda, yer değiştiren değişkene bağlı olan değişkenlerin hepsi sıfır seviyede olacaktır. Bununla beraber bu değişkenleri temel çözümde muhafaza edeceğiz. (Yani onlar daire içine alınmış olarak kalacaklardır) ve her zaman ki gibi devam edecektir.

**Örnek 8:** Tablo 3'te verilen problemde 4. kaynaktaki ürünü 30 ve 6. hedefle istemi 10 birim kabul edelim. Bu problem için Kuzeybatı-Köşe yöntemini kullanılarak başlangıç temel uygun çözüm için Tablo 9 elde edilir.

**Tablo 9. Kuzeybatı Köşe Yöntemi Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	30	20					50
O <sub>2</sub>		30	10				40
O <sub>3</sub>			10	40	10		60
O <sub>4</sub>					20	10	30
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	10	181

$z_{ij} - c_{ij}$  ler Tablo 2 de olduğu gibidir. Böylece  $x_{36}$  daha sonraki adımda temel çözüme girecektir. Şimdi bununla beraber yer değiştirecek değişken için bir bağ vardır. Ya  $x_{35}$  veya  $x_{46}$ 'nın yerine  $x_{36}$  girecektir. Eğer keyfi olarak  $x_{35}$  yerine  $x_{36}$ 'yı alırsak, yeni temel çözüm Tabla 9 da gösterildiği gibi olur. Şimdi bir tane temel değişken sıfırdır ve dejenerasyon ortaya çıkmıştır.  $z_{ij} - c_{ij}$  ler tekrar Tablo 3 de olduğu gibidir. Eğer  $x_{43}$  ü temel çözüme giren değişken olarak seçseydik bu da sıfır seviyesinde girecekti.

**Tablo 10. Transport Problem Çözüm Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	30	20					50
O <sub>2</sub>		30	10				40
O <sub>3</sub>			10	40		10	60
O <sub>4</sub>					30	0	30
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	10	181

Şimdi dejenerasyon olasılığını tamamen ortadan kaldıran metodu inceleyelim. Bunun için önce aşağıdaki iddiayı ispat edelim.

**Teorem 3:** Herhangi bir adımda dejenerasyon ortaya çıkarsa, a<sub>i</sub>'lerin en az bir I has alt kümesi ve b<sub>j</sub>'lerin en az bir T has alt kümesi için

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j \text{ dir. [4]}$$

Tablo 8 de  $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 50$  ve  $a_5 = b_5 + b_6$

Tablo 9 da  $a_1 + a_4 = b_1 + b_2 = 80$

$$a_1 + a_3 = b_2 + b_4 + b_6)$$

Bunun bir dejenere temel uygun çözüm olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan  $n \geq m$  kabul edebiliriz. Böylece temel uygun çözüm için Tablo 1 in en az bir sütununda yalnız bir tane pozitif  $x_{ij}$  olduğu sonucuna ulaşırız. Aksi halde temel çözümde en az  $2n$  tane pozitif  $x_{ij}$  olduğu çıkardı ki bu da,

$2n \leq m+n-1 \Rightarrow n \leq m-1$  olurdu.

Halbuki  $n \geq m$  kabul edilmişti, bu bir çelişkidir. Böyle bir  $x_{ij}$  için  $x_{ij} = b_j$  olmalıdır.

j. sütunu silelim  $a_i y_i a_i^{(1)} = a_i - b_j$  ile yer değiştirelim ve yeni elde edilen m satır ve  $n^{(1)} = n-1$  sütunlu tabloyu gözönüne alalım. Bu yeni tablo için  $n^{(1)} \geq m$  veya  $m \geq n^{(1)}$  dir. Bu en az bir satır veya sütunda yalnız bir tane pozitif  $x_{ij}$  var demektir. U satırında tek olan pozitif  $x_{uj}$  değişkenini  $x_{uv}$  ile gösterelim. u. satırı silip,  $b_v$  yi  $b_v^{(2)} = b_v - a_u$  ile yer değiştirelim.

k adım sonra  $m+n-k$  satır ve sütunlu bir tablo geriye kalır. Bu tablo için  $a_i^{(k)}$   $b_j^{(k)}$  değerleri için,

$$a_i^{(k)} = a_i - \sum b_j + \sum a_i \quad (27)$$

$$b_j^{(k)} = b_j - \sum a_i + \sum b_j$$

bağıntıları elde edilir. Yapılan toplamlar silinen satır ve sütunlar üzerinden yapılmaktadır. Herhangi bir  $x_{st} = 0$  değişkenine ulaşıldığında ya  $a_s^{(k)}$  veya  $b_t^{(k)}$  sıfır olmalıdır. Çünkü ( $x_{st}$  s. satır veya t. sütundaki tek değişkendir.) Her iki halde de (27) eşitlikleri bize  $\sum a_i = \sum b_j$  eşitliğini verir. Burada toplama ilk tablodaki  $a_i, b_j$  lerin uygun bir alt kümesi üzerinden yapılmaktadır.

**Örnek 9:** Bu anlatılanları bir örnekle gösterelim. Tablo 8 de verilen dejenere olmuş temel çözüm için  $x_{11}$  1. sütunda tek temel değişkendir. 1. sütunu silip ve  $a_1$  yerine  $a_1^{(1)} = a_1 - b_1$  i yeni tabloda yerine yazalım.  $x_{12}$ , 1. satırdaki tek temel elemandır. 1. satırı silip  $b_2$  yerine  $b_2^{(2)} = b_2 - a_1^{(1)} = b_2 - a_1 + b_1$  yazalım. Bu durumda yeni tablonun 1. sütununda  $x_{22}$  tek temel değişken olur. (Tablo 3'ün 2. sütunu). Şimdi bu sütunu silip  $a_2$  yi  $a_2^{(3)} = a_2 - b_2^{(2)} = a_2 - b_2 + a_1 - b_1 = 0$  ile yer değiştirelim. Fakat şimdi  $x_{23} = 0$  bu satırdaki tek elemandır.  $a_2^{(3)} = 0$  olduğundan herşey uygun olarak devam eder. Bununla beraber  $a_2^{(3)} = 0$  olması bizi  $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$  sonucuna ulaştırır.

Bu durumda şu sonuca ulaşırız.

**Teorem 4:** Bir transport probleminde,  $a_i$ 'lerin has bir alt cümlesinin toplamı  $b_j$ 'lerin has bir alt cümlesinin toplamına eşit olmadığı sürece dejenerasyon ile karşılaşılmaz. [4]

Probleme pertürbasyon metodunu uygulayalım. Kaynak miktarı

$$a_i' = a_i + \varepsilon \quad (i=1,2,3,\dots,m) \text{ ve hedef istekleri } b_j' = b_j \quad (j=1,2,3,\dots,n-1),$$

$$b_n' = b_n + m\varepsilon \text{ olsun.}$$

$$\sum_{i=1}^m (a_i + \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n-1} (b_j + b_n + m\varepsilon)$$

Bu durumda aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

**Teorem 5:** Öyle bir  $\varepsilon_0 > 0$  vardır ki her  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  için dejenerasyon hiçbir zaman ortaya çıkmaz. [4]

İlk problemde  $a_i$  ve  $b_j$ 'lerin sonlu sayıda kısmi toplamları vardır.  $a_i'$  ve  $b_j'$ 'nü içeren bütün kısmi toplamlar kümesi için,

$$\sum a_i' = \sum b_j'$$

eşitliği bütün  $\varepsilon$  lar için sağlanacaktır. Çünkü  $\varepsilon$  böyle bir ifade de yok olmayacaktır. Bu ifadeler  $\varepsilon$  a göre lineerdir, dolayısıyla her durumda

$$\sum a_i' = \sum b_j'$$

olacak şekilde  $\varepsilon$  ları belirlemek mümkündür. Bu belirlenen pozitif  $\varepsilon$  ların en küçüğü olarak  $\varepsilon_0$  gösterirsek, bu taktirde herhangi bir  $\varepsilon$  için  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  şartı gerçekleşirse hiçbir zaman

$$\sum a_i' = \sum b_j'$$

eşitliği gerçekleşmez. O zaman da pertürbe edilmiş problemlerde hiçbir zaman dejenerasyon ile karşılaşılmaz.

Bir trasport problemini elle çözerken  $\varepsilon$ 'lar kolaylıkla kullanılabilir.  $\varepsilon_0$  sayısına ekspisilit olarak belirlemek gerekli değildir.  $\varepsilon$ 'ları kullanmaya bir bağ ile karşılaşınca kadar gerek yoktur. Bir bağ ortaya çıkınca o bağı koparmak için  $\varepsilon$ 'lar kullanılabilir. Tabiatıyla bir optimal çözüm bulununca  $\varepsilon$ 'ları silerek ilk problemine çözümüne ulaşılır.

**Tablo 11. Transport Problem Çözüm Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	D <sub>6</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	2	5+ $\varepsilon$					20+ $\varepsilon$
O <sub>2</sub>		25+ $\varepsilon$	2 $\varepsilon$				25+ $\varepsilon$
O <sub>3</sub>			40-2 $\varepsilon$	10+3 $\varepsilon$			50+ $\varepsilon$
O <sub>4</sub>				40-3 $\varepsilon$	3 $\varepsilon$		40+ $\varepsilon$
O <sub>5</sub>					10-4 $\varepsilon$	20+5 $\varepsilon$	30+ $\varepsilon$
b <sub>j</sub>	20	30	40	50	20	20+5 $\varepsilon$	170+5 $\varepsilon$

**Örnek 10:** Tablo 7 de  $\varepsilon$  lar kullanılırsa Tablo 10 elde edilir.

Eğer bir veya daha fazla kısmi toplamlar için  $\sum a_i = \sum b_j$  ise dejenerasyon ortaya çıkmamasına dikkat edilmelidir. Tablo 3'den Tablo 7'ye kadar incelenen örnekte

$$a_2 + a_3 = b_2 + b_3 + b_5,$$

$$a_2 = b_4 \quad \text{olur.}$$

Bu problemin çözümünde dejenerasyon ortaya çıkmaz.

## IL11. BAŞLANGIÇ TEMEL UYGUN ÇÖZÜMÜN BELİRLENMESİ

Bundan önce anlatmış olduğumuz Kuzeybatı Köşe yönteminden daha iyi bir başlangıç optimal çözümü verecek olan yeni bir metot da şudur.

Başlangıç çözümü bulmak için kullanılan metotlarda genellikle değişkenlerden birine pozitif bir değer verilir ve her adımda bir kaynağın veya bir hedefin isteği yerine getirilmiş olur. Aşağıdaki iddiayı ispat edelim.

**Teorem 6:** Uygun çözümün bulunması için uygulanan bir işlemde eğer bir değişkene pozitif bir değer veriliyor ve her adımda bir satır veya sütunun isteği sağlanıyorsa bu işlemin sonucunda bir temel uygun çözüme ulaşılır. Ayrıca dejenerasyonun olmaması halinde sonuçtaki hücreler bir temel ağaç oluştururlar.

Bu teknik  $(m+n-1)$  pozitif değişkenden daha fazla temel çözüm vermez. Çünkü  $(m+n-1)$  adımdan sonra  $(m+n-1)$  kısıt yerine getirilmiş olacaktır.

O halde ispat etmemiz gereken şey bir çevrimin oluşamayacağıdır.  $k$ . adımda  $x_{ij}$  ye pozitif bir değer verildiğini ve daha önceki  $(k-1)$  adında belirlenen pozitif değerli değişkenlere ait olan hücrelerle  $(i,j)$  hücresinin bir çevrim oluşturduğunu kabul edelim ve bu çevrimi şu sıralı ikililerin kümesi ile gösterelim.

$$\{(i,j), (i,r), (s,r), \dots, (v,u), (v,j), (i,j)\}$$

$x_{ij}$  'lere pozitif değerler vereceğimizden  $x_{ir}$  ye pozitif bir değer vermekle  $i$ . satır kısıtından çok  $r$ . sütun kısıtını sağlamış oluyoruz. Bu ise  $x_{ir}$  ye pozitif bir değer verilmeden önce  $x_{sr}$  ye bir pozitif değer verilmesi gerekliliği ortaya çıkarmaktadır. Ve bu adımda  $s$ . satır kısıtı da sağlanmaktadır. Eğer bu şekilde devam edersek  $j$ . sütun kısıtının,  $x_{vj}$  ye pozitif bir değer verilerek sağlandığına ulaşırız. Bunun yanında eğer  $x_{ij}$  ye pozitif bir değer verilirse bu  $j$ . kısıtın sağlanması ile çelişir. Bu durumda çevrim oluşmaz ve temel çözüm elde edilmiş olur. Dejenerasyon olmaması durumunda temel hücrelerin sayısı  $(m+n-1)$  olur ve bir temel ağaç oluşur. Eğer dejenerasyon varsa bir veya daha fazla ek hücrede sıfır bulunur ve böylece bir ağaç oluşabilir.

Dejenerasyon ile karşılaşıldığı zaman sıfır seviyeli hücrelerin bulunması, başlangıç çözümlerin her adımında bir değişkene değer verilerek herhangi bir satır veya sütunun isteğinin sağlanması durumunda kolaylıkla elde edilir. Örneğin  $k$ . adımda hem satır hem de sütun kısıtlarının aynı anda sağlanmış olsun. Bu dejenerasyonun ortaya çıkmasa anlamına gelir. Bu durumda satır veya sütunun kısıtı

$\varepsilon$  artırılarak pertürbe edilmiş olsun. Başlangıç çözümü bulmak için işleme devam edersek yukarıda gösterdiğimiz ispat sonuçta elde edilen çözümün temel olduğunu gösterir ve  $\varepsilon$  lar sıfıra eşitlenirse normal çözüme ulaşılır.  $\varepsilon$  'ları ekspilisit olarak belirlemeye gerek yoktur. Önemli olan satır ve sütunun isteklerinin aynı anda karşılanmamasıdır. Bu teknik özellikle bilgisayarlar kullanılarak çözüm ararken daha da önemlidir. Çünkü bu metot  $\varepsilon$  'ların sayısal değerlerinin verilmesinin gerekliliğini ortadan kaldıracaktır.

Aşağıda başlangıç temel uygun çözümleri elde etmek için 4 farklı metottan bahsedeceğiz. Bu metotlarda maliyet kullanılmaktadır. Önemli olan bir durum da, herhangi bir adımda bir satır veya sütun silindiği zaman bu satır veya sütunlardan hiçbir hücre daha sonraki adımlarda kullanılmaz.

#### II.11.1. Sütun Minimumu [4]

İşleme genellikle Tablonun 1. sütunu ile başlanır ve bu sütunun minimum maliyeti seçilir. Örneğin minimum maliyet  $r$ . satırda olsun.  $x_{r1} = \min(a_{r1}, b_1)$  kabul edelim. Eğer  $x_{r1} = b_1$  ise 1. sütun silinir ve 2. sütuna geçilir. Eğer  $x_{r1} = a_{r1}$  ise  $r$ . satır silinir ve 1. sütundaki en düşük maliyet bulunur. Farzedelim ki bu  $s$ . satırda olsun, o zaman  $x_{s1} = \min(a_{s1}, b_1 - a_{r1})$  kabul edilerek 1. hedefin isteği sağlanana kadar işleme devam edilir. Eğer minimum maliyet tek değilse bunlardan herhangi biri seçilir. 1. sütunun isteği tamamen sağladıktan sonra 1. sütun silinir ve aynı işlemler 2. sütun için yapılır. Bu işlemlere son sütunun isteği sağlanana kadar devam edilir.

Eğer bir satırın isteği ve sütunun isteği ( $k$ . sütun) aynı anda sağlanırsa yalnızca satırı silerek  $k$ . sütundaki ikinci minimum maliyetteki hücreye geçilir ve bu hücreye sıfır değeri verilir. Onun temel çözümde olduğu kabul edilerek  $k$ . sütun silinir ve  $(k+1)$ . sütuna geçilir. Bu durumda dejenere olmuş temel uygun çözüme ulaşılır.

Eğer bu metot Tablo 3 den Tablo 7'ye kadar olan örnekte kullanılırsa Tablo 12'yi ilk tablo için elde ederiz. Ayrıca 2. ve 3. sütunlarda minimum maliyet tek türlü belirli olmadığı takdirde en düşük indeksli satır kullanırsak Tablo 12'yi ilk tablo için elde ederiz.

Tablo 12. Sütun Minimumu Tablosu

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	2 30	1 20	3	3	2	5	50
O <sub>1</sub>	3	2 30	2 10	4	3	4	40
O <sub>1</sub>	3	5	4	2 19	4 30	1 11	60
O <sub>1</sub>	4	2	2 10	1 21	2	2	31
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181

### II.11.2. Satır Minimumu [4]

İşe birinci satırla başlanarak bu satırdaki minimum maliyet seçilir. Minimum maliyetin r. sütunda olduğunu kabul edelim ve  $x_{1r} = \min(a_1, b_r)$  diyelim. Eğer  $x_{1r} = b_r$  ise r. sütunu silinir ve 1. satırda ondan sonra gelen en düşük maliyet seçilir. Eğer en düşük maliyet s. sütunda ise,  $x_{1s} = \min(a_1 - b_r, b_s)$  olur. İşleme bu şekilde devam edilerek 1. satırın isteği sağlandıktan sonra 1. satır silinir ve aynı işlemler 2. satır için tekrarlanır. Bu işlemlere tüm satır istekleri sağlanana kadar devam edilir. Minimum maliyet tek türlü belirli değilse sütun minimumunda olduğu gibi herhangi biri seçilir.

Eğer bir satırın isteği (k. satır) ve sütunun isteği aynı anda sağlanırsa bu seferde sütun silinir. Ardından da k. satırda ikinci minimum maliyet bulunur ve bu hücreye sıfır değeri verilir. Daha sonra k. satırı silinerek (k+1). satıra geçilir. Bu teknik Tablo 11 deki probleme uygulanırsa Tablo 12 elde edilir. Bu tabloda dejenerasyonun ortaya çıktığı görülüyor. Kurala göre ya (1,1) hücresi veya (1,5) hücresi sıfır seviyesinde çözüme eklenebilir. (1,1) hücresi seçilirse aşağıdaki tablo oluşur.

**Tablo 13. Satır Minimumu Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	2 0	1 50	3	3	2	5	50
O <sub>1</sub>	3 20	2	2 20	4	3	4	40
O <sub>1</sub>	3 9	5	4	2 40	4	1 11	60
O <sub>1</sub>	4 1	2	2	1	2 30	2	31
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181

### II.11.3. Matris Minimumu [10]

Bu yöntemde bütün tablodaki en küçük maliyet seçilir. Bu maliyetin (i,j) hücresi olduğu kabul edilirse  $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$  ataması yapılır. Kısıtların sağlanmasına göre ya i. satır veya j. sütun silinir. Eğer  $x_{ij} = b_j$  ise a<sub>i</sub> yerine (a<sub>i</sub> - b<sub>j</sub>) yazılır. Aynı işlem elde edilen yeni tablo için tekrarlanır. Eğer minimum maliyet bir tane değilse, bunlar arasından herhangi bir tanesi keyfi olarak seçilir. Bir satır ve sütunun kısıtları aynı anda sağlanıyorsa satır veya sütundan sadece bir tanesi silinir.

Bu metot örneğimiz için kullanılırsa başlangıç uygun çözüm olarak Tablo 14 elde edilir. Bunun için eğer tek türlü minimum ortaya çıkması halinde (i+j)'nin en küçük olduğu hücreyi seçeriz. Bu durumda yine dejenerasyon ortaya çıkar.

**Tablo 14. Matris Minimumu Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	a <sub>i</sub>
O <sub>1</sub>	2 0	1 50	3	3	2	5	50
O <sub>1</sub>	3 20	2	2 20	4	3	4	40
O <sub>1</sub>	3 10	5	4	2 9	4 30	1 11	60
O <sub>1</sub>	4	2	2	1 31	2	2	31
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181

#### II.11.4. Vogel Yöntemi [10]

Bu yöntem Vogel tarafından öne sürülmüştür. Herbir satır için en düşük iki maliyet bulunur. Bu maliyetler  $c_{ij}$  ve  $c_{it}$  olsun. Ardından her satır için  $c_{it}-c_{ij}$  hesaplanır. Bu şekilde m tane sayı elde edilir. Aynı şekilde bu işlem sütunlar için de yapılarak n tane daha sayı elde edilir. Bu  $(m+n)$  tane sayıdan en büyüğü seçilir. Seçilen bu sayının j. sütunundaki farka ait olduğunu kabul edelim. Ayrıca  $(i,j)$  hücresi j. sütunun en düşük maliyeti olsun.  $x_{ij}=\min(a_i,b_j)$  kabul edilerek i. satır veya j. sütun silinir. Bu şekilde elde edilen yeni tablo için aynı işleme devam edilir. Eğer maksimum sayı tek türlü belirli değil ise keyfi olarak herhangi bir tanesi alınır. Herhangi bir satır ve sütunun isteği aynı anda sağlanırsa satır veya sütundan yalnız bir tanesi silinir.

Daha önceki örnek için bu metodu kullanırsak Tablo 15 elde edilir. Satır için elde edilen farklar tablonun sağındaki bir sütuna ve sütun için elde edilen farklar tablonun en altındaki satıra yazılır.

Tablo 15'teki farklar, problemin birinci adımında elde edilen sonuçlardır. Burada pek karşılaşılmayan bir durum söz konusudur. Dikkat edilirse her farkın değeri eşittir.  $(i+j)$ 'nin en küçük olduğu hücrenin seçilmesiyle bağ çözülür. Bu çözüm yönteminin her adımında yeni farklar hesaplanmalıdır.

Tablo 15. Vogel Yöntemi Tablosu

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	a <sub>i</sub>		
O <sub>1</sub>	2 30	1 20	3	3	2	5	50	1
O <sub>2</sub>	3	2 30	2 10	4	3	4	40	1
O <sub>3</sub>	3 10	5	4	2 40	4 9	1 11	60	1
O <sub>4</sub>	4	2	2 10	1	2 21	2	31	1
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181	
	1	1	1	1	1	1		

Başlangıç çözümün bulunması için daha birçok başka yöntem vardır. Ama en çok kullanılan yöntemler bunlardır.

## II.12. $z_{ij} - c_{ij}$ 'NİN HESAPLANMASI İÇİN BAŞKA BİR METOT

Dantzig transport problemleri ile ilgili çalışmasında  $z_{ij} - c_{ij}$  'lerin hesaplanması için, atlama taşı algoritmasından daha basit bir yöntem önermektedir.  $c_{ir}^B, c_{qr}^B, c_{qt}^B, \dots$   $c_{ws}^B, c_{wj}^B$  sayıları herhangi bir transport probleminin bir temel uygun çözümündeki  $(m+n-1)$  tane fiyatı gösterebilir.

$$u_i + v_r = c_{ir}^B$$

$$u_q + v_r = c_{qr}^B$$

$$u_q + v_t = c_{qt}^B$$

.....

.....

(28)

$$u_w + v_s = c_{ws}^B$$

$$u_w + v_j = c_{wj}^B$$

yazdığımızı kabul edelim. (28) ifadesi  $(m+n)$  tane  $u_\alpha, v_\beta$  değişkenlerinden elde edilen  $(m+n-1)$  denklemleri olan I. dereceden bir denklem sistemidir. Bu sistemi matris formunda yazalım. Öyle ki  $u_\alpha$  değişkenlerini küçükten büyük indekse doğru, aynı şekilde  $v_\beta$  değişkenlerini küçük indeksten büyüğe doğru sıralanmış olarak satırlarının temel çözümdeki  $P_{\alpha\beta}^B$  vektörleri olduğunu görürüz. Böylece katsayılar matrisinin rankı  $(m+n-1)$  olur. Buna göre  $u_\alpha$  ve  $v_\beta$  'lardan birine keyfi bir değer verilerek geri kalan  $(m+n-1)$  tane değer hesaplanabilir. Bu denklem sistemini çözmek gayet basittir. Örneğin  $u_i=0$  alırsak  $v_r=c_{ir}^B$ ,  $u_q=c_{qr}^B-c_{ir}^B$  vs. dir. Bu denklem sisteminden  $m$  tane  $u_\alpha$ ,  $n$  tane  $v_\beta$  elde ederiz. Öyle ki her bir  $u_\alpha$  bir satır ve herbir  $v_\beta$  bir sütuna karşılık gelmektedir.

$u_\alpha, v_\beta$  'ların işin içine katılması ilginç sonuçlar doğurmaktadır. Şöyle ki herhangi bir  $(i,j)$  hücresi için;

$$z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad (29)$$

dir. Yeni hesaplamalar çok daha kolaydır.  $u_\alpha$  ve  $v_\beta$  'ların hepsi hesaplandığı zaman  $z_{ij} - c_{ij}$  'ler (29) eşitliğine göre hesaplanabilir. Bunun ispatı da şu şekildedir:

$$z_{ij} - c_{ij} = c_{ir}^B - c_{qr}^B + \dots - c_{ws}^B + c_{wj}^B - c_{ij}$$

yazabiliriz ve (28) eşitliğinden

$$\begin{aligned} z_{ij} - c_{ij} &= u_i + v_r - u_q - v_r + \dots - u_w - v_s + u_w + v_j - c_{ij} \\ &= u_i + v_j - c_{ij} \end{aligned} \quad (30)$$

elde edilir.

El hesaplaması için tablonun şu şekilde genişletilmesi uygun olur.  $u_a$ 'ları veren bir sütun ve  $v_b$ 'ları veren bir satır eklenir. Bu taktirde  $z_{ij} - c_{ij}$  sayıları aşağıdaki gibi hesaplanabilir. i. satırda u. sütuna hareket ederek  $u_i$ 'yi buluruz ve j. sütunda v. satıra hareket ederek  $v_j$ 'yi buluruz. Bu taktirde  $z_{ij} - c_{ij}$ 'nin değeri (29) ile verilir.

**Örnek 11:** Tablo 6 daki  $z_{ij} - c_{ij}$ 'leri hesaplamak için  $u_i, v_j$ 'leri kullanalım.

Temel çözüme ait fiyatlar  $c_{11}, c_{31}, c_{12}, c_{22}, c_{23}, c_{34}, c_{44}, c_{45}, c_{36}$  dir. Bu durumda çözümlenmesi gereken sistem şudur:

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_1 = c_{11} = 2 & u_1 + v_2 = c_{12} = 1 & u_2 + v_2 = c_{22} = 2 \\ u_2 + v_3 = c_{23} = 2 & u_3 + v_1 = c_{31} = 3 & u_3 + v_4 = c_{34} = 2 \\ u_3 + v_6 = c_{36} = 1 & u_4 + v_4 = c_{44} = 1 & u_4 + v_5 = c_{45} = 2 \end{array}$$

Bu denklem sisteminde daha önce de belirttiğimiz gibi herhangi bir değişkene keyfi bir değer verilmelidir. Eğer  $u_1 = 0$  kabul edersek:

$v_1 = 2, v_2 = 1, u_2 = 1, v_3 = 1, u_3 = 1, v_4 = 1, u_4 = 0, v_5 = 2, v_6 = 0$  elde edilir. Bu değerler kullanılarak Tablo 15 şu şekilde düzenlenir.

**Tablo 16. Atmala Taşı Yöntemi Tablosu**

	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>4</sub>	D <sub>5</sub>	a <sub>i</sub>	
O <sub>1</sub>	2	1	3	3	2	5	50	0
	20	30	-2	-2	0	-5		
O <sub>1</sub>	3	2	2	4	3	4	40	1
		20	20	-2	0	-3		
O <sub>1</sub>	3	5	4	2	4	1	60	1
	10	-3	-2	39	-1	11		
O <sub>1</sub>	4	2	2	1	2	2	31	0
	-2	-1	-1	1	30	-2		
b <sub>j</sub>	30	50	20	40	30	11	181	
	2	1 1	1	2	0			

Örneğin  $z_{32}-c_{32}$  hesaplanırken  $u_3=1, v_2=1, c_{32}=5$  tir.

$$z_{32}-c_{32}=u_3+v_2-c_{32}$$

$$z_{32}-c_{32}=1+1-5=-3 \text{ tür.}$$

Tablo 16'teki  $z_{ij}-c_{ij}$  değerlerini Tablo 6'da elde edilen değerlerle kontrol edebiliriz.

Bu metot atmala taşı tekniğinden daha kısa bir zamanda sonuca ulaştırır. Özellikle büyük tablolar için bu metodu kullanmak daha akıllıcadır. Ayrıca bu yöntemdeki hesaplamalarda hata yapılması olasılığı en aza indirgenmiştir.

Yukarıda tanımlanan  $u_i, v_j$ 'ler transport probleminin dualinin değerlerinden başka birşey değildir. (2), (3) ve (4) ün dualini alırsak;

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$\max Z = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

yazabiliriz, burada  $u_i$  ve  $v_j$ 'lerin işaretleri sınırlandırılmış değildir. Dual problemin (m.n) kısıtı ve (m+n) değişkeni vardır.

(28) den elde edilen dual değişkenlerin değerleri, eğer esas problemin optimal çözümünü değilse dual kısıtları sağlamaz. Eğer  $x_{ij} > 0$  ise  $u_i + v_j = c_{ij}$  olduğu aşıkardır. Öyle ki tamamlayıcı slackness şartı daima sağlanır. Dual değişkenler (28) deki (m+n-1) denklemden tek türlü belirlenemezler, çünkü primalin m+n kısıtından bir tanesi indirgenebilir. Bu indirgenen kısıta karşı gelen bir dual değişken vardır.

### II.13. BİR TRANSPORT PROBLEMİNDE EŞİTSİZLİK KISITLARI

Aşağıdaki şekliyle verilen transport problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i & i=1,2,3, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\leq b_j & j=1,2,3, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (31)$$

$x_{ij} \geq 0$  Her i,j için

$$\min Z = \sum c_{ij} x_{ij}$$

İlk m kısıtta eşitlik işareti yerine  $\leq$  işareti vardır. Bu yazılışın anlamı, kaynaklarda hedeflerde istenilenden daha fazla miktarda ürün vardır.

Eşitsizlikleri m tane yapay değişken ekleyerek eşitliklere çevrilir. Bu yapay değişkenler  $x_m$  ( $i=1,2,3, \dots, m$ ) olsun. Bu durumda kısıtlar şu şekilde olur:

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} + x_{in} = a_i \quad i=1,2,3, \dots, m \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1,2,3, \dots, n-1 \quad (33)$$

(32) ve (33) eşitliklerinden şu sonuca ulaşılabilir.

$$\sum_{i=1}^m x_{in} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_j = b_n \quad (34)$$

Dikkat edilirse yapay değişkenlerin toplamı sabit kalmaktadır ve değeri, kaynaklardaki toplam ürün ile hedeflerde istenen toplam ürünün farkına eşittir. Bu fark  $b_n$  olsun. (34) ü (33) e eklersek eşitsizlik problemini (2), (3) ve (4) ile belirttiğimiz probleme indirgemiş oluruz. Tabloyu belirlemek için bir sütun daha eklenmelidir. Yani yapay değişkenler için ek hedef sütunu yazmamız gereklidir. Doğal olarak yapay değişkenler için maliyetler ( $c_{in}$ ) 0 kabul edilir.

(31) denklemleri yerine aşağıdaki problemi dikkate alalım.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1,2,3, \dots, (m-1) \quad (35)$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} x_{ij} \geq b_j \quad j=1,2,3, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\forall i,j \text{ için, } \max Z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$x_{mj}$  ( $j=1,2,3, \dots, n$ ) surplus değişkenleri ekleyelim.

$$-\sum_{j=1}^n x_{mj} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^{m-1} a_i = a_m \leq 0 \quad (36)$$

elde ederiz. Böylece (35) kısıtları aşağıdaki denklemlere dönüşür.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1,2,3,\dots,(m-1)$$

$$-\sum_{j=1}^n x_{mj} = a_m \quad (37)$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} x_{ij} - x_{mj} \quad j=1,2,3,\dots,n$$

Burada surplus değişkenlerin katsayıları 1 değil de -1 olduğu için yeni bir problem ortaya çıkmaktadır. Katsayılar matrisinin minörlerinin hepsinin değerlerinin  $\pm 1,0$  olduğu gösterilebilir. Bunların bulunması öncekiler gibidir. Yalnız burada  $x_{mj} - c_{mj}$  yi hesaplamak için  $z_{mj} = -u_m - v_j$  kullanılır. Bu da dualden kolayca bulunur. Elimizdeki bu problemi çözmek için tabloya bir satır eklenmelidir. Yani toplam surplus negatif olan bir kaynak eklemeliyiz. Bu durumda da daha önce anlatılanlara benzer şekilde sonuca ulaşıılır.

Eğer bütün maliyetler pozitif ise, aşığıda yazdığımız problemi gözönüne alalım.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i=1,2,3,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} x_{ij} \geq b_j \quad j=1,2,3,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

(38)

Her  $i,j$  için  $\max$  veya  $\min Z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$

Bu problemin optimal çözümünde

- Eğer  $z$  minimize edilecekse, hedef kısıtların hepsinde kesin eşitlik sağlanır.
- Eğer  $z$  maksimize edilecekse, kaynak kısıtların hepsinde kesin eşitlik sağlanır.

Bunun da anlamı şudur: Eğer maliyet minimum yapılacaksa gereğinden daha fazla mal sevk edilmeyecektir ve eğer maliyet maksimum yapılacaksa yapılabilecek en fazla taşıma yapılacaktır.

Eğer transport problemi (2), (3) ve (4) formları tarzında verilmişse bir optimal çözümlü  $x_{ij}$  leri değiştirmeden herbir  $c_{ij}$  yi  $c_{ij} + \lambda$  ( $\lambda$  sabit) ile yer değiştirebiliriz. Çünkü  $c_{ij}$  lerin yerine  $c_{ij} + \lambda$  ların yerleştirilmesi objektif fonksiyonun değerini yalnız sabit olan  $\lambda \sum_{i=1}^m a_i$  değeri kadar değiştirir.



## III. BÖLÜM

### GENELLEŞTİRİLMİŞ TRANSPORT PROBLEMLERİ

#### III.1. Genelleştirilmiş Transport Problemlerinin Yapısı

Aşağıdaki şekilde bir lineer programlama problemi düşünelim. Aşağıdaki kısıtları gerçekleyen [4]

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \pm x_{si} = a_i \quad a_i > 0 \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (39)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad b_j > 0 \quad j=1,2,3,\dots,n \quad (40)$$

$$Z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \quad (41)$$

lineer formunu maksimize veya minimize eden  $x_{ij} \geq 0$  ve  $x_{si} \geq 0$  değerlerini bulmak istiyoruz.  $x_{si}$  slack veya surplus değişkeni olarak düşünülebilir. Bu lineer programlamanın transport probleminden farkı (39) eşitliğindeki  $x_{ij}$  lerin katsayılarının 1'den farklı olmasıdır.  $x_{ij}$  lerin katsayıları  $d_{ij}$  lerdir. Bu tip problemlerle pratikte birçok yerde karşılaşılabilir.

(39), (40) ve (41) eşitliklerinde lineer programlama problemini çözmek için simpleks metot kullanılabilir. Fakat bu problemde daha kısa bir çözüm algoritması elde edilebilir. Bu algoritma daha önce dediğimiz transport problemlerinin çözümü için geliştirilen uv-algoritmasının modife edilmesiyle elde edilir.

(39), (41) şeklindeki problemlere genelleştirilmiş transport problemleri denir. (39) kısıtları çok sık ortaya çıkarlar. (39) eşitliği kaynak kısıtlarını, (40) eşitliği ise tüketim kısıtlarını ifade etmektedir.

Transport problemleri ile genelleştirilmiş taransport problemleri arasında birkaç önemli fark vardır. Her şeyden önce (39) ve (40) eşitliklerindeki  $x_{ij}$  lerin katsayılarının oluşturduğu matrisin rankı genel olarak  $(m+n-1)$  olmayıp  $(m+n)$  dir. Yani bütün kısıtlar bağımsızdır. Aşağıda bu matrisin rankının  $(m+n)$  olduğunu kabul edeceğiz. Ayrıca, genelleştirilmiş transport probleminde  $y_{ij}^{ab}$  değerleri  $\pm 1, 0$  dan farklı değerler de olabilir. Buradan da bölmenin elimine edilemeyeceği anlamı çıkar. Bu yüzden optimal temel çözümün tamsayı özelliği bu durumda geçerli değildir.  $a_i$ ,

$b_j$  ler tamsayı olsalar da bir optimal temel çözüm  $x_{ij}$  lerin tamsayı olmayan değerlerini bulundurabilir.

Bu problem için değişkenler ve kısıtlar (5) ve (6) eşitliğinde olduğu gibi düzenlenirse  $x_{ij}$  ye karşılık gelen vektör olan  $P_{ij}$

$$P_{ij}=d_{ij}e_i+e_{m+ij} \quad (42)$$

şeklinde yazılabilir.  $x_{si}$  ye karşılık gelen vektör ise  $\pm e_i$  dir.

$P_{\alpha\beta}^B$  ile verilen temel çözümdeki herhangi bir  $(m+n)$  tane aktivite vektörünü gösterelim. Herhangi bir  $P_{ij}$  vektörü

$$P_{ij}=\sum_{\alpha\beta} y_{ij}^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}^B \quad (43)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer  $B$ ,  $P_{\alpha\beta}^B$  yi içeren temel matris ise  $P_{ij}=By_{ij}$  dir. Eğer (41) eşitliğindeki  $z$  minimum yapılmak istenirse (39)-(41) eşitliklerinin duali şu şekildedir:

$$d_{ij}u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i=1,2,3, \dots, m \quad j=1,2,3, \dots, n \quad (44)$$

$$\pm u_i \leq 0 \quad i=1,2,3, \dots, m \quad (45)$$

$$\max Z = \sum_{i=1}^m a_i + u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \quad (46)$$

(45) eşitsizliği yapay veya surplus değişkenlerinden gelir. Slack değişken için işaret (+), surplus değişken için (-) işaret kullanılır.

Primalin herhangi bir temel uygun çözümü için  $c_{\alpha\beta}^B$  'ler primal tabandaki fiyatları gösterebilir. Bu durumda  $m$  tane  $u_\alpha$ ,  $n$  tane  $v_\beta$  aşağıdaki  $(m+n)$  denklemler sistemin çözümlerini gözönüne alalım.

$$d_{\alpha\beta} u_\alpha + v_\beta = c_{\alpha\beta}^B$$

$$u_\alpha = 0 \quad (m+n) \text{ denklemler} \quad (47)$$

$u_\alpha = 0$  şeklinde bir denklemin ortaya çıkması  $x_{s\alpha}$  değişkeninin primal tabanda olması anlamına gelir.  $u_\alpha$ ,  $v_\beta$  leri bir satır vektörü olarak

$(u,v)=(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$  şeklinde ifade edebiliriz. Buradan,

$$(u,v)=c_B B^{-1}$$

$$= d_{ij}u_i + v_j - c_{ij} \quad (\forall i,j \text{ için}) \quad (48)$$

ve buradan

$$z_{it} - c_{it} = (\vec{u}, \vec{v}) \cdot (\pm \vec{e}_i) = \begin{cases} u_i, & \text{slack değişken} \\ -u_i, & \text{surplus değişken} \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

### III.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ TRANSPORT PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Genelleştirilmiş Transport Problemlerinin çözüm tablosu transport problemlerinin çözüm tablosuna benzerdir. (Tablo 16) Ancak (i,j) hüccresinde  $c_{ij}$  'lere ilaveten  $d_{ij}$  'ler de yer almaktadır. i. satırı  $R_i$  ve j. sütunu  $P_j$  ile gösterilir.  $x_{ij}$  'leri  $d_{ij}$  lerle çarpıp tüm satırdaki sonuçlar toplanarak  $R_i$  satırı için  $a_i$  elde edilir.  $P_j$  deki  $x_{ij}$  'leri toplarsak  $b_j$  elde edilir. Bu tabloda slack veya surplus sütununa ait değişkenleri toplarsak transport problemi için toplam slack veya surplusların konstant kalması gerekmez. Ayrıca  $\sum a_i = \sum b_j$  olması da gerekli değildir.

Tablo 17. Genelleştirilmiş Transport Problemi Tablosu

	$P_1$		$P_2$			$P_m$		Yapay değişken	$a_i$	$u_i$	
$R_1$	$c_{11}$	$x_{11}$	$c_{12}$	$x_{12}$	....	$c_{1n}$	$x_{1n}$	0	$x_{s1}$	$a_1$	$u_1$
	$d_{11}$		$d_{12}$			$d_{1n}$		1			
$R_2$	$c_{21}$	$x_{21}$	$c_{22}$	$x_{22}$	....	$c_{2n}$	$x_{2n}$	0	$x_{s2}$	$a_2$	$u_2$
	$d_{21}$		$d_{22}$			$d_{2n}$		1			
	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
$R_m$	$c_{m1}$	$x_{m1}$	$c_{m2}$	$x_{m2}$	....	$c_{mn}$	$x_{mn}$	0	$x_{sm}$	$a_m$	$u_m$
	$d_{m1}$		$d_{m2}$			$d_{mn}$		1			
$b_j$	$b_1$		$b_2$		....	$b_n$					
$v_j$	$v_1$		$v_2$			$v_n$					

Başlangıç uygun çözümün bulunması transport probleminde olduğu gibidir.  $(m+n)$  tane pozitif  $x_{ij}$  bulunduran herhangi tek türlü belirli uygun çözüm bir temel uygun çözüm olur.

Daha önce anlatılan bütün metotlar temel uygun çözüm bulmak için kullanılabilir. Fakat herhangi bir kaynak kısıtı söz konusu olduğunda  $x_{ij}$  yerine  $d_{ij}x_{ij}$  kullanılmalıdır. Eğer herhangi bir temel uygun çözüm varsa, bunu suni değişkenler ekleyerek elde edebiliriz.

Genelleştirilmiş transport probleminin temel çözümüne karşılık gelen hücrelerinin bir ağaç oluşturması gerekli değildir. Temel hücrelerde bir çevrim oluşması mümkündür. Ayrıca çevrimdeki vektörlerin lineer bağımlı olmaları gerekmez. Ve de temel çözümdeki hücrelerin bir bağımlı graf oluşturmaları gerekli değildir.

Bir temel bir çözüm bulduktan sonra, bunun optimal olup olmadığını anlamak için  $z_{ij} - c_{ij}$ 'ler hesaplanmalıdır. Önce (47) deki denklemler çözülerek  $u_\alpha, v_\beta$ 'lar hesaplanır. Sonradan (48) i kullanarak  $z_{ij} - c_{ij}$ 'ler bulunur. Böylece (47) denklemlerini kolayca arka arkaya çözebiliriz.  $u_\alpha, v_\beta$ 'lar (47) yardımıyla tek türlü belirlidir. O halde bunlardan birine veya birkaçına keyfi değerler vermek mümkün değildir.

Minimize yapılmak istenen  $z$  için temel çözümün optimal olmadığını kabul edelim. Bu durumda temele girecek  $p_{st}$  vektörü  $z_{st} - c_{st} = \max(z_{ij} - c_{ij}), z_{ij} - c_{ij} > 0$  dan hesaplanır. Temelden çıkacak olan vektörü bulmak için  $y_{st}^{\alpha\beta}$  hesaplanmalıdır. Bunu yapmak için (43) denklemlerini çözmek yeterlidir. Ayrıca  $y_{st}^{\alpha\beta}$  yi tabloda  $(s,t)$  hücresi ve temel hücreleri içeren bir çevrim bularak da hesaplanabilir. Fakat bu iş daha önce olduğu kadar kolay olmayabilir.

Temel çözümden ayrılacak olan  $p_{qr}$  vektörü simpleks yöntemde şu şekilde bulunur:

$$\frac{x_{qr}^B}{y_{st}^{\alpha\beta}} = Q = \min \left\{ \frac{x_{\alpha\beta}^B}{y_{st}^{\alpha\beta}} \right\}, \quad y_{st}^{\alpha\beta} > 0 \quad (49)$$

Yeni temel uygun çözüm, kolaylıkla  $x_{st}=Q$  ve  $x_{qr}=0$  olarak ve ayrıca tabloda uygun ayarlamalar yapılarak elde ediliyordu. Ayrıca yeni temel değişkenler aşağıdaki transformasyon formüllerinden elde ediliyordu.

$$\hat{x}_{\alpha\beta}^B = x_{\alpha\beta}^B - Q y_{st}^{\alpha\beta} \quad (50)$$

$$\hat{x}_{st} = 0$$

## IV. BÖLÜM

### TAŞIMALI İLKÖĞRETİM UYGULAMASI

#### IV.1. TAŞIMALI İLKÖĞRETİM UYGULAMASI VE AMACI

Taşımali ilköğretim ilk kez 1989-1990 eğitim-öğretim yılında nüfusu az ve dağınık olan yerleşim birimlerinde, birleştirilmiş sınıf uygulaması yapan okullarda öğrenim gören öğrencileri fırsat eşitliğinden yararlandırmak ve daha nitelikli öğrenim olanağı sağlamak amacıyla başlatılmıştır.

4306 sayılı Yasa gereğince; yaşadığı yerleşim biriminde ilköğretim okulu bulunmayan 6., 7., 8. sınıf öğrencileri için taşımali ilköğretim uygulamasının yaygınlaştırılması ve çağ nüfusunun zorunlu ilköğretimden geçirilmesi kararlaştırılmıştır.

İl millî eğitim müdürlükleri, taşımali ilköğretim yönergesinde belirtilen esaslar doğrultusunda taşımali ilköğretimi plânlamakta ve ödenek gereksinimini Millî Eğitim Bakanlığına bildirmektedir.

1989 yılında başlayan bu uygulama daha sonraki yıllarda da devam etmiş ve uygulama yapılan illerin sayısı artmıştır. Günümüzde ise halen İstanbul, Ankara, İzmir gibi büyük şehirlerde de olmak üzere 73 ilde Taşımali İlköğretim Projesi devam etmektedir.

Aşağıdaki tabloda 1999-2000 Eğitim-Öğretim yılında Taşımali İlköğretim yapılan iller ve taşınan öğrenci sayıları verilmektedir. [9]

**Tablo 18. 1999-2000 Öğretim Yılında Taşımali İlköğretim Uygulaması  
Yapılan Okul ve Öğrenci Sayısı**

İLLER	TAŞIMALI EĞT. UYG. YAPILAN İLÇE SAYISI	TAŞINAN MERKEZ OKUL SAYISI	TAŞINAN OKUL SAYISI	TAŞINAN ÖĞRENCİ SAYISI						
				TOPLAM			1-5. SINIFLAR		6-8. SINIFLAR	
				Toplam	Erkek	Kız	Erkek	Kız	Erkek	Kız
ADANA	13	119	339	12 375	6 713	5 662	2 979	2 713	3 734	2 949
ADYAMAN	9	77	377	9 372	5 952	3 420	1 449	1 072	4 503	2 348
AFYON	18	90	285	8 390	3 972	4 418	1 110	1 046	2 862	3 372
AĞRI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AMASYA	7	59	256	9 423	5 330	4 093	2 228	1 616	3 102	2 477
ANKARA	23	134	597	12 118	6 288	5 830	3 218	3 279	3 070	2 551
ANTALYA	15	130	556	15 986	8 088	7 898	3 913	3 760	4 175	4 138
ARTVİN	8	38	102	2 780	1 407	1 373	954	883	453	490
AYDIN	17	159	488	14 667	7 785	6 882	2 997	2 877	4 788	4 005
BALIKESİR	19	161	762	22 015	11 534	10 481	5 774	5 500	5 760	4 981
BİLECİK	8	26	229	4 322	2 269	2 053	1 352	1 299	917	754
BİNGÖL	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BİTLİS	3	9	31	638	475	163	113	51	362	112
BOLU	15	104	879	20 714	10 858	9 856	6 531	6 117	4 327	3 739
BURDUR	11	48	197	5 147	2 654	2 493	1 295	1 359	1 359	1 134
BURSA	16	139	563	18 930	10 178	8 752	5 841	5 370	4 337	3 382
ÇANAKKALE	11	96	528	12 747	6 746	6 001	3 984	3 647	2 762	2 354
ÇANKIRI	11	34	279	3 613	1 987	1 626	619	625	1 368	1 001
ÇORUM	14	87	574	10 414	5 903	4 511	994	977	4 909	3 534
DENİZLİ	19	136	332	12 764	6 701	6 063	3 520	3 459	3 181	2 604
DİYARBAKIR	9	31	228	5 278	4 386	892	2 058	535	2 328	357
EDİRNE	9	74	153	5 588	2 859	2 729	1 450	1 310	1 409	1 419

ELAZIĞ	10	37	216	3 099	1 878	1 221	657	564	1 246	814
ERZİNCAN	6	34	134	1 880	1 051	829	321	257	730	572
ERZURUM	19	77	521	7 188	4 740	2 448	201	140	4 539	2 308
ESKİŞEHİR	13	63	307	5 812	3 140	2 672	1 638	1 540	1 502	1 132
GAZİANTEP	9	68	285	11 021	6 888	4 133	2 840	2 049	4 048	2 084
GİRESUN	16	83	325	11 114	5 721	5 393	2 885	2 830	2 836	2 563
GÜMÜŞHANE	5	26	58	1 413	786	627	386	342	400	285
HAKKARİ	2	2	8	819	541	278	460	260	81	18
HATAY	12	91	230	9 363	5 278	4 085	1 983	1 547	3 295	2 538
ISPARTA	13	67	164	4 602	2 355	2 247	1 072	1 110	1 283	1 137
İÇEL	10	138	346	15 396	7 889	7 507	4 376	4 274	3 513	3 233
İSTANBUL	8	35	56	6 872	3 664	3 208	1 622	1 550	2 042	1 658
İZMİR	23	144	503	15 327	8 002	7 325	3 706	3 398	4 296	3 927
KARS	8	45	173	4 106	2 381	1 725	307	261	2 074	1 464
KASTAMONU	19	72	583	9 137	4 872	4 265	2 316	2 238	2 556	2 027
KAYSERİ	16	54	172	6 237	3 333	2 904	1 135	1 047	2 198	1 857
KIRKLARELİ	8	52	124	3 312	1 753	1 559	724	685	1 029	874
KIRŞEHİR	7	47	239	4 871	2 313	2 558	1 229	1 368	1 084	1 190
KOCAELİ	6	65	388	11 235	6 187	5 048	3 182	2 924	3 005	2 124
KONYA	13	194	579	20 336	11 021	9 315	5 449	5 068	5 572	4 247
KÜTAHYA	13	91	426	10 030	5 212	4 818	2 394	2 348	2 818	2 470
MALATYA	14	95	290	7 362	3 983	3 379	1 195	1 122	2 788	2 257
MANİSA	16	157	764	20 616	10 730	9 886	4 895	4 738	5 835	5 148
K.MARAŞ	10	115	576	13 683	7 485	6 198	2 998	2 541	4 487	3 657
MARDİN	6	25	100	1 373	898	475	212	135	686	340
MUĞLA	12	131	346	13 961	7 292	6 669	3 081	3 330	4 211	3 339
MUŞ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

NEVŞEHİR	8	50	65	2 702	1 472	1 230	438	392	1 034	838
NİĞDE	5	23	83	2 832	1 529	1 303	436	377	1 093	926
ORDU	19	131	515	14 141	7 585	6 556	2 647	2 380	4 938	4 176
RİZE	12	86	352	9 282	4 869	4 413	2 870	2 642	1 999	1 771
SAKARYA	12	110	537	15 383	8 640	6 743	3 883	3 264	4 757	3 479
SAMSUN	15	145	496	17 260	9 259	8 001	1 808	1 668	7 451	6 333
SIİRT	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SİNOP	9	39	205	3 841	2 028	1 813	757	718	1 271	1 095
SİVAS	14	67	496	8 460	4 761	3 699	1 694	1 412	3 067	2 287
TEKİRDAĞ	9	74	217	7 259	3 732	3 527	1 840	1 711	1 892	1 816
TOKAT	12	113	400	9 573	5 143	4 430	1 980	1 778	3 163	2 652
TRABZON	17	152	428	16 726	8 842	7 884	4 305	4 067	4 537	3 817
TUNCELİ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ŞURFA	9	50	482	9 665	7 557	2 108	2 865	901	4 692	1 207
UŞAK	6	57	209	5 348	2 793	2 555	1 467	1 403	1 326	1 152
VAN	9	32	232	3 853	3 001	852	223	56	2 778	796
YOZGAT	13	102	117	9 754	5 526	4 228	1 166	1 002	4 360	3 226
ZONGULDAK	6	93	500	18 357	9 454	8 903	4 263	3 887	5 191	5 016
AKSARAY	7	15	14	4 433	2 386	2 047	689	634	1 697	1 413
BAYBURT	3	17	80	2 393	1 370	1 023	657	621	713	402
KARAMAN	6	39	108	3 514	1 972	1 542	823	655	1 149	887
KIRIKKALE	9	16	147	2 547	1 356	1 191	698	634	658	557
BATMAN	2	2	15	872	634	238	534	216	100	22
ŞIRNAK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BARTIN	4	41	391	10 354	5 635	4 719	4 197	2 657	1 438	2 062
ARDAHAN	6	36	151	3 850	2 348	1 502	494	310	1 854	1 192
İĞDIR	2	10	21	339	268	71	50	7	218	64

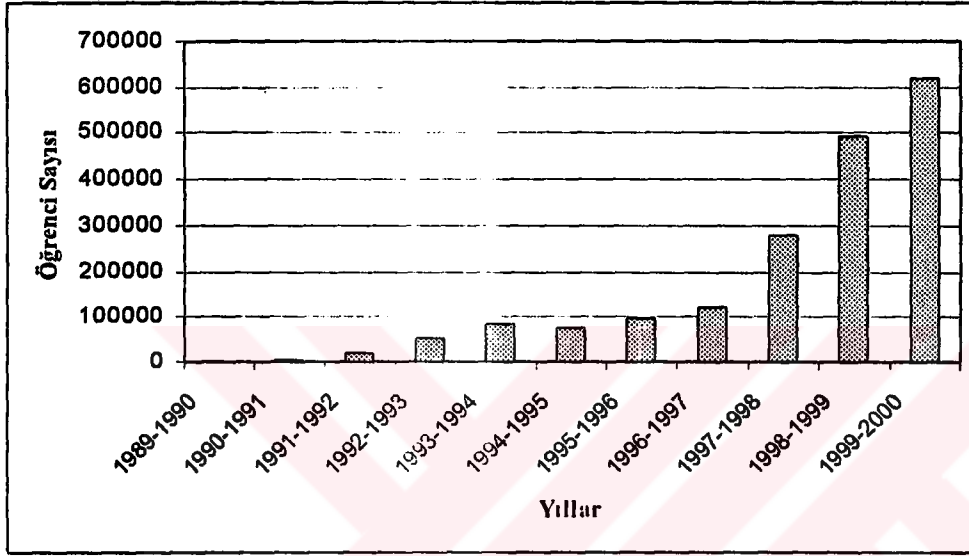
YALOVA	6	19	37	1 310	692	618	350	317	342	301
KARABÜK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
KİLİS	4	9	124	2 562	1 539	1 023	649	541	890	482
OSMANİYE	7	54	192	5 268	2 898	2 370	1 140	1 004	1 758	1 366
TÜRKİYE TOPLAMI	780	5 341	22 282	619 324	338 767	280 557	146 566	130 415	192 226	150 299

**Tablo 19. 1999-2000 Eğitim Öğretim Yılında İstanbul İli İlçelerinde Taşınalı İlköğretim Uygulaması Yapılan Okullar ve Öğrenci Sayısı<sup>2</sup>**

TAŞIMALI EĞİTİM UYGULANAN İLÇENİN ADI	TAŞINAN MERKEZ OKUL SAYISI	TAŞINAN OKUL SAYISI	TAŞINAN ÖĞRENCİ SAYISI
AVCILAR	2	2	3355
BEYKOZ	3	17	404
BÜYÜKÇEKMECE	1	1	49
ÇATALCA	12	12	1030
EYÜP	1	7	225
PENDİK	1	1	26
SİLİVRİ	7	10	633
ŞİLE	4	6	978

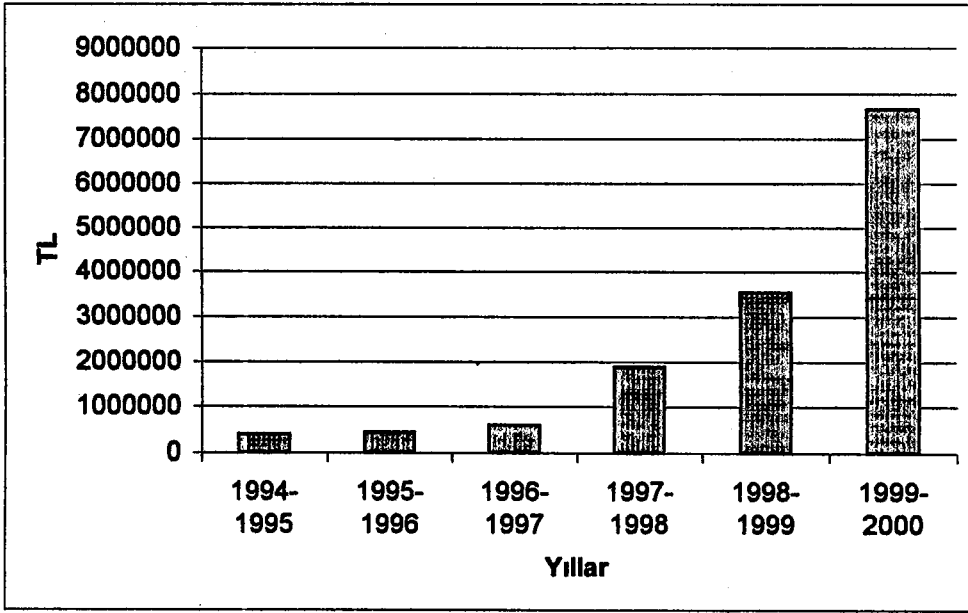
1999-2000 öğretim yılında 22.282 okulun 619.324 öğrencisi, 5.341 merkez okula taşınmaktadır.

Taşınmalı ilköğretim uygulamasının başladığı günden bugüne kadar geçen 11 yıllık sürede; 1989'da 305, 1990'da 3.289, 1991'de 18.256, 1992'de 53.676, 1993'de 84.263, 1994'de 74.981, 1995'de 95.554, 1996'da 120.998, 1997'de 281.833, 1998'de 492.975 ve 1999'da 619.324 öğrenci merkez okullara taşınmıştır. (Grafik 1)



**Grafik 1. Taşınmalı İlköğretim Uygulamasında Yıllara Göre Sayısal Veriler**

1999-2000 öğretim yılında taşınmalı ilköğretim uygulaması maliyeti 76 trilyon 599 milyar 845 milyon 997 bin lira olarak öngörülmektedir. (Grafik 2)



**Grafik 2. Taşımali İlköğretim Uygulamasında Ödenek Durumu**

#### IV.2. TRANSPORT PROBLEMİ UYGULAMASI

Bu uygulamada;

Merkez Okullar  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

Taşınan okullar (kasabalar) ise  $K_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ )

sembolleriyle gösterilmektedir.

$j$ . kasabadan  $i$ . okula ulaşım masrafı  $c_{ij}$  ile ve

$j$ . kasabadan  $i$ . okula gönderilen öğrenci sayısı  $x_{ij}$  ile gösterilmektedir.

Problemdeki veriler ise şu şekildedir.

( $C_{ij}$ 'ler TL cinsindedir.)

$c_{11} = 300000$	$c_{12} = 600000$	$c_{13} = 350000$
$c_{14} = 460000$	$c_{15} = 510000$	$c_{16} = 700000$
$c_{21} = 500000$	$c_{22} = 200000$	$c_{23} = 320000$
$c_{24} = 350000$	$c_{25} = 460000$	$c_{26} = 900000$
$c_{31} = 650000$	$c_{32} = 300000$	$c_{33} = 450000$

$$\begin{array}{lll}
c_{34} = 500000 & c_{35} = 650000 & c_{36} = 360000 \\
c_{41} = 900000 & c_{42} = 450000 & c_{43} = 600000 \\
c_{44} = 350000 & c_{45} = 550000 & c_{46} = 600000
\end{array}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 300$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} = 160$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} = 213$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 305$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 128$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 190$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 210$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 145$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 165$$

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} = 140$$

Amaç fonksiyonumuz ise;

$$\min Z = \sum_j c_{ij} x_{ij} \text{ dir.}$$

Bu verileri kullanarak aşağıdaki tabloyu (Tablo 20) oluşturabiliriz.

**Tablo 20**

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.
O <sub>1</sub>	300000	600000	350000	460000	510000	700000	300
O <sub>2</sub>	500000	200000	320000	350000	460000	900000	160
O <sub>3</sub>	650000	300000	450000	500000	650000	360000	213
O <sub>4</sub>	900000	450000	600000	350000	550000	600000	305
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978

Yukarıdaki soru için VAM yöntemini uygulayalım.

VAM yöntemine göre bütün satır ve sütunlar için en küçük iki maliyet bulunup aralarındaki farklar satır ve sütunlar için ayrı ayrı tabloya yazılırsa Tablo 21 elde edilir.

**Tablo 21**

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.	
O <sub>1</sub>	300000	600000	350000	460000	510000	700000	300	50000
O <sub>2</sub>	500000	200000	320000	350000	460000	900000	160	120000
O <sub>3</sub>	650000	300000	450000	500000	650000	360000	213	60000
O <sub>4</sub>	900000	450000	600000	350000	550000	600000	305	100000
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978	

200000    100000    30000    0    50000    240000

En büyük fark altıncı sütundadır. O halde bu sütunda bulunan minimum maliyetli gözeye yapılabilecek en fazla atama yapılmalıdır. O hücre de  $x_{36}$  hücresidir.  $x_{36}$ 'ya  $\min(213,140) = 140$  ataması yapılır.

O halde  $x_{36} = 140$  tır.

$K_6$ 'nın isteği yerine getirilmiş olduğundan bu sütun artık bundan sonraki işlemlerde hesaba katılmayacaktır. Bundan sonraki tablolarda işlemde çıkan sütun veya satırlar koyu olarak gösterilecektir. Bu adımdan sonra Tablo 22'yi elde ederiz.

**Tablo 22**

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.	Sütun Cezası
O <sub>1</sub>	300000	600000	350000	460000	510000	700000	300	50000
O <sub>2</sub>	500000	200000	320000	350000	460000	900000	160	120000
O <sub>3</sub>	650000	300000	450000	500000	650000	860000	213	150000
O <sub>4</sub>	900000	450000	600000	350000	550000	600000	305	100000
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978	
Satır Cezası	200000	100000	30000	0	50000	0		

Tablo 22'de 1. sütun için fark en büyüktür. O halde 1. sütundaki en düşük maliyetli gözeye uygun atama yapılmalıdır. Bu sütundaki en düşük maliyetli göze  $x_{11}$  hücresidir. Bu hücreye yapılacak atama ise,

$$\min(128,300) = 128 \text{ dir.}$$

O halde  $x_{11} = 128$  ataması yapılarak yeni tabloyu oluşturabiliriz. 1. sütun bundan sonraki işlemlerde hesaba katılmayacaktır. Çünkü bu sütunun isteği artık yerine getirilmiş durumdadır. Oluşacak yeni tablo aşağıdaki gibidir.

**Tablo 23**

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.	Sütun Cezası
O <sub>1</sub>	300000 128	600000	350000	460000	510000	700000	300	110000
O <sub>2</sub>	500000	200000	320000	350000	460000	900000	160	120000
O <sub>3</sub>	450000	300000	450000	500000	650000	560000 140	213	150000
O <sub>4</sub>	900000	450000	600000	350000	550000	600000	305	100000
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978	
Satır Cezası	0	100000	30000	0	50000	0		

Yukarıdaki tabloda satır ve sütun cezaları arasında en büyüğü 3. satırdadır. Bu satırdaki en düşük maliyetli göze ise 300000 dir. O halde yeni atamamızı  $x_{32}$  hücresine yapılmalıdır. Bu hücre için yapılacak atama değeri,

$$\min(190, 213 - 140) = \min(190, 73) = 73 \text{ dir.}$$

Bu durumda  $x_{23} = 73$  olmalıdır. Bu adımda (213-140) yazılmasının sebebi daha önceki adımda  $x_{36}$  hücresine 140 birimlik atama yapılmasıdır. Yani bu adımda 3. satıra ancak 73 birimlik bir atama yapılır ve bu satır bundan sonraki işlemlerde hesaba katılmaz. Bu değer tabloda yerine yazılırsa Tablo 24 şu şekilde oluşur.

Tablo 24

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.	Sütun Cezası
O <sub>1</sub>	300000 128	600000	350000	460000	510000	700000	300	110000
O <sub>2</sub>	400000	200000	320000	350000	460000	900000	160	120000
O <sub>3</sub>	650000	300000 73	450000	500000	650000	360000 140	213	0
O <sub>4</sub>	700000	450000	600000	350000	550000	800000	305	100000
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978	
Satır Cezası	0	250000	30000	0	50000	0		

Tablo 24'te satır ve sütunlar için en büyük ceza 2. sütundaki 250000 dir. O halde 2. sütundaki minimum maliyetli göze olan  $x_{22}$  hücresine atama yapılmalıdır. Bu değer,  $\min(190-73,160) = 117$

(190-73) yazılmasının sebebi ise bundan önceki adımda  $x_{32}$  ye 73 değeri verilerek K<sub>2</sub>'nin isteği olan 190 öğrenciden 73'nün sağlanmış olmasıdır.

$x_{22}=117$  değeri tabloda yerine yazılırsa ikinci sütunun şartı sağlanmış olduğundan bu sütun bir daha hesaba katılmaz. Oluşacak yeni tablo şu şekilde olur.

**Tablo 25**

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstene: Öğr. Say.	Sütun Cezası
O <sub>1</sub>	300000	600000	350000	460000	510000	700000	300	110000
O <sub>2</sub>	500000	300000	320000	350000	460000	900000	160	30000
O <sub>3</sub>	650000	500000	450000	500000	650000	360000	213	0
O <sub>4</sub>	900000	450000	600000	350000	550000	800000	305	200000
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978	
Satır Cezası	0	0	30000	0	50000	0		

Tablo 25’de en büyük satır veya sütun cezası 4. satırdaki 200000’dür. Bu satırdaki en düşük maliyetli göze ise  $x_{44}$  tür. Bu göze yapılacak olan değer,

$$\min(145, 305) = 145 \text{ tir.}$$

$x_{44}$  hücreğine 145 değerini yazılırsa Tablo 26 elde edilir.  $x_{44}$  hücreğine 145 değeri yazıldığında  $K_4$ ’ün şartı yerine getirilmiş olacağı için bundan sonraki adımlarda 4. sütunun hesaba katılmasına gerek yoktur. Yeni oluşacak olan tablo aşağıdaki gibidir.

**Tablo 26**

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.	Sütun Cezası
O <sub>1</sub>	300000 128	500000	350000	450000	510000	700000	300	160000
O <sub>2</sub>	300000	200000 117	320000	330000	460000	300000	160	140000
O <sub>3</sub>	650000	300000 73	450000	500000	650000	360000 140	213	0
O <sub>4</sub>	900000	430000	600000	330000 145	550000	600000	305	50000
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978	
Satır Cezası	0	0	30000	0	50000	0		

Tablo 26'daki satır veya sütunlar için cezalar hesaplandığında en büyük cezanın 160000 olduğu görülür. Atama 1. satırdaki iki boş hücreden minimum maliyetli olana yapılmalıdır. Bu hücre de  $x_{13}$  hücrelidir.  $x_{13}$ 'e yapılacak olan atamanın değeri,  
 $\min(210, 300 - 128) = \min(210, 172) = 172$  dir.

Görüldüğü gibi 1. satıra en fazla 172 değeri yazılabilir. Çünkü daha önceki adımlarda  $x_{11}$  hücrelerine 128 değeri atanmış ve O<sub>1</sub>'in kabul edebileceği öğrenci sayısı  $300 - 172 = 128$ 'e azalmıştı.

$x_{13}$  hücrelerine 172 değeri yazılarak O<sub>1</sub>'in yani 1. satırın isteği yerine getirilmiş olur. Bundan sonraki adımlarda 1. satır hesaba katılmayacaktır. Yeni tablo ise şu şekilde olur:

Tablo 27

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.	Sütun Cezası
O <sub>1</sub>	300000 128	600000 117	350000 172	460000	510000	700000	300	0
O <sub>2</sub>	500000	200000 117	320000	350000	460000	900000	160	140000
O <sub>3</sub>	650000	300000 73	430000	500000	650000	860000 140	213	0
O <sub>4</sub>	900000	430000	600000	350000 145	550000	600000	305	50000
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978	
Satır Cezası	0	0	280000	0	90000	0		

Bu tablodaki satır ve sütunlar içindeki en büyük ceza 280000 dir. O halde atamayı 3. sütuna yapmalıyız. Bu sütundaki atamanın yapılacağı göze ise en düşük maliyetli göze olan  $x_{23}$ 'tür. Bu gözeye yapılacak olan atama değeri:

$$\min(210-172, 160-117) = \min(38, 43) = 38 \text{ olur.}$$

O halde  $x_{23} = 38$  olmalıdır.  $x_{23}=38$  ataması yapıldığında K<sub>3</sub>'ün şartı yerine getirilmiş olur ve artık bu sütuna başka atama yapılmaması gerekir. Bundan sonraki işlemlerde 3. sütun işleminden çıkarılacaktır. Tablo 28 şu şekildedir:

Tablo 28

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.
O <sub>1</sub>	300000	600000	350000	460000	510000	700000	300
	128		172				
O <sub>2</sub>	500000	200000	320000	330000	460000	900000	160
		117	38				
O <sub>3</sub>	630000	300000	430000	500000	630000	660000	213
		73				140	
O <sub>4</sub>	900000	430000	600000	380000	550000	600000	305
				145			
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978

Görüldüğü gibi artık satır ve sütun cezalarını hesaplamaya gerek yoktur. Çünkü atama yapılabilecek sadece iki hücre vardır ve bu hücelere yapılabilecek olan atama değerlerini kolayca hesaplayabiliriz.

O<sub>2</sub>'nin isteğinin yerine getirilmesi için x<sub>25</sub> hücresine bir atama yapılmalıdır. Bu değeri şu şekilde bulabiliriz:

O<sub>2</sub>'nin isteği 160 öğrenciydi ve daha önceki adımlarda x<sub>22</sub>=117 ve x<sub>23</sub>=38 atamaları yapılarak O<sub>2</sub>'nin (117+38) 155 öğrenci isteğini yerine getirmişti. Bu okula sadece 160-155 = 5 öğrenci gönderilmelidir yani x<sub>25</sub>=5 olmalıdır.

Aynı şekilde 4. satırdaki tek boş hücre olan x<sub>45</sub> hücresine hangi değeri atayabileceğimizi bulabiliriz.

O<sub>4</sub>'ün isteği 305 öğrenciydi ve daha önceki adımlarda x<sub>44</sub>=145 ataması yapılarak bu okula 145 öğrenci atanmıştı. x<sub>45</sub> hücresine 305-145 = 160 değeri atanmalıdır.

Tüm okul ve kasabalar için gerekli kısıtlar sağlandığından son tablo şu şekilde oluşur:

**Tablo 29**

	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	İstenen Öğr. Say.
O <sub>1</sub>	300000 128	600000	350000 172	460000	510000	700000	300
O <sub>2</sub>	500000	200000 117	320000 38	350000	460000 5	800000	160
O <sub>3</sub>	650000	300000 73	430000	300000	650000	360000 140	213
O <sub>4</sub>	900000	430000	600000	350000 145	530000 160	600000	305
Kasabadaki Öğr. Say.	128	190	210	145	165	140	978

Bu çözüm  $m+n-1=9$  şartını sağladığı için çözüm temel uygun çözümdür.

Tablo 29'dan çıkarılacak sonuç şudur:

Kasaba 1'den Okul 1'e 128 öğrenci,

Kasaba 3'den Okul 1'e 172 öğrenci,

Kasaba 2'den Okul 2'ye 117 öğrenci,

Kasaba 3'den Okul 2'ye 38 öğrenci,

Kasaba 5'den Okul 2'ye 5 öğrenci,

Kasaba 2'den Okul 3'e 73 öğrenci,

Kasaba 6'dan Okul 3'e 140 öğrenci,

Kasaba 4'ten Okul 4'e 145 öğrenci,

Kasaba 5'ten Okul 4'e 160 öğrenci gönderilmelidir. Bu durumda maliyet

fonksiyonu  $z$  şu değeri alır.

$$z = \sum_j x_{ij} c_{ij}$$

$$Z = x_{11}c_{11} + x_{13}c_{13} + x_{22}c_{22} + x_{23}c_{23} + x_{25}c_{25} + x_{32}c_{32} + x_{36}c_{36} + x_{44}c_{44} + x_{45}c_{45}$$

$$Z = (128 \times 300000) + (172 \times 350000) + (117 \times 200000) + (38 \times 320000) + (5 \times 460000) \\ + (73 \times 300000) + (140 \times 360000) + (145 \times 350000) + (160 \times 550000) = 347.510.000 \text{ TL}$$

Bu çözümün optimal olup olmadığını incelemek için yukarıdaki tabloda atama yapılmayan hücrelerin net değişim maliyetlerinin hesaplanması gereklidir. Bu hesaplama ise her boş hücre için uygun bir çevrim bulunmasıyla yapılır ve bu çevrimdeki değerlere sırası ile (+) ve (-) işaretleri verilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$d_{12} = c_{12} - c_{13} + c_{23} - c_{22} \\ = 600000 - 350000 + 320000 - 200000 = 370000$$

$$d_{14} = c_{14} - c_{44} + c_{45} - c_{25} + c_{23} - c_{13} = \\ = 350000 - 350000 + 550000 - 460000 + 320000 - 350000 = 60000$$

$$d_{15} = c_{15} - c_{25} + c_{23} - c_{13} = \\ = 510000 - 460000 + 320000 - 350000 = 20000$$

$$d_{16} = c_{16} - c_{36} + c_{32} - c_{22} + c_{23} - c_{13} = \\ = 700000 - 360000 + 300000 - 200000 + 320000 - 350000 = 410000$$

$$d_{21} = c_{21} - c_{11} + c_{13} - c_{23} = \\ = 500000 - 300000 + 350000 - 320000 = 230000$$

$$d_{24} = c_{24} - c_{25} + c_{45} - c_{44} = \\ = 350000 - 460000 + 550000 - 350000 = 90000$$

$$d_{26} = c_{26} - c_{36} + c_{32} - c_{22} = \\ = 900000 - 360000 + 300000 - 200000 = 640000$$

$$d_{31} = c_{31} - c_{32} + c_{22} - c_{23} = \\ = 650000 - 300000 + 350000 - 320000 + 200000 - 300000 = 280000$$

$$\begin{aligned}d_{33} &= c_{33} - c_{32} + c_{22} - c_{23} \\ &= 450000 - 300000 + 200000 - 320000 = 30000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{34} &= c_{34} - c_{44} + c_{45} - c_{25} + c_{22} - c_{32} \\ &= 500000 - 350000 + 550000 - 460000 + 200000 - 300000 = 140000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{35} &= c_{35} - c_{32} + c_{22} - c_{25} = \\ &= 650000 - 300000 + 200000 - 460000 = 90000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{41} &= c_{41} - c_{11} + c_{13} - c_{23} + c_{25} - c_{45} = \\ &= 900000 - 300000 + 350000 - 320000 + 460000 - 550000 = 540000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{42} &= c_{42} - c_{22} + c_{25} - c_{45} = \\ &= 450000 - 200000 + 460000 - 550000 = 160000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{43} &= c_{43} - c_{23} + c_{25} - c_{45} = \\ &= 600000 - 320000 + 460000 - 550000 = 190000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{46} &= c_{46} - c_{45} + c_{25} - c_{22} + c_{32} - c_{36} = \\ &= 600000 - 550000 + 460000 - 200000 + 300000 - 360000 = 250000\end{aligned}$$

Bu hesaplamalar sonucunda görüldüğü gibi bulunan bütün  $d_{ij}$  değerleri pozitif çıkmıştır. Buradan da bulmuş olduğumuz  $z$  değerinin optimal olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Yani  $minz = 347.510.000$  TL dir.

Bu uygulama alanı için harcanan miktar ise  $415.000.000$  TL dir. Bu durumda elde edilecek olan kar ise,

$$415.000.000 - 347.510.000 = 67.490.000 \text{ TL dir.}$$

Transport problemi metodunu kullanarak elde edilen optimum taşıma düzeninde elde edilen sonuç daha düşük miktarda bir ücret ile taşımanın yapılabileceğini göstermektedir.

## V. BÖLÜM

### SONUÇ

Günümüzde optimizasyon problemleri ile birçok bilim dalında karşılaşılmaktadır. Son yıllarda özellikle ekonomik problemlerin optimal çözümlerinin programlama yöntemleri ile bulunması çok yaygın hale gelmiştir. Uygulamalı matematik dalında bu konularda bir çok programlama teknikleri geliştirilmiş ve bu teknikler başarılı sonuçlar vermiştir.

Tezin I. Bölümünde de belirtildiği gibi bu metotları kullanarak bir çok uluslararası büyük şirketler büyük miktarlarda kar elde etmeyi başarmışlardır. Ve bu tür projeler için şirketlerinde ayrı birimler oluşturarak çalışmalarına devam etmektedirler.

Doğrusal programlama birçok endüstride çok geniş uygulama alanına sahiptir. Bu endüstri branşları arasında, kömür, demir-çelik, kağıt, kimya, taşıma, haberleşme gibi endüstriler sayılabilir. Aynı zamanda doğrusal programlama, işletmelerin pazarlama, personel üretim, yatırım vb. analizlerinde de kullanılabilir. Mesela, personel analizinde bir işyerindeki personelin işlere göre en uygun dağılımının nasıl olduğuna, ulaştırma problemlerinde ise ürünlerin çeşitli merkezlerden çeşitli depolara minimum maliyetle nasıl taşınacağına doğrusal programlama ile çözüm bulmak mümkündür.

Bu tekniklerin en basiti lineer programlama olup simpleks yöntem sayesinde birçok problemin çözümü kolaylaşmıştır. Bu tez çalışmasında lineer programlama tekniklerinden biri olan transport problemleri tekniği ele alınmış, problemin kavram ve teknikleri açıklanarak Taşımalı İlköğretim Projesine bir modeli oluşturulmuştur.

Ülkemizde 1989-1990 eğitim-öğretim yılında başlamış olan ve halen uygulanmakta olan Taşımali İlköğretim Projesi hakkında çeşitli istatistiki bilgiler verilerek merkez okullar ve köyler arasındaki taşıma için bir model kurulmuştur. Bu sayede taşıma işleminin rasgele bir şekilde değil de Transport Problemi yardımı ile en uygun ve en az miktarda harcama ile yapılması için gerekli model oluşturulmuştur.

Taşıma işleminin Transport Problemi yardımı ile yapılması sonucunda büyük karlar elde edileceği muhakkaktır. O halde bunun için gerekli çalışmalar yapılmalı ve bu metodu kullanarak çeşitli modeller oluşturulmalıdır.

Bu sayede büyük harcamalar yapılan bir projeden büyük miktarlarda kar elde edilmesi mümkün olacaktır.



## KAYNAKÇA

- [1] ACKOFF, L.R. – Sasieni, W.M.: Fundamentals of Operation Research, John Wiley Sons Inc., New York, 1968
- [2] BRONSON, Richard: Operations Research, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1982
- [3] DOĞAN, İbrahim: Yöneylem Araştırması Teknikleri ve İşletme Uygulamaları, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul, 1995
- [4] HADLEY, G.: Linear Programming, Addison-Wesley Publishing Comp., California, 1969
- [5] KARA, İmdat: Doğrusal Programlama, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul, 1991
- [6] MITAL, V.K.: Optimizational Methods in Operations Research and Management Science, McGraw-Hill Book Comp., New Delhi, 1977
- [7] ÖZTÜRK, Ahmet: Yöneylem Araştırması, Ekin Kitabevi Yayınları, Bursa, 1997
- [8] SERPER, Özer: Doğrusal Ulaştırma Programlaması (İdeal Çözüm ve Uygulama), Bursa İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Yayını, Dizerkonca Matb., İstanbul, 1974
- [9] T.C. İstanbul Valiliği Milli Eğitim Müdürlüğü Araştırma, Planlama ve İstatistik Bölümü Sayısal Veriler, İstanbul 2000
- [10] VOGEL, W.R., REINFELD, N.V.: Mathematical Programming, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, California, 1958
- [11] WILKES, Michael: Operational Research: Analysis and Applications, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1989
- [12] WINSTON, L.: Operations Research Applications and Algorithms, Duxbury Press, California, 1994