14925

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ BÖLÜMÜ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI

REGRESYON ANALİZİNDE KUKLA DEĞİŞKENLER VE BİR UYGULAMA

(Yüksek Lisans Tezi)

Engin KILIÇ

Danışman: Doç. Dr. Selahattin GÜRİŞ

İstanbul - 1990

İ Ç İ N D E K İ L E R

Sayfa No.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM: UYGULAMA

GİRİŞ

Günümüzde özellikle bilgisayarların gelişimi ve yaygın olarak kullanılmaya başlanması ile istatistiksel yöntemlerin kullanımı da artmaktadır. Özellikle elle ve basit hesap makineleri ile hesaplanması çok uzun zaman alacak uygulamalar bile, paket programlar yardımı ile çok kısa sürede sonuçlandırılabilmektedir.

Regresyon analizi istatistiğin en çok kullanılan yöntemlerinden biridir. Değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesi söz konusu olduğunda akla ilk gelen istatistiksel yöntemler regresyon ve korelasyon olmaktadır.

Bu çalışmada amaçlanan hemen hemen her istatistik kitabında yer alan regresyon analizini açıklamak değildir. Amacımız regresyon analizinin bir alt bölümü olan ve farklı şekillerde kullanılabilen kukla değişkenleri incelemektir.

Çalışmamızın giriş bölümünden sonra yer alan ilk bölümünde, regresyon ve korelasyon analizinin bir özeti verilmiştir. Bu bölümde amaçlanan konu ile ilgili kavram birliğinin sağlanmasıdır.

İkinci bölüm kukla değişkenlerin incelendiği "Regresyonda Kukla Değişkenler" adlı bölümdür. Bu bölümde kukla değişken kavramı verildikten sonra, kukla değişkenlerin kullanılış şekilleri açıklanmıştır.

Üçüncü bölüm ikinci bölümde incelenen kukla değişkenlerle ilgili bir uygulamanın yer aldığı "Uygulama" bölümüdür.

Dördüncü ve son bölümde ise çalışmanın sonuçları özetlenmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

R E G R E S Y O N   A N A L İ Z İ

Değişkenler arasındaki ilişkiler farklı istatistiksel yöntemlerle analiz edilebilir. Değişkenler arasındaki ilişkilerin istatistiksel analizinde en çok kullanılan yöntemler korelasyon ve regresyon analizidir. Bu bölümde önce korelasyon daha sonra da regresyon analizi incelenecektir.

1.1. KORELASYON ANALİZİ

X ve Y iki değişken ise, bunların birlikte değişimini belirlemek için kovaryans hesaplanır(1).

$$\text{KOV}(x,y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$$

Kovaryans standart bir ölçü değildir, değeri pozitif veya negatif çıkabilir. Kovaryans değişkenler arasındaki ilişkinin yönünü gösterir, ilişkinin kuvvetini belirtmez(2).

İki veya daha fazla farklı değişken grubunun aralarındaki ilişkinin karşılaştırılmasında, kovaryans ile ancak ilişkilerin yönleri karşılaştırılabilir. Hangi değişken grubunda ilişkinin diğerinden daha kuvvetli olduğunu kovaryanslara bakarak söyleyemeyiz(3).

Kovaryans, değişkenler arasındaki ilişkinin derecesini belirtecek bir ölçü şekline dönüştürülebilir. Kovaryansın değişkenlerin standart sapmalarına oranlaması ile elde edilen katsayıya korelasyon katsayısı denir ve bu katsayı r ile gösterilir(3).

---

(1). BAĞIRKAN, Şemsettin - Ekonometrinin Temel Kavramları - Duran Ofset Matbaası - İstanbul, 1986 - S.14-15.

(2). KMENTA, Jan - Elements Of Econometrics - Macmillan Publishing Co. - New York, 1971, S.64.

(3). HUNTSBERGER, David V.; CROFT, D. James; BILLIGSLEY, Patrick - Statistical Inference For Management And Ecomomics Allyn and Bacon, Inc., Second Edition, Boston, 1980, S.398-399.

$$r=\frac{Kov(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}$$

$$r=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{n\ \sigma_X\ \sigma_Y}$$

Korelasyon katsayısi -1 ile +1 arasında değer alır. Korelasyon katsayısının hesaplanan değeri sıfır ise değişkenler arasında ilişki yoktur, değer sıfırdan küçük yani negatif ise değişkenler arasında ters yönlü, değer sıfırdan büyük yani pozitif ise değişkenler arasında doğru yönlü ilişki vardır. Korelasyon katsayısının değeri mutlak olarak 1'e yaklaştıkça değişkenler arasındaki ilişkinin kuvveti artmakta, sıfıra yaklaştıkça azalmaktadır(4).

Yukarıda verilen formüllerin açılması ile korelasyon katsayısının hesaplanması için farklı formüller türetilebilir(5).

Gerçek değerlerle:

$$r=\frac{\sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{[\sum X_i^2-n(\bar{X})^2][\sum Y_i^2-n(\bar{Y})^2]}}$$

Ortalamadan farklar serileri ile:

$$r=\frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i-\bar{X})^2\ \sum(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

(4). CİLLOV, Haluk - <u>İktisadi Olaylara Uygulanan İstatistik Metodları</u> - İktisat Fakültesi Yayın No: 1724, İstanbul, 1972 - S.162.

(5). BAĞIRKAN, Şemsettin - <u>İstatistiksel Analiz</u> - Önsöz Basım ve Yayıncılık - İstanbul, 1982 - S.71-85.

1.2. REGRESYON ANALİZİ

Regresyon analizinde değişkenler arasındaki ilişki matematiksel bir fonksiyonla ortaya konur. Bu nedenle regresyonda hem modelde yer alacak değişken sayısı hem de modelin matematiksel şekli önemlidir.

Modelde yer alan değişken sayılarına göre regresyon analizi, basit doğrusal regresyon ve çoklu regresyon olarak ikiye ayrılmaktadır.

1.2.1. Basit Doğrusal Regresyon

Burada basit kelimesi regresyon modelinde iki değişken olduğunu, doğrusal kelimesi ise modelin fonksiyonel şeklini ifade etmektedir.

Gerek korelasyon katsayısı, gerekse regresyon modelleri ana kütleden alınan örnekten tahmin edilecektir(6). Ana kütle regresyon modeli,

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$$

olsun. Burada α modelin sabit katsayısı, β ise doğrunun eğimidir. Ana kütle regresyon doğrusunun tam bir doğru olması beklenemez. Burada gerçek değerler ile doğru üzerinde yer alan teorik değerler arasındaki farkı ifade etmekte ve hata terimi olarak adlandırılmaktadır(6).

Korelasyonda değişkenler arasında fark yoktur. Basit doğrusal regresyonda ise değişkenlerden biri bağımlı, diğeri bağımsız değişkendir ve uygulamada da değişkenlerin ayrımı önemlidir. Etkileyen, sonuç yaratan değişken bağımsız değişken veya açıklayıcı değişken olarak adlandırılır. Etkilenen değişken ise bağımlı değişken olarak adlandırılmaktadır. Modelde Yi bağımlı, Xi ise bağımsız değişkendir(7).

---

(6). İDİL, Orhan - Örnekleme Teorisi ve İşletme Yönetiminde Uygulanması - İstanbul Üniversitesi Yayın No: 2708 - İstanbul, 1980 - S.256.

(7). BAĞIRKAN, a.g.e. - S.18-19

Ana kütle regresyon modelinin örnekten tahmini

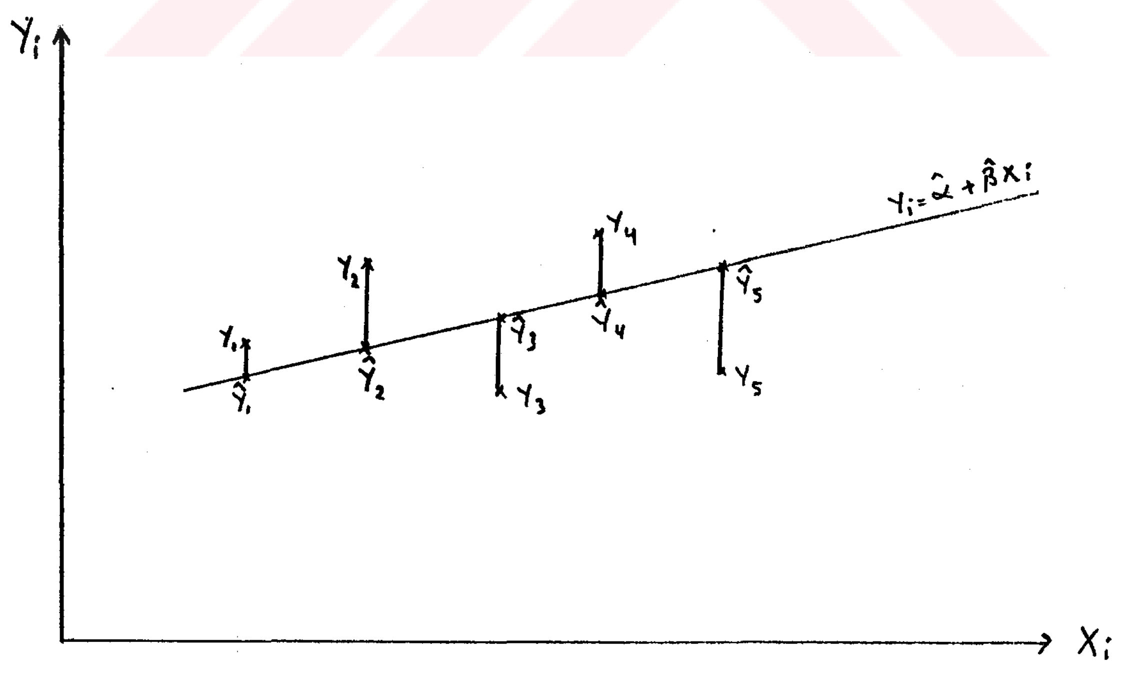
$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + e_i$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\hat{\alpha}$, α 'nın; $\hat{\beta}$, β 'nın tahminidir.

1.2.1.1. Katsayıların Hesaplanması

Modelde yer alan katsayıların tahmininde, en küçük kareler, meksimum benzerlikler gibi farklı yöntemlerle normal denkler elde edilebilir. Tüm yöntemlerle aynı denklemler elde edileceğinden(8), burada sadece en küçük kareler yönteminden söz edilecektir.

Bağımlı değişkenin gerçek değerlerini Yi, teorik değerlerini ise $\hat{Y}_i$ ile ifade edelim. En küçük kareler yönteminde Yi ile $\hat{Y}_i$ arasındaki farkların (Şekil-1'de görüldüğü gibi) kareleri toplamı minimum olacak şekilde katsayılar tahmin edilecektir.



Şekil-1: Gerçek ve teorik değerler arasındaki farklar.

(8). KMENTA, a.g.e. - S.206-216.

Farkların kareleri toplamına S dersek, S'in α ve β 'ya göre kısmi türevlerini alıp sıfıra eşitleyerek α ve β 'nın tahminlerini belirleyebiliriz(9).

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i) \right] (-1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i) \right] (-X_i) = 0$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i) \right] (-1) = 0$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i) \right] (-X_i) = 0$$

Gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

olarak normal denklemler elde edilir.

Normal denklemlerden katsayıların tahmini için iki bilinmeyenli denklem sistemini çözmek gerekecektir. Denklemlerde gerekli düzenlemeler yapılırsa iki bilinmeyenli denklem siste-

---

(9). MADDALA, G. S. - Econometrics, Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD. - Tokyo, 1977 - S.74-76.

mi çözülmeden de sonuca ulaşılabilir. Sonuçta elde edilecek formüller şöyledir(10).

Gerçek değerlerle:

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

Ortalamadan farklar serileri ile:

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

Yukarıda verilen formüller basit doğrusal regresyon modelinin katsayılarının tahmininde kullanılacaktır. Oysa regresyon modelleri sadece doğrusal olmayacak, diğer bir ifade ile eğrisel ilişkilerde regresyon modelleri ile incelenebilecektir. Eğrisel regresyon modellerinin katsayılarını tahmin için gerekli formüller önceki açıklamamıza benzer şekilde çıkarılabilir(11).

Aynı konu ile ilgili olarak farklı regresyon modelleri uygulanabilir. Bu durumda değişkenler arasındaki ilişkiyi en iyi açıklayan modelin seçilmesi gerekecektir(12).

---

(10). HAYSLETT, H. T. - Statistics Made Simple, Made Simple Books - W. H. Allen Third Edition - London, 1974 - S.142-143.

(11). BAĞIRKAN, Şemsettin - İstatistiksel Analiz - S.220. SERPER, Özer - Uygulamalı İstatistik 2 - Filiz Kitabevi- İstanbul, 1986.

(12). GÜRİŞ, Selahattin - Regresyon Modelinin Seçimi - Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, Cilt 3, Sayı 3, 1986 - S.529-540.

1.2.1.2. Basit Doğrusal Regresyonun Temel Varsayımları

Bir önceki bölümde regresyon katsayılarının tahminini inceledik. Tahmin edilen bu katsayıların geçerliliği, regresyonun aşağıda verilen temel varsayımlarının geçerliliğine bağlıdır. Eğer aşağıda verilen varsayımlardan bir veya birkaçı geçerliliğini kaybederse, tahmin edilen katsayılarda sapmalar oluşacaktır. Basit doğrusal regresyonun temel varsayımlarını şöyle özetleyebiliriz(13).

- Sıfır Ortalama Varsayımı:

Hata terimlerinin dağılımının ortalamaları sıfırdır. Uygulamada hata terimlerinin ortalamaları sıfır olacaktır.

$E(\varepsilon_i) = 0$

Hata terimlerinin ortalamasının sıfırdan farklı olması halinde sabi katsayı α 'nın değerinde sapma olacaktır.

- Normallik Varsayımı:

Hata terimlerinin dağılımı sıfır ortalama ile normal dağılımdır.

- Sabit Varyans Varsayımı:

Hata terimlerinin varyansları sabittir.

$Var(\varepsilon_i) = \sigma$

Varyansın sabit olmaması durumu, değişen varyans olarak adlandırılır ve bu durumda parametre tahminlerinde sapmalar oluşur.

- Otokorelasyon Olmaması Varsayımı:

Zaman serilerinde yapılan regresyon analizlerinde hata terimleri arasında ilişki olmamalıdır. Hata terimleri arasın-

---

(13). STEWART, Mark; KENNETH, F.Wallis - Introductory Econometrics, Basil Blackwell, Second Edition, Oxford, 1981 - S.111-112.

daki ilişki otokorelasyon olarak adlandırıldığından, zaman serileri ile ilgili analizlerde otokorelasyon olmamalıdır.

$$Kov(\varepsilon_t, \varepsilon_i) = E(\varepsilon_t, \varepsilon_i) = 0 \qquad i \neq t$$

- Bağımsız Değişkenin Tesadüfi Değişken Olmaması Varsayımı:

Bağımsız değişken Xi tesadüfi değişken olmamalıdır. Yani, bağımsız değişkenin değerleri örnekten örneğe değişmeyecektir.

1.2.1.3. Parametrelerin Varyansları ve Aralık Tahmini:

Parametrelerin varyanslarının belirlenebilmesi için önce hata terimlerinin varyanslarını tahmin etmek gerekecektir. Hata terimlerinin varyansı örnekten

$$S_e^2 = \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

olarak tahmin edilir. Bu durumda $\hat{\alpha}$ 'in varyansı

$$S_{\hat{\alpha}}^2 = S_e^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \right]$$

ve $\hat{\beta}$ 'in varyansı,

$$S_{\hat{\beta}}^2 = \frac{S_e^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

olacaktır(14).

---

(14). KOUTSOYİANNİS, A. - Ekonometri Kuramı Ekonometri Yöntemlerinin Tanımına Giriş - Çevirenler: Ümit Şenesen, Gülay Günlük Şenesen - Verso Yayıncılık - Ankara, 1989 - S.76-78.

Katsayıların aralık tahminini yaparken güven katsayılarının belirlenen hata payı ile tablodan bulunması gerekecektir. Güven katsayıları belirlenirken $n \geqslant 30$ ise normal dağılım tablosundan $Z_{\alpha/2}$; $n < 30$ ise student-t dağılımı tablosundan $t_{\alpha/2}$ değeri bulunacaktır. Daha sonra α ve β 'nın aralık tahminleri şöyle yapılır(15).

α için:

$$\hat{\alpha} - t_{\alpha/2} S_{\hat{\alpha}} \leqslant \alpha \leqslant \hat{\alpha} + t_{\alpha/2} S_{\hat{\alpha}}$$

β için:

$$\hat{\beta} - t_{\alpha/2} S_{\hat{\beta}} \leqslant \beta \leqslant \hat{\beta} + t_{\alpha/2} S_{\hat{\beta}}$$

1.2.1.4. Katsayıların Testi

Tahmin edilen katsayıların değerlerinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığının test edilmesi için iki farklı test uygulanabilir.

1.2.1.4.1. - t - testi

Örnekten tahmin edilen katsayıların değerlerinin anlamlı olup olmadığı test edilirken yapılacak t-testinde katsayıların sıfırdan farklı olup olmadığı test edilir. Ayrıca t-testi ile elde edilen değerlerin verilen bir değerden farklı olup olmadığının test edilmesi de mümkündür(16).

- Katsayıların Sıfırdan Farklı Olup Olmadığının Test Edilmesi:

Katsayıların istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı test edilirken, katsayıların sıfırdan farklı olup olmadığı in-

---

(15). MOSKOWITZ, Herbert; WRIGHT, Gordon P. - Statistics for Management and Eonomics Charles E. Merril Publishing Company - Columbus Toronto, 1985 - S.507-508.

(16). KMENTA - a.g.e. - S.236-237.
GUJARATİ, Damodar - Basic Econometrics - Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD. - Tokyo, 1978, S.81-85.

celenir. Bu durumda temel sıfır hipotezi,

$$H_0 : \beta = 0$$

şeklinde kurulacaktır. Alternatif hipotez ise testin tek veya çift taraflı olmasına göre

$H_1 : \beta \neq 0$ (çift taraflı)

$H_1 : \beta > 0$ veya

$H_1 : \beta < 0$ (tek taraflı)

şeklinde kurulacaktır. Test çift taraflı ise belirlenen hata payı α ile tablodan $z_{\alpha/2}$ veya $t_{\alpha/2}$; test tek taraflı ise tablodan z_{α} veya t_{α} değeri bulunur(17).

Test için daha sonra test istatistiğinin hesaplanması gerekir. Test istatistiği,

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{S_{\hat{\beta}}}$$

β = 0 olduğundan,

$$t = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}}$$

şeklinde hesaplanır(18).

t-testinin son işlemi karar verilmesi, yani hipotezlerden birirnin kabul, diğerinin reddedilmesi işlemidir. Karar şöyle verilecektir(19).

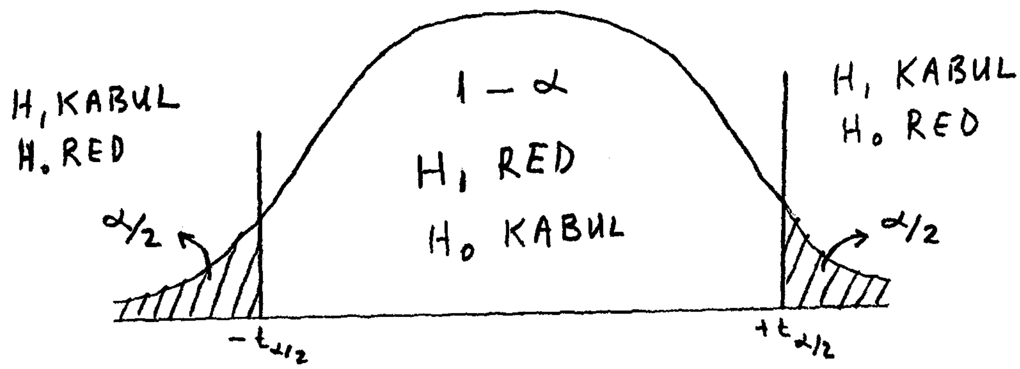
Çift taraflı test için:

---

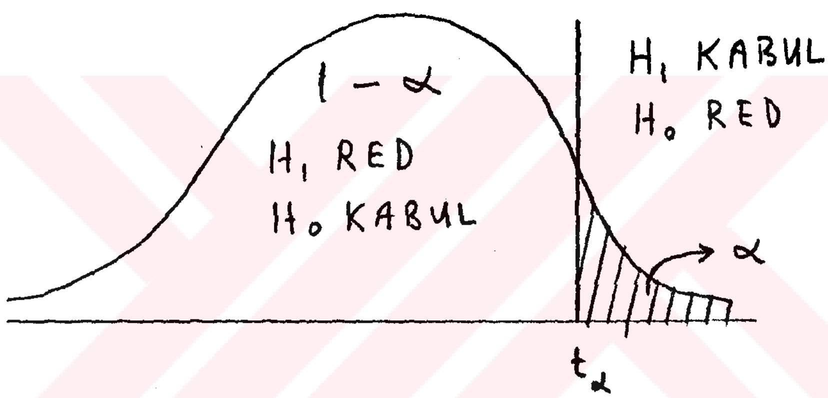
(17). BAĞIRKAN, a.g.e. - S.38.

(18). ERTEK, Tümay - Ekonometriye Giriş - Dördüncü Baskı - Beta Basım Yayım Dağıtım AŞ. - İstanbul, 1986 - S.126.

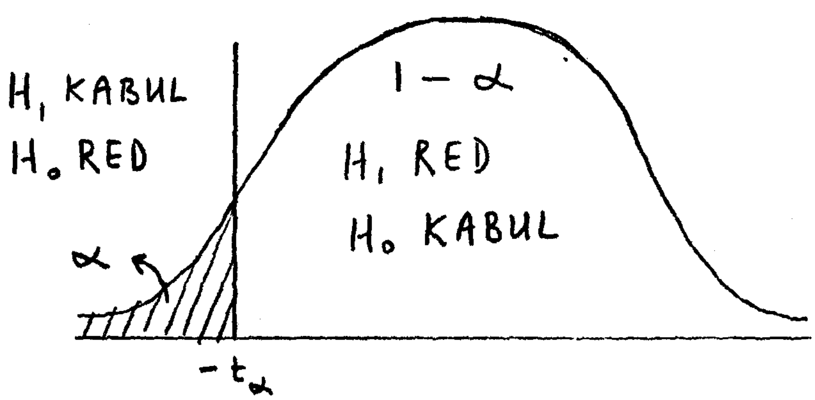
(19). ERTEK, a.g.e. - S.126-127.



Tek taraflı test için:



veya



Yukarıdaki şekillerde tek ve çift taraflı hipotez testleri için kabul ve red bölgeleri verilmiştir. Hesaplanan test istatistiğinin şekillerdeki bölgelerden hangisine düştüğüne bakılarak hipotezlerden biri kabul, diğeri red edilir.

Sabit katsayı α 'da aynı şekilde test edilir.

- Katsayıların Verilen Bir Değerden Farklı Olup Olmadığının Testi:

Regresyon analizi katsayıların belirli bir değere eşit olup olmadığını test etmek için de yapılabilir veya elde edilen sonucun, daha önce aynı konuda yapılan araştırmalarda elde edilen sonuçlarla arasında fark olup olmadığı test edilmek istenebilir. Bunlara benzer durumlarda hesaplanan değer ile verilen değerin aralarındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı test edilecektir.

Verilen değer β_0 olsun. Bu durumda test şöyle yapılacaktır(20).

Hipotezler:

H_0 : $\beta = \beta_0$

H_1 : $\beta \neq \beta_0$ (çift taraflı)

H_1 : $\beta > \beta_0$ veya

H_1 : $\beta < \beta_0$ (tek taraflı)

Tablodan $t_{\alpha/2}$, t_α veya $Z_{\alpha/2}$, Z_α değeri bulunur.

Test istatistiği:

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{S_{\hat{\beta}}}$$

Karar daha önce açıklandığı gibi verilir.

1.2.1.4.2. - F - testi

F-testi sabit katsayı dışındaki katsayıların tümünü birlikte test eder. Bu nedenle F-testi daha çok çoklu regres-

(20). ÜNVER, Özkan; GAMGAM, Hamza; Uygulamalı İstatistik Yöntemler - Ankara, 1986 - S.265.

yon için önemlidir. F-testi şöyle yapılır(21).

- t-testinde olduğu gibi önce hipotezler kurulur.

H_0 : $\beta_1 = 0$

H_1 : $\beta_1 \neq 0$

- F dağılımı tablosundan belirlenen hata payı (α) ve ν_1 = k-1, ν_2 = n-k serbestlik derecesi ile F tablo değeri (F_{α,ν_1,ν_2}) bulunur.

- Test istatistiği hesaplanır.

$$F = \frac{\Sigma(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2/1}{\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2/(n-2)}$$

- Karar verilirken hesaplanan F değeri ile tablodan bulunan değer karşılaştırılır. Hesaplanan değer tablo değerinden büyük ise,

$$F > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$$

H_1 hipotezi kabul edilir. Aksi halde H_0 hipotezi kabul edilir.

1.2.1.5. Belirginlik Katsayısı

Regresyonda bağımlı değişkendeki değişmelerin, bağımsız değişken veya bağımsız değişkenler tarafından açıklanma oranını veren katsayıya belirginlik katsayısı(22) veya determinasyon katsayısı(23) denir.

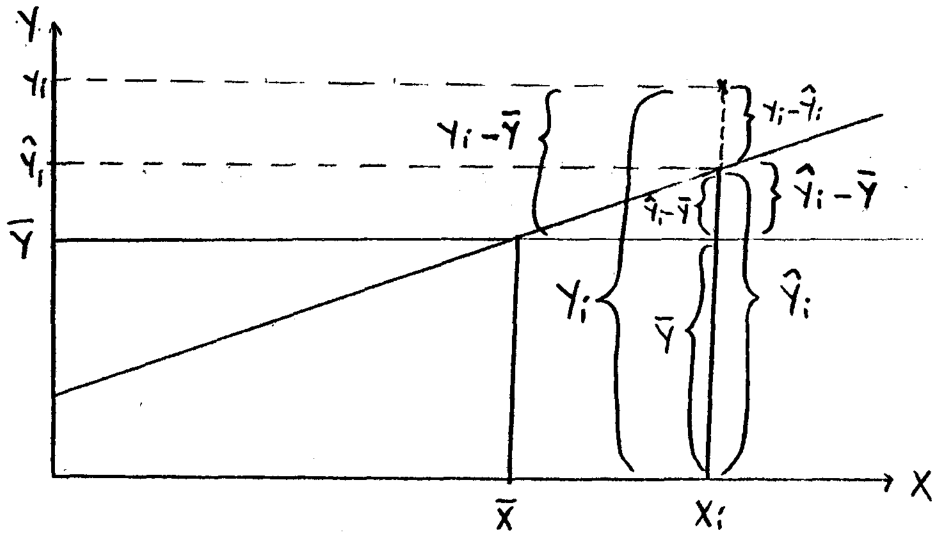
---

(21). JOHNSTON, J. - Econometric Methods - Mc Graw-Hill Book Company - New York, 1963 - S.126-127.

(22). GENCELİ, Mehmet- Ekonometride İstatistik İlkeler - Filiz Kitabevi - İstanbul, 1989 - S.99.

(23). BAĞIRKAN - İstatiksel Analiz - S.75.

Şekil-2'de bir gözlem için açıklanan, açıklanmayan ve toplam değişmeler görülmektedir.



Şekil-2: Regresyonda değişmeler.

Şekilde de görüldüğü gibi ($Y_i - \bar{Y}$) ile ifade edilen bağımlı değişkendeki toplam değişme, ($\hat{Y}_i - \bar{Y}$) ile ifade edilen regresyon modelinde yer alan bağımsız değişkenler tarafından açıklanan değişmeler ile ($Y_i - \hat{Y}_i$) ile ifade edilen regresyon modelinde yer alan değişkenler tarafından açıklanmayan değişmelerin toplamına eşittir. Bir gözlem için kısaca,

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

yazılabilir. Farklar ters işaretli olabileceğinden değişmeleri açıklayabilmek için bunların karelerinin alınması gerekecektir. Bir regresyon modelinin katsayılarının tahmininde n gözlem olacağı da dikkate alınarak yukarıdaki ifade,

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$$

şeklinde yazılabilir(24).

Tarafları toplam değişmeye bölersek,

---

(24). CROXTON, Frederick E. - Elementary Statistics With Applications In Medicine and The Biological Sciences - Dover Publishing, İnc. - New York, 1959 - S.121-122.

$$1 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

yazılacaktır. Tanımı gereği R^2 ile ifade edeceğimiz belirginlik katsayısı açıklanan değişmelerin toplam değişmelere oranıdır.

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

Yukarıda verilen eşitlikten,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

de yazılabilir. Burada,

$$\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

regresyon modeli tarafından açıklanmayan değişmelerin oranını vermekte olup, bu oran $(1 - R^2)$'ye eşittir(25).

Belirginlik katsayısı modelin değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklamaktaki uygunluğunu gösterdiğinden büyük olması arzu edilecektir. Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı gibi belirginlik katsayısı $0 \leqslant R \leqslant 1$ arasında değişecektir. Farklı regresyon modellerinin karşılaştırılmasında da determinasyon katsayısı kullanılmaktadır(26).

Daha önce F-testi ile ilgili olarak verilen formül ile determinasyon katsayısının hesaplanmasında kullanılan formüller karşılaştırılırsa aralarında ilişki olduğu görülecektir. F istatistiğinde belirginlik katsayısı yerine konursa

$$F = \left[\frac{n-k}{k-1}\right]\left[\frac{R^2}{1-R^2}\right]$$

(25). ERTEK, a.g.e. - S.129-130.

(26). GÜRİŞ, a.g.e. - S.535.

formülü elde edilir. Kısaca belirginlik katsayısı biliniyorsa F istatistiği bunun yardımı ile de hesaplanabilir(27).

1.2.1.6. Basit Doğrusal Regresyon Modeli İle Tahmin

Regresyon modeli ileriye dönük tahminler yapılması amacı ile de kullanılabilir. Bu işlem için modelde yer alan bağımsız değişkenlerin değerlerinin model dışında farklı şekilde tahmin edilmesi gerekecektir. Bağımsız değişkenlerin değerlerinin modelde yerine konması ile bağımlı değişken ile ilgili tahminler elde edilecektir. Bu durumda basit doğrusal regresyon modeli için tahminin standart hatası,

$$S_T = S_e \sqrt{\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right]}$$

olacaktır. Aralık tahmini ise,

$$\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2} S_T \leq Y_0 \leq \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2} S_T$$

olacaktır(28).

1.2.2. Çoklu Regresyon

Bundan önceki açıklamalarımız tek bağımsız değişkenli basit doğrusal regresyon modeli ile ilgiliydi. Bu bölümde regresyon modelinde birden fazla bağımsız değişken olması durumunu, yani çoklu regresyonu inceleyeceğiz.

1.2.2.1. Katsayıların Tahmini

Ana kütle çoklu regresyon modelinin

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots\cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Modelde k sayıda değişken, k sayıda hatsayı vardır. ε_i yine hata terimidir.

---

(27). AVRALIOĞLU, Zeki - <u>İstatistik</u> - Ankara, 1977 - S.266-267
(28). MOSKOWITZ, WRIGHT, a.g.e. - S.509-510.

Çoklu regresyonun normal denklemleri de basit doğrusal regresyonda olduğu gibi en küçük kareler yöntemi ile elde edilebilir. Daha önceki işlemin biraz daha genişinin tekrarı ile normal denklemler,

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik}$$

$$\sum X_{i1}Y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{i1}X_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{i1}X_{ik}$$

$$\sum X_{i2}Y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}X_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}^2 + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{i2}X_{ik}$$

$$\sum X_{i3}Y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_{i3} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}X_{i3} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}X_{i3} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{i3}X_{ik}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\sum X_{ik}Y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}X_{ik} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}X_{ik} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik}^2$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerde değişkenlerin yerine aritmetik ortalamadan farkları konursa,

$$Y_i - \bar{Y} = y_i$$
$$X_{i1} - \bar{X}_1 = x_{i1}$$
$$X_{i2} - \bar{X}_2 = x_{i2}$$
$$\vdots$$
$$X_{ik} - \bar{X}_k = x_{ik}$$

normal denklemler,

$$\sum x_{i1}y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{i1}x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum x_{i1}x_{ik}$$

$$\sum x_{i2}y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}x_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}^2 + \cdots + \hat{\beta}_k \sum x_{i2}x_{ik}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\sum x_{ik}y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}x_{ik} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}x_{ik} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum x_{ik}^2$$

şeklini alacaktır. Bu durumda $\hat{\beta}_0$ ise,

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \cdots - \hat{\beta}_k \bar{X}_k$$

şeklinde hesaplanacaktır(29).

Çoklu regresyonda değişken sayısının artması ile katsayıların tamininin güçleşeceği açıktır. Ayrıca değişken sayısının artması ile parametrelerin varyanslarının hesaplanması da güçleşecektir. Bu nedenle katsayılar matrisler yardımı ile tahmin edilebilir. Yukarıda verilen normal denklemleri matrisler yardımı ile şöyle gösterebiliriz(30).

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \cdots & \sum X_{ik} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} & \cdots & \sum X_{i1}X_{ik} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 & \cdots & \sum X_{i2}X_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum X_{ik} & \sum X_{i1}X_{ik} & \sum X_{i2}X_{ik} & \cdots & \sum X_{ik}^2 \end{bmatrix}$$

$$(X'Y) = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1}Y_i \\ \sum X_{i2}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ik}Y_i \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

(29). KMENTA, a.g.e. - S.351.

(30). KMENTA, a.g.e. - S.352.

$$(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

işlemi ile katsayılar tahmin edilecektir.

Ortalamadan farklar serileri söz konusu ise,

$$(\underline{X}'\underline{X}) = \begin{bmatrix} \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i1}x_{i2} & \cdots\cdots & \Sigma x_{i1}x_{ik} \\ \Sigma x_{i1}x_{i2} & \Sigma x_{i2}^2 & & \Sigma x_{i2}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \\ \Sigma x_{i1}x_{ik} & \Sigma x_{i2}x_{ik} & \cdots\cdots & \Sigma x_{ik}^2 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{X}'\underline{Y}) = \begin{bmatrix} \Sigma x_{i1}y_i \\ \Sigma x_{i2}y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_{ik}y_i \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\underline{\beta}}) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

$$(\hat{\underline{\beta}}) = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}(\underline{X}'\underline{Y})$$

işlemi ile bağımsız değişkenlerin katsayıları tahmin edilecektir. Sabit katsayı β_0 ise daha önce açıklandığı gibi,

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}_1 - \hat{\beta}_2\overline{X}_2 - \cdots\cdots - \hat{\beta}_k\overline{X}_k$$

şeklinde tahmin edilecektir.

1.2.2.2. Çoklu Regresyonun Temel Varsayımları

Çoklu regresyon için daha önce basit doğrusal regresyonda verilen beş varsayım aynen geçerlidir. Fakat çoklu regresyonda bunlara ek olarak iki varsayım daha vardır. Çoklu regresyonun basit doğrusal regresyondan farklı olan varsayımları şunlardır(31).

- Çoklu doğrusal bağlılık olmaması:

Bağımsız değişkenler arasında çok kuvvetli doğrusal ilişki olması durumu çoklu doğrusal bağlılık olarak adlandırılır. Bağımsız değişkenler arasında çok kuvvetli ilişki varsa çoklu regresyon modeli ile ilgili tahminler geçerli olmayacaktır.

- Gözlem sayısının, değişken sayısından fazla olması:

Çoklu regresyon için $n \geqslant k$ olması katsayıların tahmin edilebilmesi için gereklidir.

1.2.2.3. Katsayıların Varyansları ve Aralık Tahmini

Çoklu regresyonda daha önce basit doğrusal regresyonda olduğu gibi basit formüllerle katsayıların varyanslarını belirleyemeyiz. Değişken sayısı arttıkça bu işlem zorlaşmakta, hatta imkânsız hali gelmektedir. Bu nedenle katsayıların varyanslarının matrisler yardımı ile bulunması daha kolaydır.

Katsayıların varyansları varyans-kovaryans matrisi yardımi ile yapılabilir. Varyans-kovaryans matrisi ile varyanslar

$$\text{Varyans-Kovaryans Matrisi} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_0) & Kov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & Kov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) & \cdots & Kov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_k) \\ Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_1) & Kov(\beta_1\beta_2) & \cdots & Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_k) \\ Kov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) & Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) & Var(\hat{\beta}_2) & \cdots & Kov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Kov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_k) & Kov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_k) & Kov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_k) & \cdots & Var(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix} = S_e^2(X'X)^{-1}$$

(31). KMENTA - a.g.e. - S.348.
BAĞIRKAN - a.g.e. - S.53.

şeklinde tahmin edilecektir(32). Burada (X'X) matrisinin tersinin ile çarpımlarının köşegeninde yer alan değerler sıra ile parametrelerin varyanslarını verecektir.

Katsayıların aralık tahmini basit doğrusal regresyonda olduğu gibi yapılacaktır.

1.2.2.4. Katsayıların Testi

Daha önce basit doğrusal regresyonda açıklanan t-testi ve F-testi aynı şekilde ve aynı formüllerle çoklu regresyonda da uygulanacaktır. Sadece F-testinde hipotezler,

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k$$
$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \ldots \neq \beta_k$$

şeklinde oluşturulacaktır.

1.2.2.5. Belirginlik Katsayısı

Belirginlik katsayısı ile ilgili olarak basit doğrusal regresyonda yapılan açıklamalar aynen çoklu regresyonda da geçerlidir.

Çoklu regresyonda bağımsız değişken sayıları farklı modellerin karşılaştırılmasında belirginlik katsayısı kullanılacaksa katsayıların düzeltilerek kullanılması gerekecektir. Düzeltilmiş belirginlik katsayısı

$$R_d^2 = 1 - (1 - R^2)\left[\frac{n-1}{n-k}\right]$$

şeklinde hesaplanır(33).

(32). ERTEK - a.g.e. - S.147-148.
(33). BAĞIRKAN - a.g.e. - S.72.

1.2.2.6. Çoklu Regresyon Modeli ile Tahmin

Çoklu regresyonda da basit doğrusal regresyanda olduğu gibi bağımsız değişkenlerin tahmin edilecek döneme ait tahmini değerlerinin modelde yerine konması ile bağımlı değişkenin tahmini yapılacaktır.

Çoklu regresyonda tahminin standart hatası matrisler yardımı ile şöyle hesaplanacaktır(34).

$$S_T^2 = S_e^2 \left[1 + \frac{1}{n} + (X_i - \bar{X})'(X'X)^{-1}(X_i - \bar{X})' \right]$$

Aralık tahmini ise basit doğrusal regresyondan farklı değildir.

(34). BAĞIRKAN - a.g.e. S.71.

İKİNCİ BÖLÜM

K U K L A   D E Ğ İ Ş K E N L E R

Değişkenler arasındaki ilişkilerin matematiksel bir fonksiyon ile açıklandığı regresyon analizinde bazı durumlarda özel değişkenlerin kullanılması gerekmektedir. Kukla değişkenler de regresyon analizinde kullanılan bu özel değişkenlerden biridir.

2.1. Kukla Değişken Kavramı ve Tek Bağımsız Değişken Olması Durumu

Regresyonda genellikle kullanılan değişkenler gelir, fiyat, ağırlık gibi nicel değişkenlerdir. Fakat bağımlı değişkeni etkileyen değişkenler sadece nicel değişkenler değildir. Regresyonda bağımlı değişken nitel değişkenler tarafından da etkilenebilir. Bu nitel değişkenlere örnek olarak savaş, kuraklık, grevler, seks gibi örnekler verilebilir.

Regresyonda bağımlı değişkeni etkileyebilecek nitel değişkenler regresyon modelinde savaş var veya yok, grev var veya yok, kadın veya erkek şeklinde yer alacaktır. Bu değişkenler genellikle 0 veya 1 değerini almaktadırlar ve kukla(1) veya gölge(2) değişken olarak adlandırılırlar(3).

Kısaca kukla değişken regresyon analizlerinde nitel değişkenler için kullanılan bir değişken türüdür(4). Kukla değişken kullanımı basit bir örnekle açıklayalım.

---

(1). Kukla Değişken Kavramı İngilizce Dummy veya Binary Variable karşılığı olarak kullanılmıştır. BAĞIRKAN, Şemsettin - Ekonometrinin Temel Kavramları - Duran Ofset - İstanbul, 1988 - S.97.

(2). GENCELİ, Mehmet - Ekonometride İstatistik İlkeler - Filiz Kitabevi - İstanbul, 1989 - S.217.

(3). GUJARATİ, Damador - Basic Econometrics - Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD. - Tokyo, 1978 - S.288-289. YAMANE, Taro - Statistics An Introductory Analysis - Third Edition - Harper International Edition, 1973 - S.1014-1015.

(4). MADDALA, G. S. - Econometrics - Mc Graw - Hill Kogakusha LTD. - Tokya, 1977 - S.132.

$$T_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$$

modelinde Ti tüketim harcamalarını ifade etsin. Xi ise savaş ve barış dönemlerini gösteren bir kukla değişken olsun. Bu durumda kukla değişken,

Xi = 0 barış dönemleri için
Xi = 1 savaş dönemleri için

değerlerini alsın. Bu durumda tüketim harcamalarının beklenen değeri,

Barış dönemleri için:

$$E(T_i / X_i = 0) = \alpha + \beta(0) = \alpha$$

Savaş dönemleri için:

$$E(T_i / X_i = 1) = \alpha + \beta(1) = \alpha + \beta$$

olacaktır. Elde edilen değerlere,

$$\alpha = \mu_0$$

$$\alpha + \beta = \mu_1$$

dersek, bu durumda kukla değişkenin katsayısı,

$$\beta = \mu_1 - \mu_0$$

olacaktır. Yani ana kütle regresyon doğrusunun sait katsayısı barış dönemlerinin tüketim harcamaları ortalamasına; eğimi ise savaş ve barış dönemlerinin tüketim harcamaları ortalamasına eşittir.

Yukarıda verilen regresyon modelinin katsayılarını daha önce basit doğrusal regresyonda verilen ortalamadan farklar formülleri ile tahmin edelim. Bu durumda,

n_0 = barış dönemi sayısını

n_1 = savaş dönemi sayısını

T_0 = barış dönemi tüketim harcamaları ortalamasını

T_1 = savaş dönemi tüketim harcamaları ortalamasını

ifade etsin. Regresyon modelinin katsayılarını tahmin edeceğimiz formüller ise,

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma (T_i - \bar{T})(X_i - \bar{X})}{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{T} - \hat{\beta} \bar{X}$$

olacaktır. Bu durumda ayrıca,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = n_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = n_0 \bar{T}_0 + n_1 \bar{T}_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i X_i = n_1 \bar{T}_1$$

olacaktır. Bu eşitlikler yardımı ile,

$$\sum_{i=1}^{n} (T_i - \bar{T})(X_i - \bar{X}) = \Sigma T_i X_i - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} T_i)(\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= n_1 \bar{T}_1 - \frac{1}{n} (n_1)(n_0 \bar{T}_0 + n_1 \bar{T}_1)$$

$$= \frac{n_1 n_0}{n} (\bar{T}_1 - \bar{T}_0)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum X_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$$

$$=n_1-\frac{1}{n}(n_1)^2$$

$$=\frac{n_0 n_1}{n}$$

elde edilir. Eşitlikler formüllerde yerine konursa,

$$\hat{\beta}=\frac{\left(\frac{n_0 n_1}{n}\right)\left(\bar{T}_1-\bar{T}_0\right)}{\frac{n_0 n_1}{n}}=\bar{T}_1-\bar{T}_0$$

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{n}\left(n_0\bar{T}_0+n_1\bar{T}_1\right)-\left(\bar{T}_1-\bar{T}_0\right)\frac{n_1}{n}=\bar{T}_0$$

sonuçları elde edilir(5).

Görüldüğü gibi daha önceki sonuca varılmıştır.

2.2. İki veya Daha Fazla Bağımsız Kukla Değişken Olması Durumu

Bir önceki bölümde kukla değişken kavramı verildikten sonra tek bağımsız kukla değişken olması durumu incelenmişti. Aynı durum iki veya daha fazla bağımsız kukla değişken olması durumu için de açıklanabilir. İki bağımsız kukla değişken olması durumunu bir örnekle açıklayalım(6).

Bir önceki bölümde verilen modele bir bağımsız kukla değişken daha ekleyelim. Bu durumda model,

---

(5). KMENTA, Jan - Elements of Econometrics - Macmillan Publishing Co. Inc - New York, 1971 - S.410-411.

(6). KELEJIAN, Harry H.; OATES, Wallace E. - Introduction to Econometrics Principles and Applications - Harper and Row Publishers - New York, 1974 - S.163-164.

$$T_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i$$

olsun ve Ti tüketim harcamalarını ifade etsin. Kukla değişkenler ise,

X = 0 Barış dönemleri için
X = 1 Savaş dönemleri için
X = 0 Kuraklık dönemleri için
X = 1 Kuraklık olmayan dönemler için

değerlerini alsın. Bu model için beklenen değerler,

$$E(T_i / X_{i1}=0, X_{i2}=0) = \beta_0 + \beta_1(0) + \beta_2(0) = \beta_0$$

$$E(T_i / X_{i1}=1, X_{i2}=0) = \beta_0 + \beta_1(1) + \beta_2(0) = \beta_0 + \beta_1$$

$$E(T_i / X_{i1}=0, X_{i2}=1) = \beta_0 + \beta_1(0) + \beta_2(1) = \beta_0 + \beta_2$$

$$E(T_i / X_{i1}=1, X_{i2}=1) = \beta_0 + \beta_1(1) + \beta_2(1) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$$

olacaktır.

Burada,

$$\beta_0 = \mu_0$$

$$\beta_1 = \mu_2 - \mu_0$$

$$\beta_2 = \mu_1 - \mu_0$$

olacaktır. Aynı durum ikiden fazla bağımsız kukla değişken olması halleri için de gösterilebilir(7).

2.3. Nicel ve Kukla Bağımsız Değişkenli Regresyon Modelleri

Kukla bağımsız değişkenler nicel bağımsız değişken veya değişkenlerin yer aldığı regresyon modellerinde de kullanıla-

---

(7). KMENTA - a.g.e. - S.415-416.

bilirler. Önce bir nicel ve bir kukla bağımsız değişkenin yer aldığı regresyon modelini bir örnekle açıklayalım.

Örnek olarak tüketim harcamaları ile gelir arasındaki ilişkiyi ele alalım. Tüketim harcamaları ile gelir arasındaki ilişkiyi daha önce sadece tüketim harcamalarında olduğu gibi bir tek model ile savaş ve barış dönemleri için incelemek istersek modelde bir kukla değişkenin yer alması gerekecektir.

Önce savaş ve barış durumları için iki ayrı model olması halini düşünelim. Bu durumda modeller (T = Tüketim harcamaları; G = Gelir),

Savaş dönemleri için:

$$T_i = \beta_1 + \beta G_i + \varepsilon_i$$

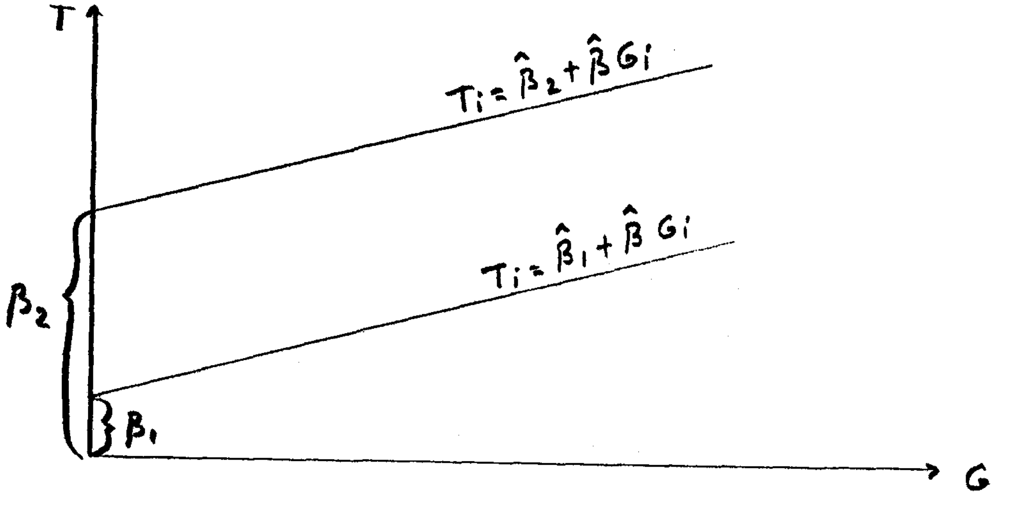
Barış dönemleri için:

$$T_i = \beta_2 + \beta G_i + u_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada barış dönemi için hesaplanacak sabit katsayı, savaş dönemi için hesaplanacak sabit katsayıdan büyük olacaktır(8).

$$\beta_2 > \beta_1$$

Modelleri şekil yardımı ile şöyle gösterebiliriz.



(8). JOHNSTON, J - Econometric Methods - Mc Graw-Hill Book Company Inc. - New York, 1963 - S.221.

Yukarıda ayrı ayrı verilen model 0 ve 1 değerlerini alan iki kukla değişken ile birleştirilerek tek model haline dönüştürülürse,

$$T_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta G_i + \varepsilon_i$$

şeklini alacaktır. Burada kukla değişkenler

X = 1 savaş dönemi için
X = 0 barış dönemi için
X = 0 savaş dönemi için
X = 1 barış dönemi için

değerlerini alacaktır. Böylece X_1 ile savaş dönemleri, X_2 ile barış dönemleri sabit katsayısı belirlenmiş olacaktır ve son modelde ayrı bir sabit katsayı bulunmamaktadır.

Yukarıda verilen son regresyon modelinin katsayılarını daha önce verdiğimiz normal denklemleri veya bunlardan türetilen diğer formülleri kullanarak tahmin edersek ayrı bir sabit katsayının kendiliğinden ortaya çıkacağı açıktır. Eğer olsaydı n_0 savaş dönemi, n_1 barış dönemi varsa bu durumda (X'X) matrisi,

$$\begin{bmatrix} n_0+n_1 & n_0 & n_1 & \sum_{i=1}^{n_0+n_1} G_i \\ n_0 & n_0 & 0 & \sum_{i=1}^{n_0} G_i \\ n_1 & 0 & n_1 & \sum_{i=n_0+1}^{n_0+n_1} G_i \\ \sum_{i=1}^{n_0+n_1} G_i & \sum_{i=1}^{n_0} G_i & \sum_{i=1}^{n_0+n_1} G_i & \sum_{i=1}^{n_0+n_1} G_i^2 \end{bmatrix}$$

şeklini alacaktır. Matrise dikkat edilirse matrisin ilk kolonunun ikinci ve üçüncü kolonlarının toplamına eşit olduğu görülecektir. Bu durumda daha önce verilen formüller ile çözüme ulaşabilmek için modelde yer alan kukla değişkenlerden birinin çıkarılması gerekecektir(9).

Kukla değişkenlerden birini çıkardıktan sonra modeli şöyle yazabiliriz.

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \beta G_i + \epsilon_i$$

burada X_i kukla değişkeni,

X_i = 0 savaş dönemleri için

X_i = 1 barış dönemleri için

değerlerini alacaktır. Savaş dönemleri için tüketim harcamalarının beklenen değeri

$$E(T_i | X_{i2}=0) = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2(0) + \hat{\beta} G_i$$
$$= \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta} G_i$$

barış dönemleri için tüketim harcamalarının beklenen değeri ise,

$$E(T_i | X_{i2}=1) = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2(1) + \hat{\beta} G_i$$
$$= \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta} G_i$$

olacaktır(10). Daha önce ayrı ayrı yazılan modeller ile son eşitlikler karşılaştırılırsa,

$$\alpha_1 = \beta_1$$
$$\alpha_2 = \beta_2 - \beta_1$$

olduğu görülecektir.

---

(9). JOHNSTON - a.g.e. - S.222.
FEYZİOĞLU, Oğuz - Ekonometrik Yöntemler - Ankara İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Yayını, Ankara, 1977-S.82-83.

(10).GUJARATI - a.g.e. - S.289.

Görüldüğü gibi burada savaşın sadece sabit katsayıyı etkilediği varsayılmıştır. Olayı genelleştirirsek kukla değişkenin kullanımını gerektiren olay sadece modelin kesim noktasını değiştirmiştir. Oysa sabit katsayı yerine modelin eğimi, yani bağımsız nicel değişkenin katsayısı da olaydan etkilenebilir. Bu durumda modelin yeniden düzenlenmesi gerekecektir(11).

Örnek olarak incelediğimiz olayda savaş durumunda sabit katsayının değişmediğini, bağımsız değişkenin katsayısının değiştiğini varsayalım. Bu durumda daha önce verilen model,

$$T_i = \alpha + \beta G_i + \gamma G_i X_i + \epsilon_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada kukla değişken Xi yine aynı değerleri alacaktır. Bu durumda tüketim harcamalarının beklenen değeri,

savaş dönemleri için:

$$E(T_i | X_i = 0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} G_i + \hat{\gamma} G_i (0)$$

$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} G_i$$

barış dönemleri için:

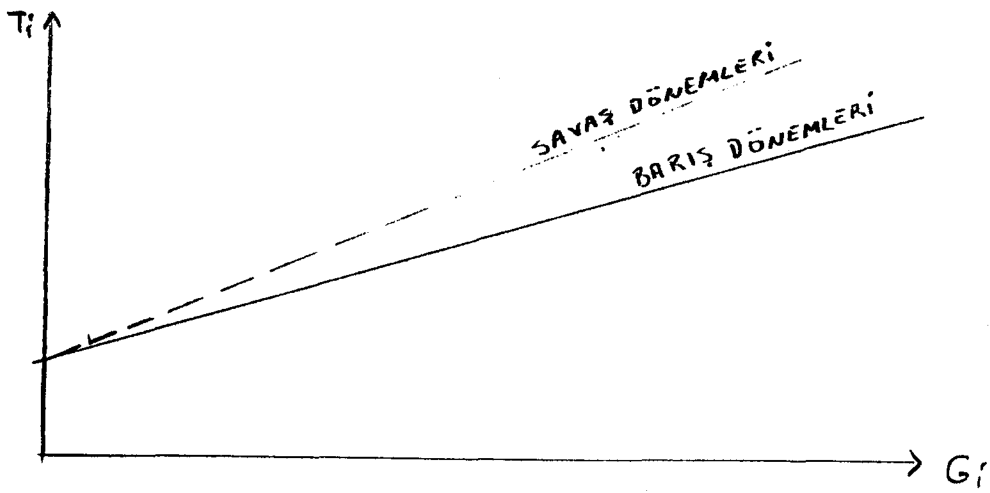
$$E(T_i | X_i = 1) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} G_i + \hat{\gamma} G_i (1)$$

$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} G_i + \hat{\gamma} G_i$$

$$= \hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\gamma}) G_i$$

olacaktır. Bu durumu şekil yardımı ile şöyle gösterebiliriz.

(11). KILIÇBAY, Ahmet - Ekonometrinin Temelleri - İstanbul Üniversitesi Yayın No: 2701 - İstanbul, 1980, S.271-272.



Yukarıda söz edilen iki farklı durum birlikte de düşünülebilir. Bu durumda kukla değişken ile ifade edilen olay modelin hem sabit katsayısını, hem de eğimini, yani bağımsız değişkeninin katsayısını etkileyecektir. Bu durumda da modelin yeniden düzenlenmesi gerekecektir(12).

Daha önce örnek olarak incelediğimiz olaydaki modelde bu düzenlemeyi yaptığımızda model şöyle yazılabilir.

$$T_i = \alpha + \beta G_i + \gamma X_i + \theta G_i X_i + e_i$$

Burada da kukla değişken Xi aynı değerleri alacaktır. Bu durumda tüketim harcamalarının beklenen değeri, savaş dönemleri için:

$$E(T_i | X_i = 0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} G_i + \hat{\gamma}(0) + \hat{\theta} G_i (0)$$

$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} G_i$$

barış dönemleri için:

$$E(T_i | X_i = 1) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} G_i + \hat{\gamma}(1) + \hat{\theta} G_i (1)$$

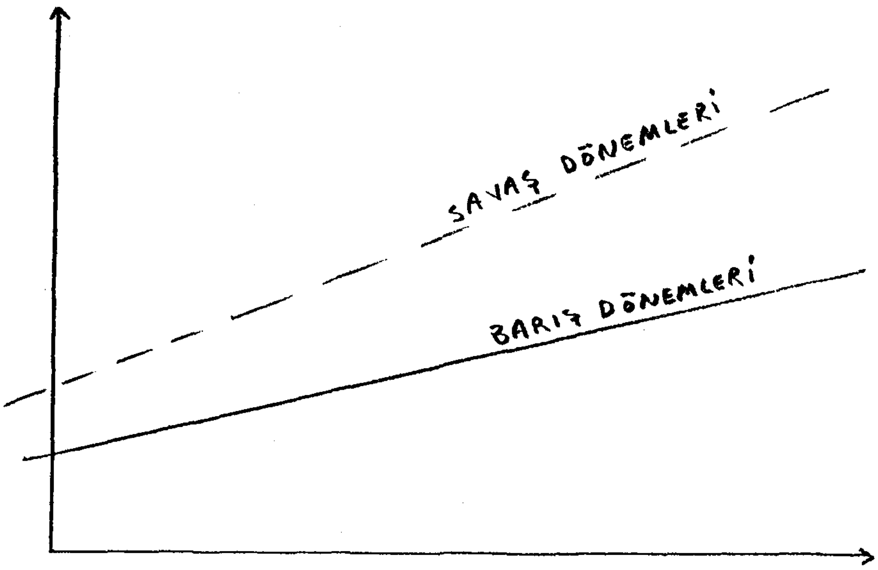
$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} G_i + \hat{\gamma} + \hat{\theta} G_i$$

$$= (\hat{\alpha} + \hat{\gamma}) + (\hat{\beta} + \hat{\theta}) G_i$$

olacaktır. Bu durumu şekil yardımı ile şöyle gösterebiliriz.

---

(12). KILIÇBAY - a.g.e. - S.273-274.



Yukarıda bir nicel, bir kukla bağımsız değişkenli modeller için örnek vererek yaptığımız açıklamalar, birden fazla nitel ve nicel değişkenin yer aldığı modeller için de geçerlidir. Daha fazla bağımsız değişkeni olan modellerde de izlenecek yol yukarıdaki açıklamaların bir tekrarı olacaktır(13).

2.4. Mevsimlik Hareketlerin Analizinde Kukla Değişken Kullanımı

Zaman serilerini etkileyen dört faktörden biri de mevsimlik hareketlerdir. Kukla değişkenlerin kullanılması ile regresyon modelleri mevsimlik hareketlerin incelenmesinde kullanılabilir. burada kukla değişken kullanılması ile mevsimlik hareketlerin tek bir regresyon modeli ile incelenmesi mümkün olabilmektedir(14).

Aylık veya mevsimlik hareketler kukla değişken kullanılmazsa ayrı ayrı modellerle ifade edileceklerdir. Dört mevsim için böyle bir modeller grubunu şöyle gösterebiliriz.

---

(13). GOLDBERGER, Arthur S. - Econometric Theory - John Wiley and Sons, Inc. - New York, 1964 - S.225-227.

(14). GUJARATİ - a.g.e. - S.300.
YAMANE - a.g.e. - S.1016.

İlkbahar: $Y_i = \alpha_1 + \beta X_i + \varepsilon_i$

Yaz : $Y_i = \alpha_2 + \beta X_i + \varepsilon_i$

Sonbahar: $Y_i = \alpha_3 + \beta X_i + \varepsilon_i$

Kış : $Y_i = \alpha_4 + \beta X_i + \varepsilon_i$

Modellerden görüldüğü gibi sabit katsayılar aynı olarak yazılmıştır. Yani daha önceki açıkladıklarımıza benzer şekilde mevsimlerin sadece sabit katsayıyı etkilediği varsayılmıştır. Yukarıda verilen model kukla değişken kullanılarak tek bir regresyon modeli şeklinde yazılabilir. Bu durumda kukla değişkenler mevsimlik hareketleri temsil edecektir.

Yukarıda verilen dört modeli kukla değişkenler kullanarak bir tek model şeklinde şöyle yazabiliriz.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma_2 Z_{i2} + \gamma_3 Z_{i3} + \gamma_4 Z_{i4} + \varepsilon_i$$

Verilen modelde üç kukla değişken yer olmaktadır. Bu değişkenler şu değerleri alacaklardır.

$Z_{i2} = 1$ Yaz mevsimi
$Z_{i2} = 0$ diğer mevsimi
$Z_{i3} = 1$ Sonbahar mevsimi
$Z_{i3} = 0$ diğer mevsimler
$Z_{i4} = 1$ Kış mevsimi
$Z_{i4} = 0$ diğer mevsimler

Görüldüğü gibi dört mevsim olmasın rağmen modelde üç kukla değişken yer almaktadır. Bunun sebebi bütün değişkenlerin sıfır değerini aldığı zaman ilkbahar mevsiminin değerinin kendiliğinden ortaya çıkacak olmasıdır(15).

Mevsimlere göre bağımlı değişkenin beklenen değerleri şöyle olacaktır.

İlkbahar:

$$E(Y_i \mid Z_{i2}=0, Z_{i3}=0, Z_{i4}=0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_2(0) + \hat{\gamma}_3(0) + \hat{\gamma}_4(0)$$
$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$$

---

(15). STEWART, Mark B.; WALLIS, Kenneth F. - Introductory Ekonometrics - Second Edition, Basil Blackwell, Oxford, 1981, S.179-180.

Yaz:

$$E(Y_i \mid z_{i2}=1, z_{i3}=0, z_{i4}=0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_2(1) + \hat{\gamma}_3(0) + \hat{\gamma}_4(0)$$
$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_2$$
$$= (\hat{\alpha} + \hat{\gamma}_2) + \hat{\beta} X_i$$

Sonbahar:

$$E(Y_i \mid z_{i2}=0, z_{i3}=1, z_{i4}=0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_2(0) + \hat{\gamma}_3(1) + \hat{\gamma}_4(0)$$
$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_3$$
$$= (\hat{\alpha} + \hat{\gamma}_3) + \hat{\beta} X_i$$

Kış:

$$E(Y_i \mid z_{i2}=0, z_{i3}=0, z_{i4}=1) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_2(0) + \hat{\gamma}_3(0) + \hat{\gamma}_4(1)$$
$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_4$$
$$= (\hat{\alpha} + \hat{\gamma}_4) + \hat{\beta} X_i$$

Bu sonuçlar daha önce verilen birbirinden ayrı olarak mevsimlik hareketleri belirleyen dört model ile karşılaştırılırsa,

İlkbahar: $\alpha_1 = \alpha$
Yaz : $\alpha_2 = \alpha + \gamma_2$
Sonbahar: $\alpha_3 = \alpha + \gamma_3$
Kış : $\alpha_4 = \alpha + \gamma_4$

olduğu görülecektir.

Mevsimlik hareketlerin incelenmesinde kullanılan modelde mevsimlere göre sabit katsayı yerine, bağımsız değişkenin katsayısı da etkilinebilir. Bu durumda mevsimlik hareketleri ayrı ayrı açıklayacak modeller şöyle olacaktır.

İlkbahar: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$
Yaz : $Y_i = \alpha + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$
Sonbahar: $Y_i = \alpha + \beta_3 X_i + \varepsilon_i$
Kış : $Y_i = \alpha + \beta_4 X_i + \varepsilon_i$

Bu dört modeli kukla değişkenler yardımı ile birleştirerek tek model haline getirirdiğimizde aşağıdaki model oluşacaktır. Burada da daha önce olduğu gibi üç kukla değişken kullanılmıştır.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma_2 Z_{i2} X_i + \gamma_3 Z_{i3} X_i + \gamma_4 Z_{i4} X_i + \varepsilon_i$$

Bu modelde de daha önceki bölümlerde olduğu gibi bağımsız değişkenin katsayısının etkilenmesi için kukla değişkenlerin bağımsız değişken ile çarpımları yer almaktadır. Yukarıda verilen modelde kukla değşikenler şu değerleri alacaktır.

$Z_{i2} = 1$	yaz mevsimi
$Z_{i2} = 0$	diğer mevsimler
$Z_{i3} = 1$	sonbahar mevsimi
$Z_{i3} = 0$	diğer mevsimler
$Z_{i4} = 1$	kış mevsimi
$Z_{i4} = 0$	diğer mevsimler

Yine bütün kukla değişkenlerin değeri sıfır olduğunda ilkbahar mevsiminin sonucuna ulaşılacaktır. Bu model için bağımlı değişkenin mevsimlere göre beklenen değerleri aşağıda verilmiştir.

İlkbahar:

$$E(Y_i \mid Z_{i2}=0, Z_{i3}=0, Z_{i4}=0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_2(0) X_i + \hat{\gamma}_3(0) X_i + \hat{\gamma}_4(0) X_i$$
$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$$

Yaz :

$$E(Y_i \mid Z_{i2}=1, Z_{i3}=0, Z_{i4}=0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_2(1) X_i + \hat{\gamma}_3(0) X_i + \hat{\gamma}_4(0) X_i$$
$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\gamma}_2 X_i$$
$$= \hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\gamma}_2) X_i$$

Sonbahar:

$$E(Y_i | Z_{i2}=0, Z_{i3}=1, Z_{i4}=0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \hat{\gamma}_2(0)X_i + \hat{\gamma}_3(1)X_i + \hat{\gamma}_4(0)X_i$$

$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \hat{\gamma}_3 X_i$$

$$= \hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\gamma}_3)X_i$$

Kış :

$$E(Y_i | Z_{i2}=0, Z_{i3}=0, Z_{i4}=0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \hat{\gamma}_2(0)X_i + \hat{\gamma}_3(0)X_i + \hat{\gamma}_4(1)X_i$$

$$= \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \hat{\gamma}_4 X_i$$

$$= \hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\gamma}_4)X_i$$

Beklenen değerlerden görüldüğü gibi burada sabit katsayılar aynı kalırken, bağımsız değişkenin katsayıları değişmiştir. Burada elde edilen sonuçlar ile daha önce verilen dört modelin katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilecektir.

İlkbahar: $\beta_1 = \beta$
Yaz : $\beta_2 = \beta + \gamma_2$
Sonbahar: $\beta_3 = \beta + \gamma_3$
Kış : $\beta_4 = \beta + \gamma_4$

Mevsimlik hareketlerin kukla değişkenler yardımı ile tek bir regresyon modeli ile açıklanmasında son olarak karma bir modelin geliştirilmesi gerekmektedir. Daha önce yapılan açıklamalarda önce sabit katsayı, daha sonra ise bağımsız değişkenin katsayısı mevsimlik hareketlerden etkilenmişti. Burada son olarak açıklayacağımız modelde ise hem sabit katsayı, hem de bağımsız değişkenin katsayısı mevsimlik hareketlerden etkilenecektir.

Mevsimlik hareketleri ayrı ayrı açıklayacak ve hem sabit katsayıları, hem de bağımsız değişkenlerinin katsayıları mevsimlik hareketlerden etkilenen dört ayrı model aşağıdaki gibi olsun.

İlkbahar: $Y_i = \alpha_1 + \beta_1 X_i + \varepsilon_{i1}$
Yaz : $Y_i = \alpha_2 + \beta_2 X_i + \varepsilon_{i2}$
Sonbahar: $Y_i = \alpha_3 + \beta_3 X_i + \varepsilon_{i3}$
Kış : $Y_i = \alpha_4 + \beta_4 X_i + \varepsilon_{i4}$

Bu dört model kukla değişkenlerle birleştirilerek hem sabit katsayıları, hem de bağımsız değişkenlerinin katsayıları mevsimlik hareketlerden etkilenecek tek bir regresyon modeli oluşturulurken yine üç kukla değişken kullanılacaktır. Böyle bir model şu şekilde yazılabilir.

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{i2} + \alpha_3 Z_{i3} + \alpha_4 Z_{i4} + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i Z_{i2} + \beta_3 X_i Z_{i3} + \beta_4 X_i Z_{i4} + \varepsilon_i$$

Modelde yer alan kukla değişkenler aşağıdaki değerleri alacaktır.

Z_{i2} = 1 yaz mevsimi
Z_{i2} = 0 diğer mevsimler
Z_{i3} = 1 sonbahar mevsimi
Z_{i3} = 0 diğer mevsimler
Z_{i4} = 1 kış mevsimi
Z_{i4} = 0 diğer mevsimler

Bütün kukla değişkenler sıfır değerini aldıklarında ilkbahar mevsimi için sonuç elde edilmiş olacaktır. Yukarıda verilen model için bağımlı değişkenin beklenen değerleri aşağıda görülmektedir.

İlkbahar:

$$E(Y_i | Z_{i2}=0, Z_{i3}=0, Z_{i4}=0) = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2(0) + \hat{\alpha}_3(0) + \hat{\alpha}_4(0) + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{\beta}_2 X_i(0) + \hat{\beta}_3 X_i(0) + \hat{\beta}_4 X_i(0)$$

$$= \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 X_i$$

Yaz :

$$E(Y_i \mid z_{i_2}=1, z_{i_3}=0, z_{i_4}=0) = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2(1) + \hat{\alpha}_3(0) + \hat{\alpha}_4(0) + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{\beta}_2 X_i(1) + \hat{\beta}_3 X_i(0) + \hat{\beta}_4 X_i(0)$$

$$= \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{\beta}_2 X_i$$

$$= (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) + (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) X_i$$

Sonbahar:

$$E(Y_i \mid z_{i_2}=0, z_{i_3}=1, z_{i_4}=0) = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2(0) + \hat{\alpha}_3(1) + \hat{\alpha}_4(0) + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{\beta}_2 X_i(0) + \hat{\beta}_3 X_i(1) + \hat{\beta}_4 X_i(0)$$

$$= \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{\beta}_3 X_i$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_3) + (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3) X_i$$

Kış :

$$E(Y_i \mid z_{i_2}=0, z_{i_3}=0, z_{i_4}=1) = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2(0) + \hat{\alpha}_3(0) + \hat{\alpha}_4(1) + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{\beta}_2 X_i(0) + \hat{\beta}_3 X_i(0) + \hat{\beta}_4 X_i(1)$$

$$= \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_4 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{\beta}_4 X_i$$

$$= (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_4) + (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_4) X_i$$

Yukarıdaki beklenen değerlere bakılırsa, elde edilen sonuçların daha önce ayrı ayrı elde edilen sonuçların bir birleşimi oldukları görülecektir. Bu sonuçlar ile daha önce verilen dört ayrı modelin sonuçları karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilecektir.

İlkbahar: $\beta_1 = \beta_1$ $\alpha_1 = \alpha_1$

Yaz : $\beta_2 = \beta_1 + \beta_2$ $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$

Sonbahar: $\beta_3 = \beta_1 + \beta_3$ $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3$

Kış : $\beta_4 = \beta_1 + \beta_4$ $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_4$

Buraya kadar yapılan açıklamalarda yıl dört eşit parçaya bölünerek alınmıştır. Yapılacak istatistiksel analizler daha kısa veya daha uzun aylık dönemlerin oluşturulmasını gerektirdiğinde yukarıdaki açıklamalara paralel olarak farklı modeller geliştirilecektir. Örneğin aylık değerler kullanılıyorsa onbir, altı aylık değerler kullanılıyorsa bir kukla değişkenin kullanılması gerekecektir. Ayrıca kukla değişkenlerle mevsimlik hareketler incelenirken iki veya daha fazla nicel bağımsız değişkenin kullanılması da mümkündür.

2.5. Bağımlı Değişkenin Kukla Değişken Olması

Kukla değişkenlerle ilgili olarak buraya kadar yaptığımız açıklamalarda hep bağımsız değişkenlerin kukla değişken olması durumundan söz ederek, bunların farklı türlerini ele aldık. İstatistiksel analiz gerektirdiğinde bağımlı değişkenlerin de kukla değişken olması mümkündür(16).

Bağımlı değişken Yi kukla değşiken olduğunda bağımsız değişkenler gibi sadece 0 sıfır ve bir değerlerini alacaktır. Örneğin ailelerin araba sahibi olup olmaması ile gelirleri arasındaki ilişkinin incelendiğini düşünelim. Bu durumda oluşturulacak regresyon modelinde gelir araba sahibi olup olmamayı açıklayacak veya belirleyecek faktör olarak alınacağından, gelir bağımsız değişken olacaktır. Araba sahibi olup olmama ise bağımlı değişken olarak alınacaktır. Böyle bir araştırma için anakütle regresyon modeli

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada bağımlı değişken,

$Y_i = 0$ AİLE ARABA SAHİBİ İSE

$Y_i = 1$ AİLE ARABA SAHİBİ DEĞİL İSE

değerlerini alacaktır.

---

(16). MADDALA - a.g.e. - S.169-170.

Bağımlı değişkenin kukla değişken olması durumunda bağımlı, değişkenin beklenen değeri,

$$E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

olduğundan ve Yi sadece sıfır ve bir değerlerini aldığından,

$$0 \leq E(Y_i) \leq 1$$

$$0 \leq (\alpha + \beta X_i) \leq 1$$

olacaktır.

Yukarıda açıklanan bağımlı değişkenin özel yapısı nedeni ile gerek parametrelerin tahmininde, gerekse ileriye dönük tahminlerde bazı problemlerle karşılaşılacaktır. Bunları şöyle özetleyebiliriz(17).

- Regresyonun temel varsayımlarından biri hata terimlerinin varyansının sabit olmasıydı. Bu durumda hata terimlerinin varyansı sabit olamayacak, yani değişen varyans durumu söz konusu olacak [illegible]

ile bir ölçüde çözümlenebilir(18).

- Regresyonun bir diğer temel varsayımı hata terimlerinin normal dağıldığıydı. Bağımlı değişken 0, 1 değerleri aldığından hata terimleri normal dağılmamıştır. Bu nedenle regresyon katsayıları   ve   'nın dağılımları da normal olmayacaktır. Bu durumda katsayılar için yapılan testlerde geçerliliğini kaybedecektir. Ancak örnek birim sayısının artması ile bu sorun ortadan kalkacaktır.

---

(17). KMENTA - a.g.e. - S.426-427.
TOBİN - J. - Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables - Econometrica, Vol. 26, January, 1958 - S.24-36.
KOUTSOYİANNİS, A. - Ekonometri Kuramı - Çevirenler: Ümit ŞENESEN, Gülay Günlük ŞENESEN - Verso Yayıncılık - Ankara, 1989 - S.286.

(18). RUTEMILLER, H.C.; BOWERS, D.A. - Estimation in a Heteroskedastic Regression Model - Journal of American

- Bağımlı değişkenin kukla değişken olması durumunda karşılaşılacak bir diğer problem ileriye dönük tahminlerle ilgilidir. Bağımlı değişkenin değerleri modelden tahmin edildiğinde değerleri 0 - 1 aralığı dışında, birden büyük sıfırdan küçük değerler alabilir. Modelde bağımsız değişken Xo değerini aldığında belirlenen bağımsız değişken değeri ise

Regresyon modeli: $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$

$$0 < \hat{Y}_0 < 1 \quad \text{ise} \quad Y_0' = \hat{Y}_0$$

$$\hat{Y}_0 \geqslant 1 \quad \text{ise} \quad Y_0' = 1$$

$$\hat{Y}_0 \leqslant 0 \quad \text{ise} \quad Y_0' = 0$$

olacaktır(19).

---

(19). KMENTA - a.g.e. - S.427.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

U Y G U L A M A

Çalışmamızın bu bölümünde daha önce yaptığımız teorik açıklamalar ile ilgili bir uygulama yapılmıştır. Bir önceki bölümde görüldüğü gibi regresyon analizlerinde kukla değişkenler farklı şekillerde kullanılabilmektedir. Burada tüm uygulanma çeşitleri ile birer örnek yapamayacağımızdan, sadece regresyon analizinde kukla değişken kullanımı ile ilgili bir tek uygulama yapmayı uygun gördük.

3.1. Uygulamanın Konusu

Uygulama konusu olarak Türkiye'nin 1981-1989 yılları arasındaki dokuz yıllık ithalat ve ihracatı arasındaki ilişkiyi seçtik. Daha önce açıklandığı gibi kukla değişkenler mevsimlik hareketlerin incelenmesinde de kullanılabilmektedir. Uygulamamızda 9 yıllık veriler üçer aylık 4 gruba ayrılarak aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Türkiye'nin aylık ithalat ve ihracat rakamları ABD doları olarak alınarak 3'er aylık olarak aşağıdaki gibi gruplanmıştır.

1. Devre: Ocak, Şubat, Mart
2. Devre: Nisan, Mayıs, Haziran
3. Devre: Temmuz, Ağustos, Eylül
4. Devre: Ekim, Kasım, Aralık

3.2. Uygulanan Regresyon Modeli

Tablo-1'de yukarıda açıklandığı şekilde düzenlenen 9 yıl için toplam 36 devrelik ithalat ve ihracat rakamları görülmektedir. Bu verilerin analizi için,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 K_{2t} + \beta_3 K_{3t} + \beta_4 K_{4t} + \epsilon_t$$

regresyon modeli kullanılmıştır.

Türkiye gelişmekte olan bir ülke olduğundan yapacağı ihracat ithalatına bağlı olacaktır. Bu nedenle modelde bağımlı değişken olarak ihracat alınmıştır.

Modele bakıldığında da anlaşıldığı gibi model kurulurken mevsimlerin modelin Tablo-1: Türkiye'nin 1981-1989 yılları üçer aylık devreleri için ABD doları olarak ithalat ve ihracatı (bin dolar)

Devreler	İhracat	İthalat
1981 - 1	2298	1022
2	2080	935
3	2120	992
4	2419	1694
1982 - 1	1961	1258
2	2264	1247
3	1977	1277
4	2616	1929
1983 - 1	2350	1357
2	2101	1316
3	2077	1235
4	2707	1820
1984 - 1	2179	1854
2	2648	1674
3	2667	1543
4	3263	2062
1985 - 1	2435	1780
2	2584	1860
3	2873	2089
4	3452	2230
1986 - 1	2812	1878
2	2640	1688
3	2648	1660
4	3006	2231
1987 - 1	2840	1988
2	3040	2244
3	3517	2637
4	4764	3322
1988 - 1	3495	2804
2	3782	2725
3	3270	2592
4	3796	3542
1989 - 1	3317	2830
2	3807	2580
3	3993	2574
4	4696	3643

katsayısını etkilemeyeceği, yani her devre için 'in aynı olacağı varsayılmıştır. Varsayım olarak devrelere bağlı olarak ithalat değişkeninin katsayısının da değişeceği kabul edilseydi, şüphesiz ki model farklı şekilde kurulacaktı.

Modelde yer alan üç kukla değişken daha önce açıklandığı gibi 0 ve 1 değerlerini alarak, 4 devrenin değerlerini belirlemektedir. Burada,

$K_{2t}=0$, $K_{3t}=0$, $K_{4t}=0$ İSE 1. DEVRE

$K_{2t}=1$, $K_{3t}=0$, $K_{4t}=0$ İSE 2. DEVRE

$K_{2t}=0$, $K_{3t}=1$, $K_{4t}=0$ İSE 3. DEVRE

$K_{2t}=0$, $K_{3t}=0$, $K_{4t}=1$ İSE 4. DEVRE

söz konusu olmaktadır.

3.3. Uygulamanın Sonuçları

Daha önce Tablo-1'de verilen ithalat ve ihracat rakamları yukarıda açıklandığı şekilde kukla değişkenlerin alacakları değerlerle birlikte bir istatistik paket programı için bilgisayara yüklenmiştir. Bilgisayar çıktısından aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

$$Y_t = 859{,}6040 + \underset{(0{,}0721)}{0{,}9511\,X_t} + \underset{(128{,}7273)}{192{,}9380\,K_{2t}} + \underset{(128{,}6719)}{179{,}8429\,K_{3t}} + \underset{(136{,}5378)}{173{,}2157\,K_{4t}}$$

$R^2 = 0{,}8589$

$F = 54{,}266$

$DW = 1{,}4448$

Bu değerleri şöyle yorumlayabiliriz:

- Görüldüğü gibi determinasyon katsayısı değişkenlerin bağımlı değişkendeki değişmelerin yaklaşık % 86'sını açıkladığını ifade etmektedir.

- Tahmin edilen katsayılar için t-testi sonuçları:

$$t_1 = \frac{0,9511}{0,0721} = 13,187$$

$$t_2 = \frac{192,9380}{128,7273} = 1,499$$

$$t_3 = \frac{179,8429}{128,6719} = 1,398$$

$$t_4 = \frac{173,2157}{136,5378} = 1,269$$

Yukarıda hesaplanan t değerleri için hipotezler,

$H_0 : \beta_k = 0$

$H_1 : \beta_k > 0$

şeklinde tek taraflı olarak kurularak parametreler tek taraflı olarak test edilmiştir. 36 devrelik veri ve modelde toplam 5 değişken olduğundan student-t dağılımı tablosuna bakmak için serbestlik derecesi,

S D = n-4 = 36-5 = 31

olarak hesaplanmıştır. Yukarıda verilen t değerleri student-t dağılımı tablosundan bulunan değerlerle karşılaştırılınca, it-halat değişkeninin katsayısının 0,01 hata payı ile, kukla değişkenlerin katsayılarının ise yaklaşık 0,10 hata payı ile anlamlı olduğu görülmüştür.

- Tahmin edilen katsayılar için
  F-testi:

Bilgisayar çıktısından elde edilen F değerinin F dağılımı tablosundan bulunan değerle karşılaştırılması sonucunda,

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

H_1 : $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \beta_4 \neq 0$

hipotezlerinden biri kabul edilecektir. F dağılımı tablosuna bakmak için serbestlik dereceleri,

$S\,D_1 = k-1 = 5-1 = 4$

$S\,D_2 = n-k = 36-5 = 31$

olarak hesaplanmıştır. Bu serbestlik derecesi ile F dağılımı tablosundan 0,01 hata payı ile değer bulunduğunda 0,01 hata payı ile H_1 hipotezi kabul edilmiştir. Kısaca 0,01 hata payı ile katsayı tahminleri anlamlıdır.

- Durbin-Watson testi:

Modelde otokorelasyon olup olmadığını araştırmak için yapılan Durbin-Watson testi için hesaplanan DW değeri Durbin-Watson tablosundan d_u ve d_L değerleri ile karşılaştırılınca hesaplanan DW değeri tablodan bulunan değerlerin arasında yer almış, yani belirsiz bölgeye düşmüştür. Bu nedenle modelde otokorelasyon olup olmadığına kesin olarak karar verilememektedir.

- Sonuç:

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı gibi model için yapılan t-testi sonuçlarında hata payı biraz büyük çıkmış ayrıca Durbin-Watson testi sonucu kesin bir karar verilememiştir. Bu sonuçları ihmal ederek modelin değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklamada yeterli olabileceğini söyeleyebiliriz.

Modeli değişkenler arasındaki artışı açıklamada yeterli kabul ettiğimize göre, tahmin edilen katsayıları şöyle yorumlayabiliriz.

- Tüm devreler için ithalatın bir ABD doları artışı karşısında, ihracat 0,95 birim artmaktadır.

- 1. Devre için K_1 , K_2 ve K_3 kukla değişkenleri 0 değerini aldığında bu devre ihracatı için sabit katsayı 859,6040 olmaktadır.

- 2. Devre için K_1 kukla değişkeni 0, diğer kukla değişkenler 1 değerini aldığından bu devre için sabit katsayı 859.6040 + 192,9380 = 1052,5420 olmaktadır.

- 3. Devre için K_2 kukla değişkeni 0, diğer kukla değişkenler 1 değerini aldığından bu devre için sabit katsayı 859,6040 + 179,8429 = 1039,4469 olmaktadır.

- 4. Devre için K_3 kukla değişkeni 0, diğer kukla değişkenler 1 değerini aldığından bu devre için sabit katsayı 859,6040 + 173,2157 = 1032,8197 olmaktadır.

3.4. Gelecek Devrelerin Değerlerinin Tahmini

Yukarıda verilen model yardımı ile gelecek iki yıla ait devrelerin ihracat rakamlarını tahmin ettik. Bu işlemi yapabilmek için önce söz konusu devrelerin ithalat rakamlarının tahmini gerekiyordu. İthalatı tahmin etmek için 36 devrelik ithalat rakamları için trend modeli (X_t = ithalat, Z_t = Zaman)

$$X_t = 913,1778 + 58,9153\ Z_t$$
$$(5,3476)$$

$$R = 0,7812$$
$$F = 121,377$$
$$DW = 1,6494$$

olarak belirlendi. Yukarıda verilen model için tek taraflı t testi sonucu F testi sonucu 0,01 hta payı ile katsayıların anlamlı olduğu sonucuna varıldı. Aynı şekilde Durbin-Watson testis sonucunda 0,01 hata payı ile modelde otokorelasyon olmadığı anlaşıldı.

Modelin ilişkiyi açıklamada yeterli olduğu yapılan testler sonucunda ortaya konunca, modelden gelecek iki yıl olan 1990 ve 1991 yıllarının devrelerine ait değerler şöyle tahmin edildi.

Devreler	İthalat Tahminleri
1990 - 1	3093,04
2	3151,95
3	3210,87
4	3269,79
1991 - 1	3328,70
2	3387,62
3	3446,53
4	3505,45

Elde edilen ithalat tahminlerinin kukla değişkenlerin alacağı değerlerle birlikte daha önce verilen modelde yerine konması ile gelecek iki yılın devrelerine ait ihracat rakamları şöyle tahlin edildi.

$$\hat{Y}_{90,1} = 859,6040 + 0,9511\,(3093,04) + 192,9380\,(0) + 179,8429\,(0) + 173,2157\,(0)$$

$$\hat{Y}_{90,1} = 3801,39$$

$$\hat{Y}_{90,2} = 859,6040 + 0,9511\,(3151,95) + 192,9380\,(1) + 179,8429\,(0) + 173,2157\,(0)$$

$$\hat{Y}_{90,2} = 4050,36$$

$$\hat{Y}_{90,3} = 859{,}6040 + 0{,}9511\,(3210{,}87) + 192{,}9380(0) + 179{,}8429(1) + 173{,}2157(0)$$

$$\hat{Y}_{90,3} = 4093{,}30$$

$$\hat{Y}_{90,4} = 859{,}6040 + 0{,}9511\,(3269{,}79) + 192{,}9380(0) + 179{,}8429(0) + 173{,}2157(1)$$

$$\hat{Y}_{90,4} = 4142{,}71$$

$$\hat{Y}_{91,1} = 859{,}6040 + 0{,}9511(3328{,}70) + 192{,}9380(0) + 179{,}8429(0) + 173{,}2157(0)$$

$$\hat{Y}_{91,1} = 4025{,}53$$

$$\hat{Y}_{91,2} = 859{,}6040 + 0{,}9511(3387{,}62) + 192{,}9380(1) + 179{,}8429(0) + 173{,}2157(0)$$

$$\hat{Y}_{91,2} = 4274{,}50$$

$$\hat{Y}_{91,3} = 859{,}6040 + 0{,}9511(3446{,}53) + 192{,}9380(0) + 179{,}8429(1) + 173{,}2157(0)$$

$$\hat{Y}_{91,3} = 4317{,}44$$

$$\hat{Y}_{91,4} = 859{,}6040 + 0{,}9511(3505{,}45) + 192{,}9380(0) + 179{,}8429(0) + 173{,}2157(1)$$

$$\hat{Y}_{91,4} = 4366{,}85$$

Yukarıda verilen sonuçların geçerli olması daha önce uygulanan iktisadi politikalarda değişiklik yapılmamasına bağlıdır.

S O N U Ç

Değişkenler arasındaki ilişkileri incelemek için geliş-tirilmiş farklı istatistiksel yöntemler vardır. Bu yöntemlerin içinde regresyon ve korelasyon analizi ise ayrı bir yer tutar ve değişkenler arasındaki ilişkilerin incelenmesinde en çok kullanılan yöntemlerdir.

Çeşitli bilim dallarında, farklı konularda istatistiksel yöntemler kullanılmaktadır. Regresyon analizi de farklı konularda, farklı verilerle kullanılmaktadır. Bu farklılıklar regresyon modellerinin fonksiyonel şekillerinin dışında modellerde farklı değişkenler kullanılması zorunluluğunu ortaya çıkarmıştır. Kukla değişkenler veya gölge değişkenler olarak adlandırılan değişkenler kullanılan değişkenlerden biridir.

Kukla değişkenler regresyon analizinde kullanılan nitel değişkenlerin bir türüdür ve sadece sıfır ve bir değerlerini almaktadır. Alacağı değere göre iki farklı sonucu ifade etmektedir.

Kukla değişkenlerin bir veya birkaç tanesi birlikte bağımsız değişken olarak aynı modelde yer alabilirler. Bu durumda modelde kukla olmayan, yani nicel bağımsız değişkenler de birlikte yer alabilir.

Modelde nicel değişkenlerle birlikte nitel değişkenler de yer alırsa, modelin kurulmasında nitel değişkenin modelin hangi katsayısını etkileyeceğinin belirlenmesi gerekmektedir. Modellerde kukla değişken sabit katsayıyı ve bağımsız değişkenin katsayısını ayrı ayrı etkileyebileceği gibi, ikisini birlikte de etkileyebilir. Kukla değişkenlerin sadece sabit katsayıyı etkileyecği şekilde model kurulduğunda, kukla değişkenin alacağı değerlere göre regresyon doğrusunun düşey ekseni kesim noktası değişecektir. Sadece bağımsız değişkenin katsayısı kukla değişkenin alacağı sonuçlardan etkilenebilir. Bu durumda ise regresyon doğrusunun düşey ekseni kesim noktası aynı kalırken, doğrunun eğimi değişecektir. Kukla değişkenler hem sabit hem de bağımsız değişkenin katsayısını etkiliyorsa, bu durumda kukla değişkenin aldığı değerebağlı olarak her ikisi birlikte değişecektir.

Kukla değişkenler bağımsız değişken olarak kullanılabileceği gibi, bağımlı değişken de kukla değişken olabilir. Bağımlı değişkenin kukla değişken olması durumunda, bu değişken de sadece sıfır ve bir değerlerini alacaktır. Fakat bağımlı değişken kukla değişken ise bağımsız değişkenlerin kukla olması durumundan farklı olarak modelde bazı problemler çıkabilecektir. Bunları şöyle özetleyebiliriz:

- Hata terimlerinin varyanslarının sabit olması temel varsayımı geçerliliğini kaybedecektir. Bu durum birim sayısının artması ile ortadan kalkabilecektir.

- Temel varsayımlardan hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı geçerliliğini kaybedecektir. Bunun sonucu olarak regresyon katsayıları normal dağılmayacaklar ve katsayılar için yapılan testler de geçersiz olacaklardır. Bu durumda örnek birim sayısının artması ile ortadan kalkabilecektir.

- İleriye dönük tahminlerde, tahmin edilen değerler 0 veya 1'e eşit olmayabilir. Bu durumda tahmin edilen değer 1'den büyükse 1'e eşit, sıfırdan küçükse sıfıra eşit kabul edilebilir.

Kukla değişkenler mevsimlik hareketlerin incelenmesi amacı ile de kullanılabilirler. Bu durumda dört mevsim için ayrı ayrı katsayıları tahmin edilecek 4 model yerine bir tek model ile aynı şey yapılabilecektir.

Kukla değişkenler mevsimlik hareketlerin analizinde kullanılırsa bu durumda 4 mevsim için modelde 3 kukla değişken olması yeterli olacaktır. 3 kukla değişken de 0 değerini aldığında 4. mevsimin sonucuna ulaşılmış olacaktır. Bir tek model ile sonuca ulaşılması ile mevsimlik hareketlerin incelenmesinde kukla değişkenler büyük bir kolaylık sağlamış olacaktır. Kukla bağımsız değişkenler mevsimlik hareketlerin incelenmesinde kullanılırken, mevsimlerin modelin sabit ve bağımsız değişken katsayılarını birlikte veya ayrı ayrı etkilemesi durumlarına göre model kurulacaktır. Bu durumda regresyon doğrusunun sabit katsayısı, bağımsız değişken katsayısı ayrı ayrı veya ikisi birlikte mevsimlik hareketlerden etkilenecektir.

Açıklandığı gibi kukla değişkenler farklı şekillerde regresyon modellerinde yer alabilmektedir. Kukla değişkenlerin regresyon modellerinde kullanımı ile ilgili olarak tüm durumlar için uygulama yapmak güç olduğundan, burada bir örnek alınmıştır. Örnek olarak mevsimlik hareketlerin incelenmesinde kukla değişken kullanılması seçilmiştir.

Uygulamada Türkiye'nin 1981-1989 yılları arası 9 yıllık aylık ithalat ve ihracat rakamları ABD doları olarak alınarak, bunlar 3'er aylık 4 gruba ayrıldı. Böylece toplam 36 devrelik veri ile modelin parametreleri tahmin edildi. Model test edildiğinde ilişkiyi açıklamada yeterli olduğu anlaşıldı. Ayrıca model yardımı ile 1990 ve 1991 yılları 3'er aylık 4'er devresinin ihracat rakamları tahmin edildi. Bu tahmin için önce it-halatın bir trend modeli ile tahmin edilmesi gerektiğinden, önce bu işlem yapıldı. Bu sonuçlar hem kukla değişkenlerin nasıl kullanılacağını göstermiş, hem de kukla değişken kullanılan modellerle olumlu sonuçlar elde edilebileceğini ortaya koymuş oldu.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

- AVRALIOĞLU, Zeki - İstatistik - Ankara, 1977.
- BAĞIRKAN, Şemsettin - İstatistiksel Analiz - Önsöz Basım ve Yayıncılık - İstanbul, 1982.
- BAĞIRKAN, Şemsettin - Ekonometrinin Temel Kavramları- Duran Ofset Matbaası - İstanbul, 1986.
- CİLLOV, Haluk-İktisadi Olaylara Uygulanan İstatistik Metodları - İktisat Fakültesi Yayın No: 1724 - İstanbul, 1972.
- CROXTON, Frederick E. - Elementary Statistics With Applications in Medicine and the Biological Sciences- Dover Publishing, İnc. - New York, 1959.
- ERTEK, Tümay - Ekonometriye Giriş - Dördüncü Baskı - Beta Basım Yayım Dağıtım AŞ. - İstanbul, 1986.
- FEYZİOĞLU, Oğuz - Ekonometrik Yöntemler - Ankara İktisadi ve Ticari İlimler Akademisi Yayını - Ankara, 1977.
- GENCELİ, Mehmet - Ekonometride İstatistik İlkeler - Filiz Kitabevi - İstanbul, 1989.
- GOLDBERGER, Arthur S. - Econometric Theory - John Wiley and Sons, İnc. - New York, 1964.
- GUJARATI, Damodar - Basic Econometrics - Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD. - Tokyo, 1978.
- GÜRİŞ, Selâhattin - Regresyon Modelinin Seçimi - Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, Cilt 3, Sayı 3, 1986. S.529-590.
- HAYSLET, H.T. - Statistics Made Simple - Made Simple Books, W. H. Allen, Third Edition, London, 1974.
- HUNTSBERGER, David V.; CROFT T. D. James; BILLINGSLEY Patrick - Statiscal Inference For Management And Economics - Allyn and Bacon, Inc., Second Edition, Boston, 1980 - S.398-399.
- İDİL, Orhan-Örnekleme Teorisi ve İşletme Yönetiminde Uygulaması - İstanbul Üniversitesi Yayın No: 2708, İstanbul, 1980.

- JOHNSTON, J. - <u>Econometric Methods</u> - Mc Graw-Hill Book Company - New York, 1963.
- KELEJIAN, Harry H.; OATES, Wallace E. - <u>Introduction to Econometrics Principles and Applications</u> - Harper and Row Publishers - New York, 1974.
- KILIÇBAY, Ahmet - <u>Ekonometrinin Temelleri</u> - İstanbul Üniversitesi Yayın No: 2701 - İstanbul, 1980.
- KONTSOYİANNİS, A. - <u>Ekonometri Kavramı Ekonometri Yöntemlerinin Tanımına Giriş</u> - Çevirenler: Ümit Şenesen, Gülay Günlük-Şenesen - Versu Yayıncılık - Ankara, 1989.
- KMENTA, Jan - <u>Elements Of Econometrics</u> - Macmillan Publishing Co. - New York, 1971.
- MADDALA, G. S. - <u>Econometrics</u> - Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD. - Tokyo, 1977.
- MOSKOWITZ, Herbert; WRIGHT, Gordon P. - <u>Statistics For Management and Economics</u> - Charles E. Merril Publishing Company - Columbus Toronto, 1985.
- RUTEMILLER H. C.; BOWERS D. A. - <u>Estimation in a Heteroskedastic Regression Model</u> - Jouranal of American Statistical Association Vol. 63, June, 1968.
- SERPER, Özer - <u>Uygulamalı İstatistik 2</u> - Filiz Kitabevi - İstanbul, 1986.
- STEWART, Mark; KENNETH, F. Wallis - <u>Introductory Econometrics</u> - Basil Blackwell - Second Edition, Oxford, 1981.
- TOBIN J. - <u>Estimation of Relationship for Limited Dependent Variables</u> - Econometrica, Vol. 26. January, 1958.
- ÜNVER, Özkan; GAMGAM, Hamza - <u>Uygulamalı İstatistik Yöntemler</u> - Ankara, 1986.
- YAMANE, Taro - <u>Statistics An Introductory Analysis</u> - Third Edition, Harper International Edition, 1973.